

1

Komplexe Funktionen

1.1 Komplexe Zahlen, erneut

Die komplexen Zahlen wurden bereits im ersten Semester eingeführt. Es ist vielleicht keine schlechte Idee, wenn der Leser die betreffenden Seiten in seinem Lehrbuch nocheinmal durchgeht, denn wir werden uns hier bei den schon bekannten Sachen etwas kürzer fassen.

Der Körper \mathbb{C} der komplexen Zahlen läßt sich folgendermaßen charakterisieren:

- (a) \mathbb{C} ist ein Körper; die Elemente z von \mathbb{C} heißen **komplexe Zahlen**.
- (b) $\mathbb{C} \supset \mathbb{R}$ (als Körper).
- (c) In \mathbb{C} gibt es zwei Lösungen i und $-i$ der Gleichung $z^2 + 1 = 0$.
- (d) Jede komplexe Zahl z läßt sich auf genau eine Weise darstellen in der Form

$$z = x + iy, \quad x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}.$$

Aus (d) folgt, daß \mathbb{C} in bijektiver (altmodisch: eineindeutiger) Weise auf die (x, y) -Ebene \mathbb{R}^2 bezogen ist vermöge

$$x + iy \leftrightarrow (x, y). \quad (1)$$

Bei dieser Identifikation von \mathbb{C} mit \mathbb{R}^2 entspricht den reellen komplexen Zahlen $z = x + 0y$ die x -Achse, letztere heißt daher **reelle Achse**. Auf der y -Achse liegen die **rein imaginären Zahlen** $z = 0 + iy$, sie heißt daher **imaginäre Achse**.

Für zwei beliebige Zahlen $z = x + iy$, $z' = x' + iy'$ hat man

$$z + z' = x + x' + i(y + y'),$$

was geometrisch auf die vektorielle Addition der betreffenden Punkte in der Zahlenebene hinausläuft. Weiter ist

$$\begin{aligned} z' \cdot z &= (x' + iy') \cdot (x + iy) \\ &= x'x + x'iy + iy'x + iy'iy \end{aligned}$$

und somit wegen $i^2 = -1$:

$$z' \cdot z = x'x - y'y + i(x'y + y'x). \quad (2)$$

Ist hier speziell $z := a \in \mathbb{R}$ eine reelle komplexe Zahl, so gilt

$$az = ax + iay,$$

das heißt: Der Multiplikation einer Zahl $z \in \mathbb{C}$ mit einem $a \in \mathbb{R}$ entspricht geometrisch die Streckung des Vektors z mit dem Skalarfaktor a .

Zusammengefaßt: \mathbb{C} ist (auch) ein zweidimensionaler Vektorraum über \mathbb{R} und als solcher vermöge (1) isomorph zu \mathbb{R}^2 .

Vor allem aber ist \mathbb{C} ein Körper. Das heißt, beliebige $z \in \mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ besitzen einen Kehrwert $\frac{1}{z} \in \mathbb{C}^*$; der bekannte “Erweiterungstrick” liefert

$$\frac{1}{x + iy} = \frac{x}{x^2 + y^2} + i \frac{-y}{x^2 + y^2}.$$

Der Körper \mathbb{C} ist, im Gegensatz zu \mathbb{R} , nicht geordnet; eine Ungleichung $z_1 < z_2$ macht also ohne weitere Annahmen über z_1 und z_2 keinen Sinn. Folgende Vereinbarung hat sich bewährt: Eine Formel wie zum Beispiel “ $z \leq 0$ ” ist zu lesen als “ z ist reell und ≤ 0 ”. In diesem Sinn beschreibt dann $a \leq z \leq b$ das Intervall $[a, b]$ auf der reellen Achse.

Die Gleichung $z^2 + 1 = 0$, die die Zahl i “definiert”, besitzt die beiden Lösungen i und $-i$. Das hat letzten Endes zur Folge, daß die Körperstruktur von \mathbb{C} bezüglich der “Spiegelung” $i \mapsto -i$ symmetrisch ist. Ist $z = x + iy$, so heißt

$$\bar{z} := x - iy$$

die zu z **konjugiert komplexe** Zahl. Die Punkte z und \bar{z} liegen spiegelbildlich zur reellen Achse.

Wir erinnern an die folgenden Rechenregeln:

$$\begin{aligned}x &= \operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2}, & y &= \operatorname{Im} z = \frac{z - \bar{z}}{2i}; \\z \in \mathbb{R} &\iff z = \bar{z}; & \bar{\bar{z}} &= z; \\ \overline{z_1 + z_2} &= \bar{z}_1 + \bar{z}_2, & \overline{z_1 \cdot z_2} &= \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2, & \overline{1/z} &= 1/\bar{z}.\end{aligned}$$

Die Größe

$$|z| := \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

heißt **(absoluter) Betrag** (englisch auch: *modulus*) von z . Für den Betrag gelten folgende Rechenregeln:

$$\begin{aligned}|z \cdot z'| &= |z| \cdot |z'|, \\z \in \mathbb{R} &\implies |z|_{\mathbb{C}} = |z|_{\mathbb{R}}, \\|\operatorname{Re} z| &\leq |z|, \quad |\operatorname{Im} z| \leq |z|, \\|z + z'| &\leq |z| + |z'|.\end{aligned}$$

In der Ebene \mathbb{R}^2 stehen uns bekanntlich neben den kartesischen Koordinaten x, y noch die Polarkoordinaten r, ϕ zur Verfügung. Dabei bezeichnet $r := \sqrt{x^2 + y^2}$ den Abstand des Punktes (x, y) vom Ursprung, und ϕ ist der Winkel, um den man den Vektor $(r, 0)$ im Gegenuhrzeigersinn drehen muss, bis er mit dem Vektor (x, y) zusammenfällt, siehe die Fig. 1.1.1. Auf Grund der “geometrischen Definition” von Cosinus und Sinus gilt dann

$$x = r \cos \phi, \quad y = r \sin \phi. \quad (3)$$

Der **Polarwinkel** (das “Argument”, s.u.) ϕ ist durch den Punkt (x, y) nur bis auf additive ganzzahlige Vielfache von 2π definiert und für den Punkt $(0, 0)$ undefiniert. Bis jetzt (d.h. in der Analysis I+II) hat uns dieser Umstand eigentlich nicht sehr gestört, und wir konnten uns immer irgendwie darum herumogeln. In der komplexen Analysis wird aber die Mehrdeutigkeit des Arguments ein absolut zentraler Sachverhalt, und wir müssen uns genauer damit befassen.

