

Wavelets: neuartige Bausteine der konstruktiven Analysis

Christian Blatter

1. Einführung

Die seit ca. 1985 entwickelte Theorie der Wavelets und die damit verbundene so genannte „Multiskalen-Analyse“ stellt ein neues Approximations-Paradigma dar, das wie kaum ein anderes Thema seit der Erfindung der Schnellen Fourier-Transformation die numerische Mathematik stimuliert und die Anwender, vor allem in der Signal- und Bildverarbeitung, beflügelt hat. Die Konstruktionen und Algorithmen dieser Theorie setzen allerdings ein breit angelegtes analytisches Arsenal voraus. Das folgende Referat ist ein Versuch, dem mathematischen Normalverbraucher nahezubringen, worum es hier geht.

2. Approximations-Paradigmen

Die Approximation bzw. die Darstellung von beliebigen gegebenen oder gesuchten Funktionen f mit Hilfe von speziellen Funktionen ist ein zentrales Thema der Analysis. „Spezielle Funktionen“ sind Funktionen aus einem Katalog, zum Beispiel Monome $t \mapsto t^k$, $k \in \mathbb{N}$, oder Funktionen $t \mapsto e^{ct}$, $c \in \mathbb{C}$ fest. Spezielle Funktionen sind im allgemeinen gut verstanden, oft einfach zu berechnen und haben interessante analytische Eigenschaften.

Bekannte Approximations-Paradigmen sind zum Beispiel

- Taylor-Approximation:

$$f(t) \doteq \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k \quad (|t-a| \leq \rho)$$

(das Zeichen \doteq steht für „angenähert gleich“).

- Tschebyscheff-Approximation: Hier geht es darum, die Funktion f auf dem Intervall $-1 \leq t \leq 1$ durch ein Polynom p_n vom Grad $\leq n$ so zu approximieren, dass der maximale Fehler

$$\sup_{-1 \leq t \leq 1} |f(t) - p_n(t)|$$

möglichst klein wird.

- Fourier-Reihen: Jede vernünftige 2π -periodische Funktion f lässt sich in eine Reihe nach den periodischen Grundfunktionen $t \mapsto e^{ikt}$ entwickeln:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt} \quad (t \in \mathbb{R}/2\pi).$$

Allgemein: Man hat einen gewissen Grundbereich Ω , zum Beispiel die reelle Achse \mathbb{R} , das Intervall $[0, 1]$ oder die Kreislinie S^1 , sowie ein System $(e_\alpha)_{\alpha \in J}$ (J ein gewisser Indexbereich) von „Basisfunktionen“ $e_\alpha : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$. Ist nun $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ eine „beliebige“ (gegebene oder gesuchte) komplexwertige Funktion mit dem Definitionsbereich Ω , so geht es um Darstellungen der Form

$$f(t) = \sum_{\alpha \in J} c_\alpha e_\alpha(t) \quad \text{bzw.} \quad f(t) = \int_J d\alpha c(\alpha) e_\alpha(t). \quad (1)$$

Ist der Indexbereich J abzählbar (z.B. $J = \mathbb{Z}$), so hat man eine Summe, und im Fall eines kontinuierlichen Indexbereichs (z.B. $J = \mathbb{R}$) ein Integral. Beachte: In dem Integral ist nicht t , sondern α die Integrationsvariable! In beiden Fällen tritt ein **Koeffizientenvektor** $(c_\alpha)_{\alpha \in J}$ auf den Plan. Die Information über f ist jetzt nicht mehr in f oder dem Graphen von f abgelegt, sondern in dem Koeffizientenvektor $(c_\alpha)_{\alpha \in J}$.

Dabei ist es oft noch so, dass für Funktionen $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ ein Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definiert ist und gleichzeitig die Basisfunktionen e_α orthonormiert sind. In diesem Fall lassen sich die c_α besonders einfach berechnen:

$$c_\alpha = \langle f, e_\alpha \rangle \quad (\alpha \in J). \quad (2)$$

3. Fourier-Transformation von Zeitsignalen

Um zu verstehen, was in (2) überhaupt ausgerechnet wird, betrachten wir die Fourier-Transformation von **Zeitsignalen** $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$. Die Formel (2) erscheint hier in der Gestalt

$$\hat{f}(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\alpha t} dt, \quad (3)$$

das ist die **Analyse** von f , und (1) erscheint als

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha \hat{f}(\alpha) e^{i\alpha t}, \quad (4)$$

das ist die **Synthese** von f .