Unter dem **Argument** $\arg(x, y)$ des Punktes $(x, y) \neq (0, 0)$ verstehen wir die Menge aller $\phi \in \mathbb{R}$, für die (3) gilt. Ist ϕ ein beliebiges Element dieser Menge oder, wie man auch sagt, ein beliebiger **Repräsentant** von $\arg(x, y)$, so gilt

$$\arg(x, y) = \{\phi + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} =: \{\phi\}. \quad (4)$$

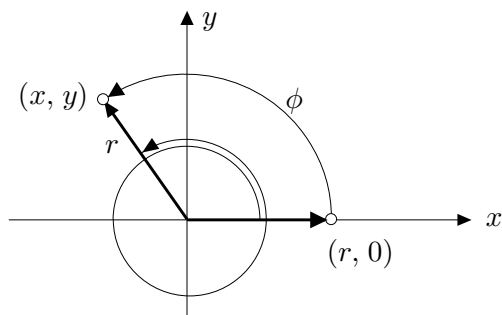


Fig. 1.1.1

Das bis dahin Gesagte lässt sich in dem folgenden Prinzip zusammenfassen:

$$\begin{cases} x = r \cos \phi \\ y = r \sin \phi \end{cases} \iff \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \phi \in \arg(x, y) \end{cases} . \quad (5)$$

Um nun die Polarkoordinaten in die komplexe Analysis einzubringen, müssen wir in (5) die reellen Variablen x und y durch die komplexe Variable $z := x + iy$ ausdrücken. Wir definieren natürlich $\arg z := \arg(x, y)$, ferner ist $\sqrt{x^2 + y^2} = |z|$. Damit geht (5) über in

$$z = r (\cos \phi + i \sin \phi) \iff \begin{cases} r = |z| \\ \phi \in \arg z \end{cases} . \quad (6)$$

Wir sind aber noch nicht ganz fertig: Mit Hilfe der Eulerschen Formel

$$\cos \phi + i \sin \phi = e^{i\phi} \quad (\phi \in \mathbb{R})$$

lässt sich die linke Seite von (6) vereinfachen zu $z = r e^{i\phi}$. Diese **Polar-darstellung** einer komplexen Zahl $z \in \mathbb{C}^*$ lässt sich gemäss (6) wie folgt charakterisieren:

$$z = r e^{i\phi}, \quad r > 0, \phi \in \mathbb{R} \iff \begin{cases} r = |z| \\ \phi \in \arg z \end{cases} . \quad (7)$$

Für zwei Zahlen $z = r e^{i\phi}$, $z' = r' e^{i\phi'} \in \mathbb{C}^*$ hat man auf Grund der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion (bzw. der Additionstheoreme von Cosinus und Sinus)

$$z z' = r r' e^{i(\phi + \phi')} .$$

Nach dem Prinzip (7) ist hiernach $\phi + \phi' \in \arg(z z')$, in anderen Worten: Bei der Multiplikation von komplexen Zahlen [multiplizieren sich die Beträge und] addieren sich die Argumente. Die folgende Gleichung drückt diesen Sachverhalt korrekt aus:

$$\arg(z z') = \arg z + \arg z' \quad (z, z' \in \mathbb{C}^*); \quad (8)$$

dabei ist die Summe von zwei Mengen (4) sinngemäss definiert und wieder eine Menge dieser Art.

Trotz des hier Gesagten werden wir uns immer wieder erlauben, $\arg z = \phi$, zum Beispiel $\arg z = \frac{2\pi}{3}$, zu schreiben, wenn eigentlich $\arg z = \{\phi\}$ oder $\phi \in \arg z$ gemeint ist.

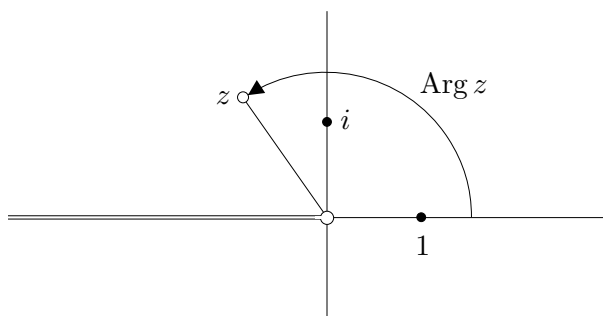


Fig. 1.1.2

Es ist unmöglich, einen auf ganz \mathbb{C}^* stetigen Repräsentanten des Arguments auszuwählen, der dann als “Standardargument” dienen könnte: Immer gibt es irgendwo einen Sprung von 2π . Die folgende Maßnahme liefert einen Ausweg aus diesem Dilemma: Man schneidet die negative reelle Achse aus der komplexen Ebene heraus; das heißt, man bildet die Menge

$$\mathbb{C}^{-*} := \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{R} \mid z \leq 0\}.$$

Auf dieser **ingeschnittenen Ebene** (Fig. 1.1.2) lässt sich nun durch die Zusatzbedingung $-\pi < \phi < \pi$ ein stetiger Repräsentant des Arguments festlegen. Die so entstehende Funktion

$$\text{Arg} : \mathbb{C}^{-*} \rightarrow]-\pi, \pi[, \quad z \mapsto \arg z \cap]-\pi, \pi[$$

heißt **Hauptwert des Arguments**. Man hat $\text{Arg } \bar{z} = -\text{Arg } z$, und auf der positiven reellen Achse ist $\text{Arg } z = 0$. Die Funktionalgleichung (8) ist für den Hauptwert des Arguments nicht mehr allgemein richtig.

Bsp: $\text{Arg } i = \frac{\pi}{2}$, aber $\text{Arg } (i^4) = \text{Arg } 1 = 0 \neq 4 \cdot \frac{\pi}{2}$.

1.2 Die Riemannsche Zahlenkugel

In der reellen Analysis hat es sich bewährt, die reelle Achse \mathbb{R} durch Hinzufügung der beiden uneigentlichen Punkte $-\infty$ und ∞ , wie man sagt: abzuschliessen zu der Menge $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, genannt **abgeschlossene reelle Achse**. Die beiden Punkte $\pm\infty$ sind keine Zahlen, mit denen man rechnen kann; aber Formeln wie

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-t} = 0, \quad \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} = \infty, \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2} dt = \sqrt{2\pi}$$

machen einen präzisen Sinn.

In \mathbb{C} kann man [nicht nur in zwei, sondern] in allen Richtungen ins Unendliche gehen, so dass es zunächst den Anschein macht, eine Abschliessung von \mathbb{C} erfordere die Hinzufügung von unendlich vielen “unendlichfernen” Punkten. In Wirklichkeit ist es viel einfacher: Für die Zwecke der komplexen Analysis genügt ein einziger Punkt ∞ . Die Menge

$$\overline{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

heißt **abgeschlossene komplexe Ebene** oder **Riemannsche Zahlenkugel**. Man kann es sich so vorstellen: Ein grosses rundes Tuch wird entlang seinem Rand aufgenommen und zu einem Sack zusammengebunden. Es entsteht eine 2-Sphäre, die das Innere des Sacks umschliesst.

Eine konkrete Realisierung von $\overline{\mathbb{C}}$ als “Zahlenkugel” erhält man mit Hilfe der sogenannten **stereographischen Projektion** der abgeschlossenen z -Ebene auf die Sphäre

$$S^2 := \{ \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \} \subset \mathbb{R}^3 .$$

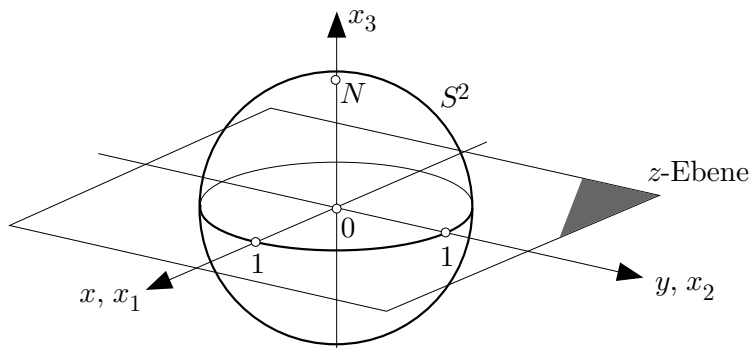


Fig. 1.2.1

Dabei denkt man sich die komplexe z -Ebene, $z = x + iy$, so in den (x_1, x_2, x_3) -Raum \mathbb{R}^3 eingebettet (siehe die Fig. 1.2.1), dass die x -Achse mit der x_1 -Achse und die y -Achse mit der x_2 -Achse des \mathbb{R}^3 zusammenfallen. Wird nun die z -Ebene vom Nordpol $N = (0, 0, 1)$ aus nach S^2 projiziert, so erhält man schon eine bijektive Abbildung $\sigma: \mathbb{C} \rightarrow S^2 \setminus \{N\}$. Die Figur 1.2.2 legt unmittelbar nahe, zusätzlich $\sigma(\infty) := N$ zu setzen. In dieser Weise hat man insgesamt eine bijektive Abbildung

$$\sigma: \overline{\mathbb{C}} \rightarrow S^2 \quad z \mapsto \mathbf{x} := \sigma(z)$$

definiert. Wer will, kann nun jeden Punkt $\mathbf{x} \in S^2$ mit der zugehörigen komplexen Zahl z beschriften, womit er eine richtiggehende ‐Zahlenkugel‐ erhält.

‐Typische‐ Umgebungen des Punkts ∞ sind Mengen $U \subset \mathbb{C}$, ev. $U \subset \overline{\mathbb{C}}$, der Form

$$U = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > M\} \quad (\text{ev. } \infty \text{ hinzunehmen}) \quad (1)$$

Eine Folge $z. := (z_k)_{k \geq 0}$ von komplexen Zahlen **konvergiert gegen** ∞ , in Zeichen: $\lim_{k \rightarrow \infty} z_k = \infty$, wenn die Beträge $|z_k|$ im Sinn der reellen Analysis mit $k \rightarrow \infty$ gegen $+\infty$ konvergieren (pro memoria: das heisst, wenn es zu jedem $M > 0$ ein k_0 gibt mit $|z_k| > M$ für alle $k > k_0$). Die Argumente der z_k fallen dabei ganz ausser Betracht.

$$\text{Bsp: } \lim_{k \rightarrow \infty} \log k e^{ik^2} = \infty, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} (4 - 3i)^k = \infty.$$

Aus diesen Vorstellungen lassen sich die beiden folgenden Definitionen (a) und (b) destillieren:

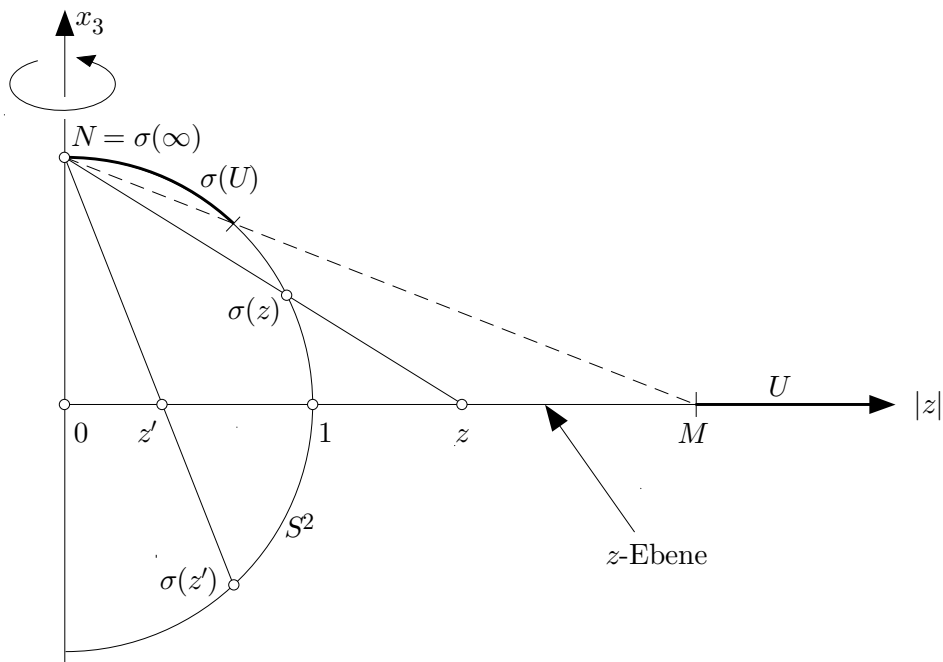


Fig. 1.2.2

(a) Der Sachverhalt $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = p$ liegt genau dann vor, wenn sich erstens $\text{dom}(f)$ "ins Unendliche erstreckt", das heisst: jede Umgebung (1) schneidet, und wenn zweitens $|f(z) - p| < \varepsilon$ (oder eine ähnliche Toleranzbedingung) garantiert ist, sobald $|z|$ hinreichend gross gewählt wird. Auf $\arg z$ darf es dabei nicht ankommen.

Bsp: $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{z} = 0$. — Der $\lim_{z \rightarrow \infty} \exp(z)$ existiert nicht, denn für beliebig grosse $|t|$ nimmt $\exp(it)$ noch alle möglichen Werte auf S^1 an.

(b) Für eine komplexwertige Funktion f einer beliebigen Variablen x ist der Sachverhalt

$$\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = \infty \in \overline{\mathbb{C}}$$

mit der uneigentlichen reellen Konvergenz $\lim_{x \rightarrow \xi} |f(x)| = \infty$ äquivalent.

Bsp: Es gilt $\lim_{z \rightarrow 0} (1/z) = \infty$, anders als im Reellen: $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1/x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} (1/x) = -\infty$. — Für festes $c \in \mathbb{C}$ ist $\lim_{z \rightarrow \infty} (z + c) = \infty$, und für festes $a \in \mathbb{C}^*$ ist $\lim_{z \rightarrow \infty} a z = \infty$.

① Durch

$$I: \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}, \quad I(z) := \begin{cases} 1/z & (z \in \mathbb{C}^*) \\ \infty & (z = 0) \\ 0 & (z = \infty) \end{cases}$$

wird eine bijektive und stetige Abbildung der Zahlenkugel auf sich selbst definiert. Wegen $I^{-1} = I$ ist diese Abbildung in beiden Richtungen stetig.

Für gegebenes $c \in \mathbb{C}$ wird durch

$$T_c: \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}, \quad T_c(z) := \begin{cases} z + c & (z \in \mathbb{C}) \\ \infty & (z = \infty) \end{cases}$$

eine bijektive und stetige Abbildung der Zahlenkugel auf sich selbst definiert. Wegen $T_c^{-1} = T_{-c}$ ist auch diese Abbildung in beiden Richtungen stetig.

Dasselbe trifft zu für die Streckung

$$S_a: \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}, \quad S_a(z) := \begin{cases} az & (z \in \mathbb{C}) \\ \infty & (z = \infty) \end{cases};$$

dabei ist hier $a \in \mathbb{C}^*$ vorausgesetzt. Die Stetigkeit der Umkehrabbildung ergibt sich aus $S_a^{-1} = S_{1/a}$.

Wir werden auf die Abbildungen I , T_c und S_a und ihre Zusammensetzungen zurückkommen. ○

② Wir betrachten eine rationale Funktion

$$R(z) = \frac{p(z)}{q(z)} = a \frac{z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0}{z^m + b_{m-1}z^{m-1} + \dots + b_0}.$$

Wir wollen dabei annehmen, dass $R(\cdot)$ keine Konstante ist; das heisst, es gilt von vorneherein $a \neq 0$ und $\max\{n, m\} \geq 1$. Ferner dürfen wir davon ausgehen, dass $p(\cdot)$ und $q(\cdot)$ keine gemeinsamen Nullstellen haben. Eine derartige Funktion lässt sich in natürlicher Weise zu einer stetigen Abbildung $R: \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ erweitern:

Für $z \neq 0$ gilt

$$R(z) = a z^{n-m} \frac{1 + a_{n-1}/z + \dots + a_0/z^n}{1 + b_{m-1}/z + \dots + b_0/z^m}.$$

Hier strebt der grosse Bruch rechter Hand mit $z \rightarrow \infty$ gegen 1. Wegen $a \neq 0$ ist

$$\lim_{z \rightarrow \infty} R(z) = \begin{cases} \infty & (n > m) \\ a & (n = m) \\ 0 & (n < m) \end{cases},$$

und mit der entsprechenden Festlegung von $R(\infty)$ ist R stetig in den Punkt ∞ hinein fortgesetzt.

Es sei weiter $\alpha \in \mathbb{C}$ eine r -fache Nullstelle, $r \geq 1$, des Nennerpolynoms $q(\cdot)$. Dann ist R an der Stelle α zunächst undefiniert. Wir schreiben R in der Form

$$R(z) = \frac{1}{(z - \alpha)^r} R_1(z), \quad (2)$$

wobei nun die rationale Funktion $R_1(\cdot)$ an der Stelle α stetig ist und dort einen Wert $\neq 0$ annimmt. Folglich gilt in einer geeigneten Umgebung U von α eine Abschätzung der Form

$$|R_1(z)| \geq \delta > 0 \quad (z \in U),$$

und mit (2) ergibt sich $\lim_{z \rightarrow \alpha} R(z) = \infty$. Durch die Festlegung $R(\alpha) := \infty$ wird daher die gegebene rationale Funktion R stetig in den Punkt α hinein fortgesetzt.