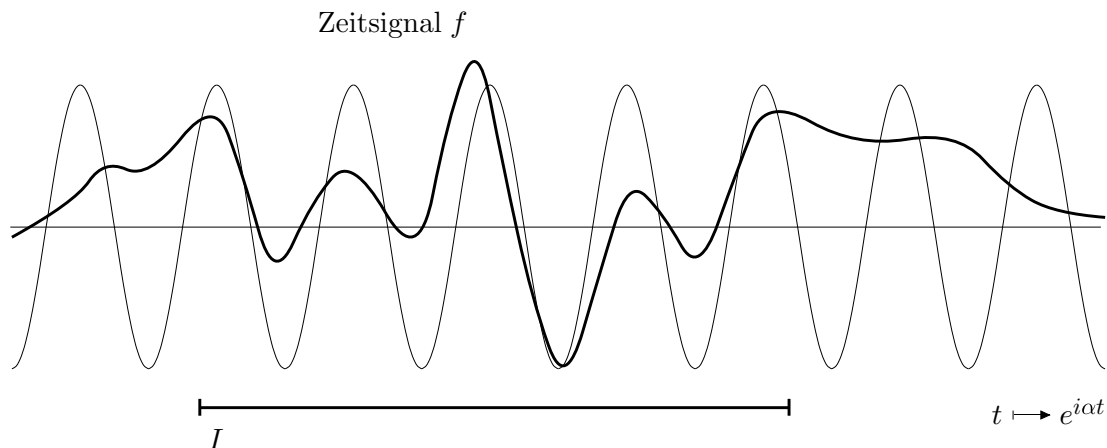


Abb. 1 In dem Zeitintervall I schwingt f im Takt mit dem Abfragemuster $t \mapsto e^{i\alpha t}$

Was nun die Integration (3) betrifft, die die Werte $\widehat{f}(\alpha)$ berechnet, so kann man sich die Funktion $t \mapsto e^{i\alpha t}$ als eine Art „Abfragemuster“ vorstellen (Abb. 1). Gilt zum Beispiel $f(t) \doteq C e^{i\alpha t}$ während eines respektablen Zeitintervalls I , so ist $\arg(f(t)e^{-i\alpha t}) \doteq \text{const.}$ auf I , und in (3) hebt sich während der Integration über I nur wenig heraus. Der Wert $|\widehat{f}(\alpha)|$ wird also gross ausfallen. In der Tat: Die „Note“ α ist in der „Musik“ f während längerer Zeit gespielt worden.

Die Fourier-Transformation hat im Zusammenhang der Signalverarbeitung gewisse Nachteile:

- Das Abfragemuster $t \mapsto e^{i\alpha t}$ belegt die ganze t -Achse. Es gibt daher keine t -Lokalisierung der in \widehat{f} gespeicherten Information. In anderen Worten: Man kann dem Graphen von \widehat{f} nicht ansehen, wann die „Note“ α gespielt wurde.
- Sprungstellen und „Knackpunkte“ von f haben schlechte Konvergenz von (1) für *alle* t zur Folge.

4. Die Wavelet-Transformation

Nun zu dem neuen Approximations-Paradigma: den Wavelets!

Man beginnt mit einem so genannten **Mutter-Wavelet** ψ (Abb. 2). Das ist ein ziemlich frei wählbares Grundmuster mit ca. einer Vollschiwingung im Intervall $[0, L]$ und nichts Interessantem ausserhalb dieses Intervalls. Es gibt nur die „technischen“ Bedingungen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0, \quad \|\psi\| = 1.$$

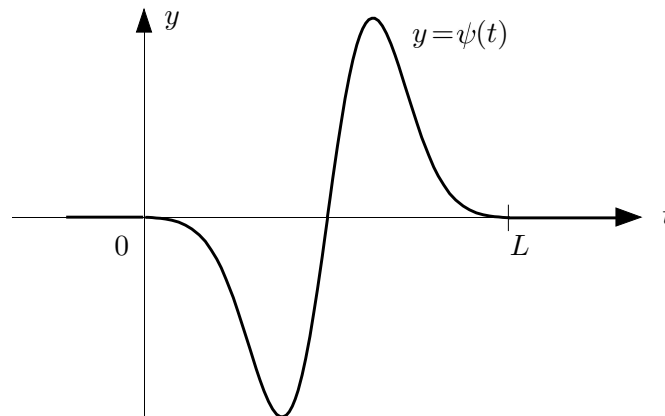


Abb. 2 Ein Mutter-Wavelet ψ

Von diesem Mutter-Wavelet werden nun gestauchte und verschobene Kopien

$$\psi_{a,b}(t) := \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right), \quad a > 0, b \in \mathbb{R}$$