Man kann zeigen, dass die in dieser Weise erhaltene Abbildung $R: \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ jeden Wert $c \in \overline{\mathbb{C}}$ genau $\max\{n, m\}$ mal annimmt. \circ

Bezüglich ∞ treffen wir hier die folgende Vereinbarung: Unter einer “komplexen Zahl” verstehen wir weiterhin ein Element von \mathbb{C} , und “Konvergenz” bedeutet Konvergenz gegen einen endlichen Wert. Wenn irgendwo ∞ als Grenzwert oder gar als Funktionswert oder als Punkt des Definitionsbereichs zugelassen ist, so wird das an der betreffenden Stelle ausdrücklich gesagt.

1.3 Komplexwertige Funktionen

Definitionsgemäss ist eine **Funktion** oder **Abbildung**

$$f: A \rightarrow B, \quad x \mapsto y := f(x)$$

eine Vorschrift, die für jeden Punkt $x \in A$ einen Punkt $y \in B$ festlegt. Dieses y heisst, je nachdem, **Funktionswert** an der Stelle x oder **Bildpunkt** von x . Stellt man sich dabei eher vor, dass der jeweilige Wert $f(x)$ in den Punkten $x \in A$ angeschrieben oder “nach oben abgetragen” wird, so spricht man

von einer **Funktion** oder einem **Skalarfeld**; will man aber suggerieren, dass die Punkte $x \in A$ durch f an die zugehörige Stelle $f(x) \in B$ transportiert werden, so spricht man von einer **Abbildung**. Der betrachtete Punkt x in A ist dann das (bzw. ein) **Urbild** des Punktes $y = f(x)$.

In der Analysis I+II haben wir beide Interpretationen angetroffen; dies wird auch in der Komplexen Analysis der Fall sein.

1.3.1. Zeitsignale

Funktionen

$$x(\cdot) : \mathbb{R} \curvearrowright \mathbb{R}, \quad t \mapsto x := x(t)$$

werden typischer Weise dazu gebraucht, die Veränderungen von physikalischen Grössen x (Position eines Massenpunktes, Druck, Stromstärke, usw.) in ihrem zeitlichen Ablauf zu modellieren. Solche Grössen sind ihrer Natur nach im allgemeinen reellwertig oder lassen sich als Vektoren in einem \mathbb{R}^n begreifen.

Trotzdem ist es in vielen Fällen von Vorteil, im Universum der Funktionen $f: \mathbb{R} \curvearrowright \mathbb{C}$ zu argumentieren oder gesuchte Funktionen $x(\cdot)$ von vorneherein als komplexwertig anzusetzen. Diese grosszügige Einstellung hat sich zum Beispiel bei [Systemen von] linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten sehr bezahlt gemacht. Ein anderes Beispiel sind die sogenannten Fourier-Reihen

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)) . \quad (1)$$

Deren theoretische Behandlung und dann auch die Formeln werden durch den Übergang zur komplexen Schreibweise

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt}$$

wesentlich vereinfacht. Bei dieser Gelegenheit soll nicht unerwähnt bleiben, dass Computer-Applikationen wie Maple, Mathematica oder Matlab den Datentyp “komplexe Zahl” verinnerlicht haben und mit Selbstverständlichkeit komplex rechnen. Eine komplexe Zahl ist in diesen Systemen *ein* Objekt und nicht ein Zwillingpaar von Real- und Imaginärteil. Dementsprechend werden dort komplexe Fourier-Koeffizienten c_k berechnet und nicht die reellen a_k und b_k der Formel (1).

Wie komplexwertige Lösungen eines reellen Ausgangsproblems, etwa einer Differentialgleichung mit reellen Koeffizienten, physikalisch zu interpretieren sind, ist im Einzelfall auszumachen. Oft ist die Sache so angelegt, dass der Realteil der erhaltenen Lösung die gemeinte physikalische Grösse modelliert, während der Imaginärteil kurzer Hand weggeworfen wird.

Eine auf ganz \mathbb{R} definierte Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, bei der die unabhängige Variable als *Zeit* interpretiert wird, nennen wir im weiteren ein **Zeitsignal**. Hinsichtlich der graphischen Darstellung eines solchen f gilt es folgendes zu bedenken: Der Graph eines Zeitsignals ist eine ‐Weltlinie‐ im dreidimensionalen Raum $\mathbb{R} \times \mathbb{C}$. Auf dem zweidimensionalen Zeichenblatt kann man nur den Graphen von $\operatorname{Re} f$, allenfalls zusammen mit demjenigen von $\operatorname{Im} f$, zur Darstellung bringen. Zuweilen lässt sich $|f|$ (oder $|f|^2$) physikalisch als eine Art Intensität interpretieren, und da macht es durchaus Sinn, die komplexwertige Funktion f durch den Graphen von $|f|$ zu repräsentieren.

Bsp: In der Fig. 1.3.1 ist die Funktion $f(t) := (e^{3it} - \frac{1}{3})e^{-t^2/2}$ dargestellt.

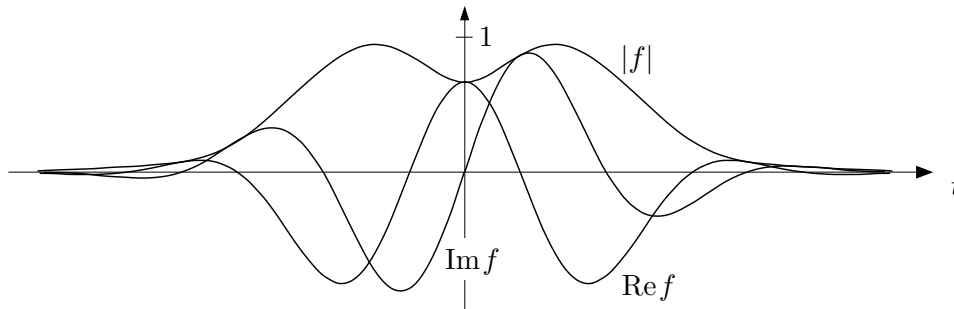


Fig. 1.3.1

Ist

$$f(t) = u(t) + iv(t)$$

die Zerlegung der komplexwertigen Funktion f in Real- und Imaginärteil, so gilt natürlich

$$f'(t) = u'(t) + iv'(t), \quad \int_a^b f(t) dt = \int_a^b u(t) dt + i \int_a^b v(t) dt .$$