gebildet (Abb. 3), die im weiteren als „Abfragemuster“ dienen. Die Idee dahinter ist folgende: Das Abfragemuster $\psi_{a,b}$ erkennt, wenn im t -Intervall $[b, b+aL]$ gerade ungefähr eine Vollwelle vorhanden ist. Für ein beliebiges Zeitsignal $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ definiert man nämlich, analog zu (3):

$$\mathcal{W}f(a, b) := \langle f, \psi_{a,b} \rangle := \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)} dt. \quad (5)$$

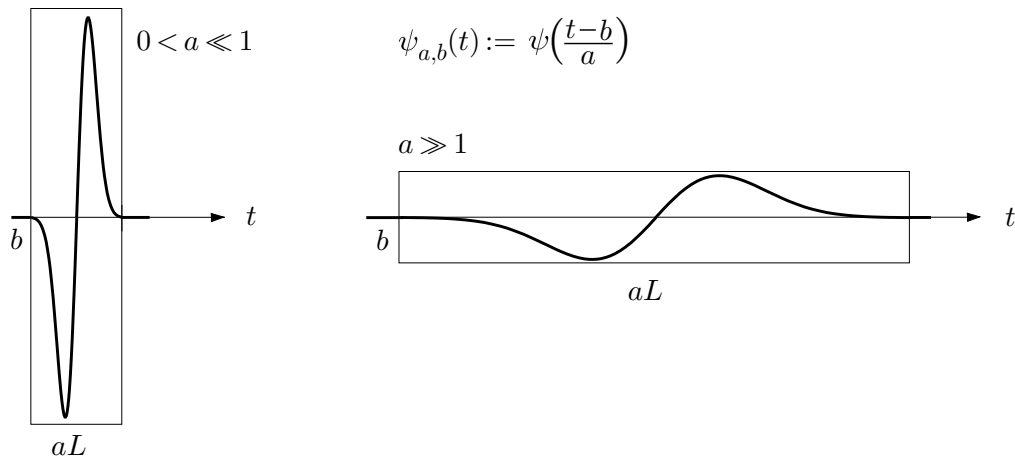
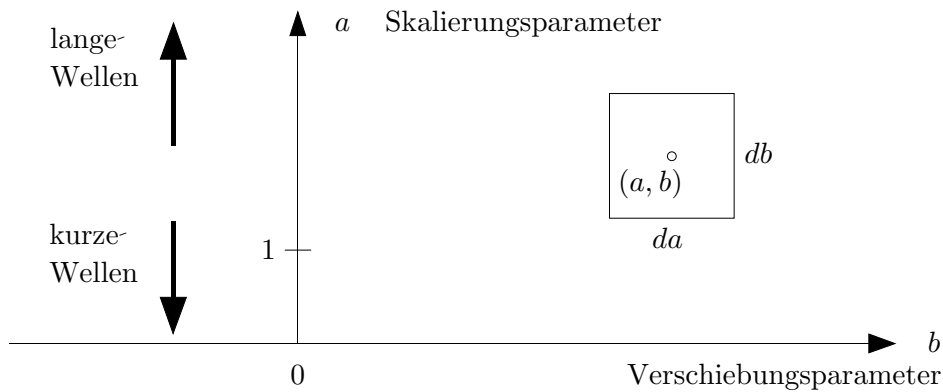


Abb. 3

Man nennt $\mathcal{W}f$ die **kontinuierliche Wavelet-Transformierte** von f ; es handelt sich dabei um eine Funktion der zwei Variablen a und b . Das ist die Analyse; sie führt von dem gegebenen Zeitsignal $t \mapsto f(t)$ zu dessen Wavelet-Transformierter $(a, b) \mapsto \mathcal{W}f(a, b)$. Ein Wert $\mathcal{W}f(a, b)$ ist dann besonders gross, wenn f zur Zeit $t = b$ gerade eine Vollwelle der Wellenlänge aL beginnt; ein solcher Wert enthält also simultan zeit- wie frequenz-lokalisierte Information über f .