Das sind nicht etwa Definitionen, sondern hier steht linker Hand der Grenzwert eines komplexen Differenzenquotienten bzw. der Grenzwert von komplexen Riemannschen Summen $\sum_{k=1}^N f(\tau_k)(t_k - t_{k-1})$. In diesem Zusammenhang weisen wir noch auf das folgende Prinzip hin: Die üblichen Ableitungs-

und Integrationsregeln für Funktionsterme gelten auch, wenn die darin vorkommenden Konstanten komplex sind — unter einer Bedingung: Logarithmen und Potenzen mit nichtganzen Exponenten dürfen nur von positiven reellen Zahlen genommen werden.

$$\text{Bsp} \quad \int_{-1}^1 \frac{dt}{(1+it)^2} = \frac{1}{i} \frac{-1}{1+it} \Big|_{-1}^1 = \frac{1}{i} \left(\frac{1}{1-i} - \frac{1}{1+i} \right) = 2 .$$

① Wir beweisen zur Übung die Regel

$$\frac{d}{dt} e^{f(t)} = f'(t) e^{f(t)} .$$

(Hier geht es nicht nur um “komplexe Koeffizienten”, sondern um die “komplexe Exponentialfunktion” im eigentlichen Sinn.)

□ Die Hilfsfunktion

$$p(z) := \begin{cases} \frac{e^z - 1}{z} & (z \neq 0) \\ 1 & (z = 0) \end{cases}$$

ist im Ursprung stetig, und für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$e^z - 1 = z p(z) .$$

Wir können daher schreiben:

$$e^{f(t)} - e^{f(t_0)} = (e^{f(t)-f(t_0)} - 1) e^{f(t_0)} = (f(t) - f(t_0)) p(f(t) - f(t_0)) e^{f(t_0)} ,$$

und Division mit $t - t_0$ ($\neq 0$) liefert

$$\frac{e^{f(t)} - e^{f(t_0)}}{t - t_0} = \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} p(f(t) - f(t_0)) e^{f(t_0)} .$$

Führt man hier den Grenzübergang $t \rightarrow t_0$ durch, so ergibt sich wegen $\lim_{z \rightarrow 0} p(z) = 1$ die Behauptung. □

Von Zeitsignalen und ihren Metamorphosen handeln in erster Linie die Kapitel 6 und 8 dieser Vorlesung.

1.3.2. Kurven in der komplexen Ebene

Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, zum Beispiel $I := [a, b]$. Eine Funktion

$$z(\cdot) : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}, \quad t \mapsto z(t) \quad (= x(t) + iy(t)) \quad (2)$$

lässt sich auch als Abbildung dieses Intervalls I in die komplexe z -Ebene auffassen. Für jedes $t \in I$ produziert $z(\cdot)$ einen Punkt $z(t) \in \mathbb{C}$, und die so erhaltenen Punkte bilden in aller Regel eine Kurve γ . Um die Sache nicht unnötig zu komplizieren, gehen wir in den nachfolgenden Betrachtungen davon aus, dass (2) “im wesentlichen” injektiv ist.

Bekanntlich nennt man (2) eine **Parameterdarstellung** der Kurve γ . Diese Darstellung produziert aber nicht nur eine Punktmenge, sondern, die so beschriebene Kurve hat auch einen **Richtungssinn**: Sie wird in Richtung wachsender t durchlaufen; $z(a)$ ist der **Anfangspunkt** und $z(b)$ ist der **Endpunkt** von γ . Aus diesem Grund werden wir im folgenden nur Parametertransformationen

$$t := \psi(t') \quad (a' \leq t' \leq b')$$

zulassen, die wachsende t durch wachsende t' ersetzen, d.h. selbst streng monoton wachsen.

Vektoriell geschrieben sieht (2) folgendermassen aus:

$$\mathbf{z}(\cdot) : I \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \mathbf{z}(t) = (x(t), y(t)) .$$

Betrachte ein festes $t_0 \in I$. Ist $\mathbf{z}'(t_0) \neq \mathbf{0}$, so hat der Vektor $\mathbf{z}'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0))$ die Richtung der Tangente an γ im Punkt $\mathbf{z}(t_0)$; ferner gilt für t in der Umgebung von t_0 die Näherung

$$\mathbf{z}(t) - \mathbf{z}(t_0) \doteq \mathbf{z}'(t_0) (t - t_0)$$

oder, um genau zu sein:

$$\mathbf{z}(t) - \mathbf{z}(t_0) = \mathbf{z}'(t_0) (t - t_0) + o(t - t_0) \quad (t \rightarrow t_0) .$$

Bezogen auf die komplexe Darstellung (2) können wir daher folgendes notieren: Ist $z'(t_0) \neq 0$, so zeigt der Vektor $z'(t_0) = x'(t_0) + iy'(t_0)$ in die Richtung der Kurventangente im Punkt $z(t_0)$, und es gilt die o -Aussage

$$z(t) - z(t_0) = z'(t_0) (t - t_0) + o(t - t_0) \quad (t \rightarrow t_0) .$$

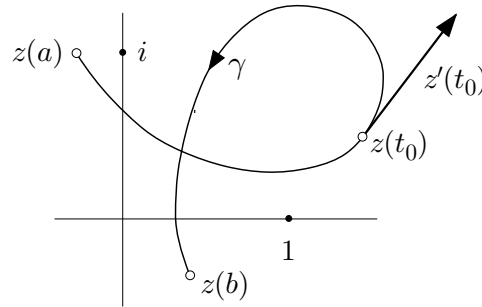


Fig. 1.3.2

Wir sprechen hier vom “Vektor” $z'(t_0)$, da wir die Zahl $z'(t_0)$ wie einen Tangentialvektor in einer Kopie der komplexen Ebene mit Ursprung an der Stelle $z(t_0)$ einzeichnen, siehe die Fig. 1.3.2.