Abb. 4 Die (a, b) -Ebene

Die Synthese im Sinne von (1), die das Ausgangssignal f aus $\mathcal{W}f$ wiederherstellt, wird eine Integration über den „Indexbereich“ $J := \{(a, b) \mid a \in \mathbb{R}_{>0}, b \in \mathbb{R}\}$ sein. Hierzu benötigen wir ein Mass in der (a, b) -Ebene (Abb. 4). Es zeigt sich, dass

$$d\mu = \frac{da db}{a^2},$$

das ist das Haar-Mass für die Gruppe der Affinitäten $t \mapsto at + b$, gerade richtig ist. Das zugehörige Skalarprodukt lautet

$$\langle u, v \rangle := \int_{\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}} u(a, b) \overline{v(a, b)} d\mu,$$

und es gilt in der Tat die zu (1) bzw. (4) analoge Umkehrformel

$$f(x) = \frac{1}{C_\psi} \int_{\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}} d\mu \mathcal{W}f(a, b) \psi_{a,b}(x).$$

Die Analogie zur Fourier-Transformation geht noch weiter: Dort hat man die Plancherel-Formel

$$\langle \widehat{f}, \widehat{g} \rangle = 2\pi \langle f, g \rangle,$$

und für die Wavelet-Transformation gilt entsprechend

$$\langle \mathcal{W}f, \mathcal{W}g \rangle = C_\psi \langle f, g \rangle$$

mit einer von dem gewählten Mutter-Wavelet ψ abhängigen Konstanten C_ψ .

Diese Formeln sind ja schön und recht; man darf aber nicht vergessen, dass f in seiner Wavelet-Transformierten $\mathcal{W}f$ mit einer kolossalen Redundanz abgelegt ist: Das Ausgangssignal f ist eine Funktion von *einer* reellen Variablen, die Transformierte $\mathcal{W}f$ eine Funktion von deren *zwei*. Es ist daher nicht verwunderlich, dass f bereits aus einer *diskreten* Menge von sogenannten **Wavelet-Koeffizienten**

$$c_{r,k} := \langle f, \psi_{r,k} \rangle \quad (r \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}) \quad (6)$$

(vgl. (5)) wertgenau zurückgewonnen werden kann. Die $\psi_{r,k}$ in (6) sind die vorher betrachteten $\psi_{a,b}$ für die speziellen Werte $a := 2^r$, $b := k 2^r$ (beachte die „logarithmische Skala“ auf der a -Achse!).

5. Multiskalen-Analyse

Auch die $c_{r,k}$ in (6) bilden noch einen zweidimensionalen Array; die f codierende Datenmenge ist also immer noch viel zu gross. Um den $c_{r,k}$ die innewohnende Redundanz auszutreiben, wird nun ein rekursiver Zusammenhang zwischen aufeinanderfolgenden Skalen etabliert. Damit kommen wir zu der sogenannten **Multiskalen-Analyse**, die erst den Wavelets zu ihrem Durchbruch in der Signal- und Bildverarbeitung verholfen hat.

Wir beginnen noch einmal von vorn und wählen als „Vater“ des Prozesses eine sogenannte **Skalierungsfunktion**

$$\phi = \phi_{0,0} \in L^1 \cap L^2,$$

die folgenden Bedingungen genügen muss:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) dt = 1, \quad \int_{-\infty}^{\infty} |\phi(t)|^2 dt = 1;$$

ferner sollen die um ganzzahlige Schritte verschobenen Kopien

$$\phi_{0,k}(t) := \phi(t - k) \quad (k \in \mathbb{Z})$$

zueinander orthogonal sein. Einfachstes Beispiel einer derartigen Skalierungsfunktion ist

$$\phi(t) := \begin{cases} 1 & (0 \leq t < 1) \\ 0 & (\text{sonst}) \end{cases} \quad (7)$$

(Abb. 5). Wir werden darauf zurückkommen.

Die Menge

$$V_0 := \left\{ f \mid f(t) = \sum_k c_k \phi(t - k), \sum_k |c_k|^2 < \infty \right\}$$

besteht aus allen Linearkombinationen der Funktionen $\phi_{0,k}$, enthält also nur Signale mit inhaltlichen Strukturen der „Wellenlänge“ ≥ 1 . Entsprechend enthält die Menge

$$V_r := \{t \mapsto f(t/2^r) \mid f \in V_0\} \quad (r \in \mathbb{Z}),$$

das sind die um den Faktor 2^r horizontal gestreckten Funktionen aus V_0 , nur Signale mit Strukturen der Grösse $\geq 2^r$. Beachte: Je negativer r , desto feinere „interessante“ Details gibt es in den Signalen $f \in V_r$.