② Unter dem **Einheitskreis** in der komplexen z -Ebene versteht man einerseits die Kreisscheibe $D := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ (auch **Einheitsball** genannt) und andererseits die Kreislinie

$$\partial D : t \mapsto z(t) := e^{it} = \cos t + i \sin t \quad (0 \leq t \leq 2\pi), \quad (3)$$

den **Randzyklus** von D . Als Punktmenge stimmt ∂D mit der eindimensionalen Sphäre S^1 überein, besitzt aber zusätzlich einen Richtungssinn. Es gilt $z'(t) = ie^{it} = iz(t)$ und folglich $|z'(t)| \equiv 1$, $\arg z'(t) \equiv \arg z(t) + \frac{\pi}{2}$. In Worten: Unter dem Regime (3) durchläuft der Punkt $z(t)$ die Kreislinie ∂D mit konstanter Absolutgeschwindigkeit 1 im Gegenuhrzeigersinn, und der Geschwindigkeits- bzw. Tangentenvektor steht in jedem Moment senkrecht auf dem Ortsvektor (wie erwartet). \bigcirc

③ Es sei $c = a + ib$ eine fest gegebene komplexe Zahl $\neq 0$. Wir betrachten die Kurve

$$\gamma : t \mapsto z(t) := e^{ct} = e^{at} \cdot e^{ibt} \quad (-\infty < t < \infty). \quad (4)$$

Ist $b = 0$, so gilt $\arg z(t) \equiv 0$. Somit durchläuft dann der Punkt $z(t)$ die positive reelle Achse, und zwar von 0 (exklusive) bis ∞ (exklusive), falls $a > 0$, und in der entgegengesetzten Richtung, falls $a < 0$. Ist $a = 0$, so gilt $|z(t)| \equiv 1$. Der Punkt $z(t)$ durchläuft dann den Einheitskreis ∂D unendlich oft mit konstanter Winkelgeschwindigkeit b ; dabei entspricht $b > 0$ dem Gegenuhrzeigersinn.

Im weiteren nehmen wir $a > 0$, $b > 0$ an (und überlassen die Diskussion der übrigen Vorzeichenfälle dem Leser). Dann ist

$$\phi \mapsto t := \phi/b \quad (-\infty < \phi < \infty)$$

eine zulässige Parametertransformation, und γ erscheint nunmehr in der Form

$$\gamma: \quad \phi \mapsto z(\phi) := e^{a\phi/b} \cdot e^{i\phi} \quad (-\infty < \phi < \infty).$$

Wir sehen: Der Punkt $z(\phi)$ besitzt gerade das Argument ϕ , und sein Betrag $r(\phi) := |z(\phi)|$ nimmt mit ϕ exponentiell zu. Es gilt

$$r(\phi) = e^{q\phi} \quad (-\infty < \phi < \infty)$$

mit $q := a/b$, was γ definitiv als logarithmische Spirale erweist, die sich im Gegenuhrzeigersinn von innen nach aussen windet (Fig. 1.3.3).

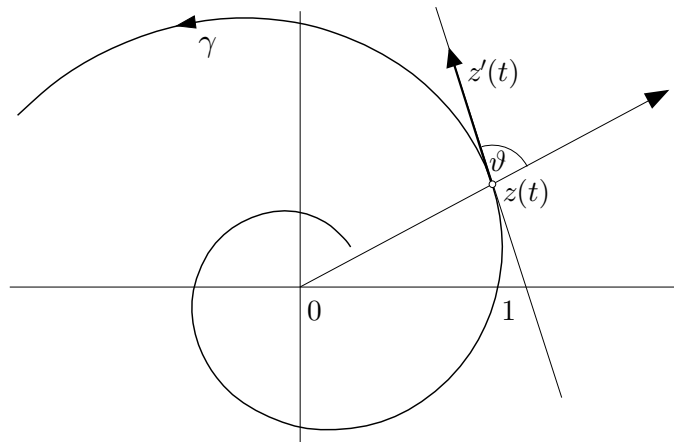


Fig. 1.3.3

Wir behaupten: Die Tangentialvektoren $z'(t)$ an die logarithmische Spirale (4) schliessen mit den zugehörigen Ortsvektoren $z(t)$ einen konstanten, das heisst: nur von $q := a/b$ abhängigen Winkel ϑ ein. Aus (4) folgt nämlich

$$z'(t) = ce^{ct} = (a + ib) z(t)$$

und somit $\arg z'(t) = \arg z(t) + \vartheta$, wobei ϑ gegeben ist durch

$$\vartheta := \arg(a + ib) = \arctan(b/a).$$



1.3.3. Komplexwertige Funktionen einer komplexen Variablen

Damit kommen wir endlich zu den Hauptobjekten der komplexen Analysis, den Funktionen $f: \mathbb{C} \curvearrowright \mathbb{C}$. Hierüber treffen wir die folgenden Vereinbarungen: Eine zusammenhängende offene Menge $\Omega \subset \mathbb{C}$ nennt man ein **Gebiet**.

Bsp: \mathbb{C} , \mathbb{C}^* , D , $\{z \in \mathbb{C} \mid -\pi < \operatorname{Im} z < \pi\}$ sind Gebiete.

Unter einer **komplexen Funktion** verstehen wir eine Funktion bzw. eine Abbildung

$$f: \Omega \curvearrowright \mathbb{C}, \quad z \mapsto w := f(z); \quad (5)$$

dabei ist $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet in der komplexen z -Ebene. Man kann ein derartiges f als “Funktion” im eigentlichen Sinn, das heisst: als ein **komplexes Skalarfeld** auf Ω , betrachten oder dann als Abbildung von der z -Ebene in die w -Ebene. Gelegentlich unterscheiden wir diese beiden Kopien von \mathbb{C} durch Angabe des verwendeten Variablennamens (mit einem vorangestellten Punkt) und schreiben dann $f: \mathbb{C}_z \rightarrow \mathbb{C}_w$.

Will man, was aber keineswegs erforderlich ist, Real- und Imaginärteile von z und von w separat ausweisen, so schreibt man $f = u + iv$ bzw.

$$f: x + iy \mapsto u + iv,$$

wobei nun u und v reellwertige Funktionen der reellen Variablen x und y sind:

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y).$$

Für u und v stehen dann die Begriffe der mehrdimensionalen Differentialrechnung zur Verfügung, wie “partielle Ableitungen”, “Funktionalmatrix”, undsoweiter.