Nun kommt die *entscheidende Zusatzbedingung*: Die Skalierungsfunktion ϕ muss so gewählt werden, dass die Inklusion

$$V_0 \subset V_{-1}$$

garantiert ist. In Worten: Die gröberen V_0 -Signale sind unter den zweimal feineren V_{-1} -Signalen immer noch anzutreffen. Hierfür ist notwendig und hinreichend, dass die Grundfunktion ϕ selber in V_{-1} liegt, und das heisst: Es gibt Konstanten h_k , so dass identisch in t gilt

$$\phi(t) \equiv \sqrt{2} \sum_k h_k \phi(2t - k) \quad \text{bzw.} \quad \phi_{0,0} = \sum_k h_k \phi_{-1,k}. \quad (8)$$

Dies ist die sogenannte **Skalierungsgleichung**; sie verknüpft ϕ mit den um den Faktor 2 horizontal gestauchten und verschobenen Kopien von ϕ .

V_0 ist also ein Unterraum von V_{-1} und besitzt damit ein orthogonales Komplement W_0 in V_{-1} . Anders ausgedrückt: Es gibt die orthogonale Zerlegung

$$V_{-1} = V_0 \oplus W_0. \quad (9)$$

Wir argumentieren nun folgendermassen: In V_0 gibt es 1 Basisvektor $\phi_{0,k}$ pro Längeneinheit, in V_{-1} gibt es 2 Basisvektoren $\phi_{-1,k}$ pro Längeneinheit. Auf Grund von (9) ist also zu erwarten, dass für W_0 ebenfalls 1 Basisvektor pro Längeneinheit benötigt wird, wobei („aus Symmetriegründen“) alle diese W_0 -Basisvektoren verschobene Kopien einer und derselben Funktion ψ sind. Anders ausgedrückt: Es ist

$$W_0 = \left\{ f \mid f(t) = \sum_k c_k \psi(t - k), \sum_k |c_k|^2 < \infty \right\}. \quad (10)$$

Die Funktionen $f \in W_0$ enthalten Details der Grössenordnung $\sim 1/2$, aber keine Korrelationen über grössere Distanzen. Letztere sind bereits in V_0 abgelegt.

Das ψ in (10) ist nun unser Mutter-Wavelet! Einfachstes Beispiel ist das Haar-Wavelet aus dem Jahr 1910: Ist ϕ gegeben durch (7), so gilt

$$\phi_{0,0} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_{-1,0} + \phi_{-1,1})$$

und folglich, wie erforderlich, $V_0 \subset V_{-1}$. Das zugehörige $\psi = \psi_{0,0}$, genannt **Haar-Wavelet**, hat folgende Gestalt:

$$\psi(t) := \begin{cases} 1 & (0 \leq t < \frac{1}{2}) \\ -1 & (\frac{1}{2} \leq t < 1) \\ 0 & (\text{sonst}) \end{cases}.$$

Man erkennt leicht (Abb. 5), dass $\phi_{0,0}$ und $\psi_{0,0}$ zusammen dieselben Funktionen erzeugen wie $\phi_{-1,0}$ und $\phi_{-1,1}$.

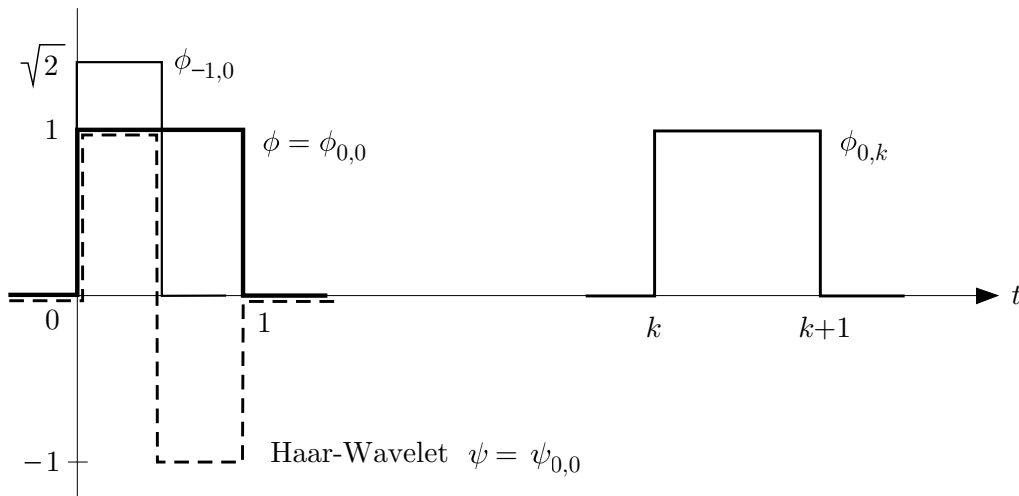


Abb. 5 Das Haar-Wavelet

Der Zusammenhang (9) zwischen V_0 , W_0 und V_{-1} setzt sich automatisch für alle Übergänge $r \rightsquigarrow r - 1$ fort. Alles in allem erhalten wir eine aufsteigende Kette von Räumen V_r mit „Differenzräumen“

$$W_r := \{t \mapsto f(t/2^r) \mid f \in W_0\}$$

wie folgt:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & \oplus W_r & & \oplus W_0 & & & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & & \\
 \dots & \subset V_{r+1} & \subset & V_r & \subset & V_{r-1} & \subset \dots \subset V_0 \subset V_{-1} \subset V_{-2} \subset \dots \subset L^2 \\
 & \leftarrow \text{gröber} & & & & & \text{feiner} \rightarrow
 \end{array}$$

Im Limes gilt (das muss natürlich bewiesen werden)

$$\bigcap_r V_r = \{0\}, \quad \overline{\bigcup_r V_r} = L^2;$$

somit hat man eine orthogonale Zerlegung des Signalraums L^2 in **Wavelet-Räume** W_r :

$$L^2 = \bigoplus_r W_r. \quad (11)$$

Zusammengefasst ergibt sich folgendes: Genügt die Skalierungsfunktion ϕ einer Skalierungsgleichung (8), wobei die h_k gewisse Konsistenzbedingungen erfüllen (s.u.), so ist

$$\psi = \psi_{0,0} := \sum_k g_k \phi_{-1,k}, \quad g_k := (-1)^k \overline{h_{-k-1}} \quad (12)$$

ein zulässiges Mutter-Wavelet für das gewählte ϕ , und es gilt (11).

6. Algorithmen

Bevor wir uns um die Bestimmung geeigneter h_k kümmern, beschreiben wir, wie nun die Wavelet-Analyse eines Zeitsignals f vor sich geht. Sie beginnt bei den feinsten in f feststellbaren Strukturen und schreitet zu immer langwelligeren Merkmalen fort. Es sei

etwa $f(t) \equiv 0$ für $|t| \geq 2^M$, und es sei $\Delta t = 1$ der feinste betrachtete Zeitraster. Dann haben wir $\ell := 2 \cdot 2^M$ Ausgangsdaten $a_{0,k} = \langle f, \phi_{0,k} \rangle$. Man kann $a_{0,k}$ als Mittelwert von f über das Intervall $I_{0,k} := [k, k+1[$ interpretieren oder kurzer Hand als „gemessenen Funktionswert“ $f(k)$ betrachten. Jedenfalls gehen wir im weiteren davon aus, dass

$$P_0 f = \sum_k a_{0,k} \phi_{0,k} \in V_0$$

die Orthogonalprojektion von f in den Raum V_0 darstellt.

Wir beschreiben nun allgemein den Schritt $r-1 \rightsquigarrow r$ zur jeweils *nächstgrößeren* Skala. Ist

$$P_{r-1} f = \sum_k a_{r-1,k} \phi_{r-1,k} \in V_{r-1}$$

gegeben, so gibt es eine aus (9) fließende orthogonale Zerlegung

$$P_{r-1} f = P_r f + Q_r f$$

mit

$$P_r f = \sum_k a_{r,k} \phi_{r,k} \in V_r \quad \text{und} \quad Q_r f \in W_r .$$

Entscheidend ist nun, dass sich die neuen Koeffizienten $a_{r,k}$ leicht aus den vorangehenden Koeffizienten $a_{r-1,k}$ berechnen lassen. Auf Grund der Skalierungsgleichung (8) (bzw. der entsprechenden Identität auf Stufe r) hat man nämlich

$$a_{r,n} = \langle f, \phi_{r,n} \rangle = \sum_k \overline{h_k} \langle f, \phi_{r-1,2n+k} \rangle = \sum_k \overline{h_k} a_{r-1,2n+k} ,$$

und eine analoge Rechnung liefert die Wavelet-Koeffizienten

$$c_{r,n} = \sum_k \overline{g_k} a_{r-1,2n+k} .$$

Die $a_{r-1,k}$ sind Mittelwerte von f über Intervalle $I_{r-1,k}$ der Länge 2^{r-1} , die $a_{r,k}$ Mittelwerte von f über Intervalle der doppelten Länge 2^r . Da f ausserhalb des Intervalls $[-2^M, 2^M]$ identisch verschwindet, wird somit die effektive Länge des Datenvektors \mathbf{a}_r mit jedem Schritt halbiert. Die erhaltenen Wavelet-Koeffizienten $c_{r,k}$ werden laufend abgespeichert, während von dem ursprünglichen Datenvektor \mathbf{a}_0 am Schluss nur noch eine einzige Zahl, das Mittel von f „über alles“, übrigbleibt. Die totale Anzahl Operationen dieses rekursiven Prozesses ist von der Grössenordnung $O(\text{length}(\mathbf{h}) \cdot \ell)$, sie wächst also *linear* mit der Anzahl $\ell = \text{length}(\mathbf{a}_0)$ der Inputdaten.

Für die Synthese von f aus dessen Wavelet-Koeffizienten $c_{r,k}$ gelten ähnliche Formeln.

7. Daubechies-Wavelets

Damit verbleibt als mathematisches Kernproblem die Frage: Wie verschafft man sich eine Skalierungsfunktion ϕ bzw. den Koeffizientenvektor \mathbf{h} ? Hierfür gibt es verschiedene Ansätze. Am berühmtesten sind die **orthonormierten Wavelets mit kompaktem Träger** von *Ingrid Daubechies* (1988). Es handelt sich hier um den spannendsten Teil der Theorie. Ich will zum Schluss kurz darauf eingehen, aber alle Details beiseitelassen.

Die Hauptarbeit findet im „Fourier-Bereich“ statt, das heisst, man betrachtet von allen interessierenden Objekten die Fourier-Transformierte. Mit Hilfe des (noch unbekanntes) Koeffizientenvektors \mathbf{h} bildet man zunächst rein formal die „erzeugende Funktion“

$$H(\xi) := \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_k h_k e^{-ik\xi} .$$

Damit lässt sich die Skalierungsgleichung (8), eine Art Faltungsgleichung, in der Form

$$\widehat{\phi}(\xi) = H\left(\frac{\xi}{2}\right) \widehat{\phi}\left(\frac{\xi}{2}\right)$$

schreiben, und indem man den Übergang $\xi \rightsquigarrow \xi/2$ iteriert, kommt man auf

$$\widehat{\phi}(\xi) = \prod_{j=1}^{\infty} H\left(\frac{\xi}{2^j}\right) \cdot \widehat{\phi}(0) . \quad (13)$$

Wegen $\widehat{\phi}(0) = 1/\sqrt{2\pi}$ ist somit ϕ durch den Koeffizientenvektor \mathbf{h} eindeutig bestimmt. Aus (12) wird im Fourier-Bereich

$$\widehat{\psi}(\xi) = e^{i\xi/2} \overline{H\left(\frac{\xi}{2} + \pi\right)} \widehat{\phi}\left(\frac{\xi}{2}\right) ,$$

so dass wir dann auch im Besitz des Mutter-Wavelets ψ sind.

Damit sowohl die translatierten Kopien $\phi_{0,k}$ wie die Kopien $\psi_{0,k}$ ($k \in \mathbb{Z}$) orthonormiert sind, müssen die Koeffizienten h_k gewissen Konsistenzbedingungen genügen. Diese Bedingungen laufen auf die Identität

$$|H(\omega)|^2 + |H(\omega + \pi)|^2 \equiv 1 \quad (14)$$

für die erzeugende Funktion H hinaus. Nun wünschen wir uns ja ϕ und ψ mit kompaktem Träger. Dann dürfen aber nur endlich viele $h_k \neq 0$ sein. In anderen Worten: Die erzeugende Funktion H muss ein trigonometrisches Polynom sein, das der Identität (14) genügt. Die Bestimmung derartiger Polynome ist eine algebraische Aufgabe. Es ergeben sich h_k -Tabellen, je eine für jeden Grad $2N - 1$.

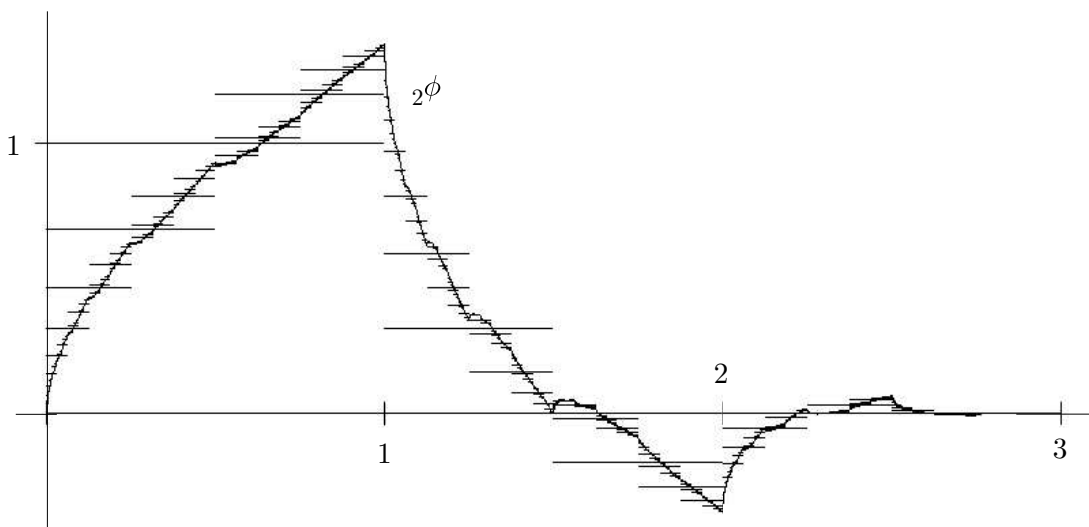


Abb. 6 Die Daubechies-Skalierungsfunktion ${}_2\phi$

Für die Signalverarbeitung genügt das, aber man möchte doch wissen, wie denn die zugehörigen Skalierungsfunktionen bzw. Mutter-Wavelets aussehen. Und da gibt es ganz zum Schluss eine grosse Überraschung: Es handelt sich um Kurven mit einem „fraktalen“ Charakter (Abb. 8). Wie kann man sie auf dem Computer zum Vorschein bringen? Nun, die Skalierungsfunktion ϕ lässt sich gemäss (8) als Fixpunkt der Transformation

$$S : f \mapsto Sf, \quad Sf(t) := \sqrt{2} \sum_{k=0}^{2N-1} h_k f(2t - k)$$

auffassen. Der folgende Iterationsprozess liefert daher immer bessere Approximationen an das gesuchte ϕ : Man wählt eine geeignete Startfunktion f_0 und wiederholt $f_{n+1} := Sf_n$ ($n \geq 0$) so lange, bis sich nichts mehr verändert. In der Abb. 6 sind die approximierenden f_n noch zu sehen.

6. Schluss

Wozu das alles? Wavelets sind von mathematisch versierten Anwendern erfunden und vervollkommen worden. Innerhalb der Mathematik, etwa für die analytische Behandlung von partiellen Differentialgleichungen und zur Darstellung von exakten Lösungen haben sie kaum Verwendung gefunden. Hauptgründe ihres Erfolges in der Signal- und Bildverarbeitung sind erstens die schnellen Algorithmen, wie oben beschrieben, und zweitens die Einladung zur Datenkompression. Wohl ist $\text{length}(c_{r,k}|r, k)$ ungefähr gleich der Inputlänge ℓ , so dass nichts gewonnen scheint, aber: Sehr viele $|c_{r,k}|$ sind $\ll 1$, je nach den in f vorhandenen Frequenzanteilen in den verschiedenen t -Bereichen. Nun wird kurzer Prozess gemacht: Alle $c_{r,k}$, die eine gewisse Schranke unterschreiten, werden auf 0 gesetzt und nicht abgespeichert. Trotzdem lässt sich das Ausgangssignal ohne merkbaren Qualitätsverlust aus den komprimierten Daten wiederherstellen. Die Bildfolge „Lena“ legt hierfür beredtes Zeugnis ab.

Einführende Literatur über Wavelets

Barbara B. Hubbard: *The world according to wavelets*. A K Peters 1996.

C. Sidney Burrus et al.: *Wavelets and wavelet transforms — A primer*. Prentice Hall 1998.

Robert S. Strichartz: *How to make wavelets*. Amer. Math. Monthly **100** (1993), 539–556.

Christian Blatter: *Wavelets — Eine Einführung*. Vieweg (1998) 2003.

Der Klassiker

Ingrid Daubechies: *Ten lectures on wavelets*. SIAM 1992.

Christian Blatter

Albertus-Walder-Weg 16

CH-8606 Greifensee (Schweiz)

e-mail: christian.blatter@math.ethz.ch