Die Funktionen (5), die wir eigentlich im Auge haben, sind typischer Weise “*analytische Ausdrücke*” in der einen Variablen z , wie zum Beispiel rationale Funktionen von z , $z \mapsto \exp z$ oder allgemeiner Potenzreihen

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k.$$

Bei diesen **analytischen** oder **holomorphen** Funktionen (genaue Definitionen folgen im nächsten Kapitel) sind die zugehörigen reellen Funktionen $u(x, y)$,

$v(x, y)$ nicht mehr x -beliebig, sondern sie sind aneinander gekoppelt durch die sogenannten **Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen**

$$u_x = v_y, \quad v_x = -u_y;$$

auch hierfür wird auf Kapitel 2 verwiesen.

Der Graph $\{(z, w) \mid z \in \Omega, w = f(z)\}$ der komplexen Funktion (5) ist eine reell zweidimensionale Fläche im reell vierdimensionalen Raum $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ und entzieht sich damit der unmittelbaren Anschauung. Auf die graphische Veranschaulichung eines komplexen Skalarfelds, zum Beispiel der Funktion

$$f(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(k^2)}{k^4 + 1} z^k \quad (z \in D),$$

müssen wir daher verzichten. Trotzdem wollen wir an der Option ‘‘Skalarfeld’’ festhalten, denn diese Auffassung liegt zugrunde, wenn wir später eine derartige Funktion f längs Kurven $\gamma \subset \Omega$ integrieren.

Etwas anderes ist es, wenn wir die Funktion (5) als Abbildung der z -Ebene in die w -Ebene betrachten. Wir können dann die beiden Ebenen nebeneinander zeichnen: die z -Ebene mit dem Gebiet Ω links und die w -Ebene samt Bildmenge $f(\Omega)$ rechts. Natürlich lässt sich diese ziemlich rudimentäre Beschreibung der Abbildung f durch geeignete graphische Massnahmen in vielfältiger Weise unterstützen, siehe die Figuren in diesem Buch.

1.4 Einige elementare Funktionen

Im folgenden diskutieren wir einige spezielle Funktionen 1.3.(5). Dabei legen wir deren Auffassung als *Abbildung* zugrunde.

1.4.1. Wir betrachten als erstes die Funktion $f(z) := z + c$ bzw. die Abbildung

$$T_c : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto z + c,$$

dabei ist $c \in \mathbb{C}$ beliebig, aber fest. T_c ist offensichtlich eine *Translation* um den komplexen Vektor c , und es ist nicht einmal nötig, eine w -Ebene zu zeichnen.

1.4.2. Es sei weiter eine beliebige Zahl $a = |a| e^{i\alpha} \in \mathbb{C}^*$ gegeben. Wir betrachten dann die homogene lineare Funktion $f(z) := az$ bzw. die Abbildung

$$S_a : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto az.$$

Es ist $|S_a(z)| \equiv |a| \cdot |z|$ und

$$\arg(S_a(z)) \equiv \arg a + \arg z \equiv \arg z + \alpha;$$

in Worten: S_a multipliziert die Beträge aller Punkte $z \in \mathbb{C}$ mit dem Faktor $|a|$ und addiert α zu ihren Argumenten — anders ausgedrückt: S_a ist eine *Drehstreckung* mit Zentrum 0, siehe die Fig. 1.4.1.

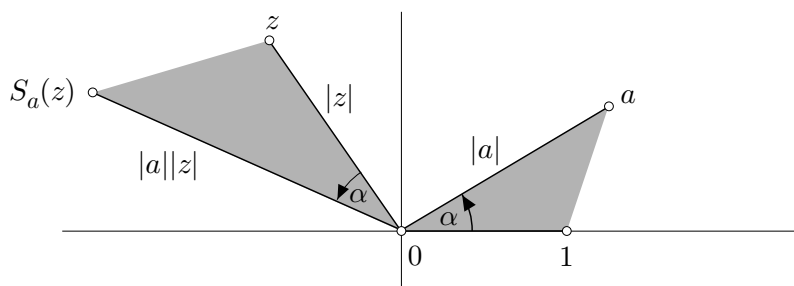


Fig. 1.4.1

④ Es seien $a \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ und $b \in \mathbb{C}$ beliebig gegeben. Wir behaupten: Auch die inhomogene lineare Funktion $f(z) := az + b$ stellt, als Abbildung aufgefasst, eine Drehstreckung dar.

□ Ein allfälliger Drehpunkt ist ein Fixpunkt von f . Die Gleichung $f(z) = z$ bzw. $az + b = z$ besitzt genau eine Lösung, nämlich den Punkt $c := b/(1 - a)$. Aus

$$f(z) - c = az + b - c = az + (1 - a)c - c = a(z - c) \quad (z \in \mathbb{C})$$

folgt: Der Vektor $f(z) - c$ geht durch eine Drehstreckung aus $z - c$ hervor, siehe die Fig. 1.4.2. Wir können daher f tatsächlich als eine Drehstreckung mit Zentrum c interpretieren. □

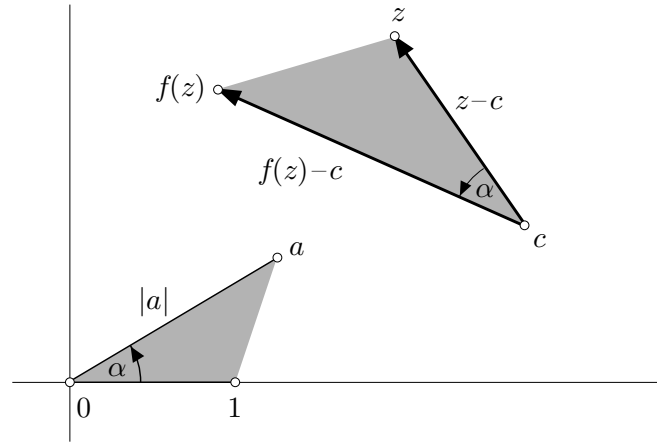


Fig. 1.4.2

1.4.3. Die Funktion

$$f: \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*, \quad z \mapsto w := \frac{1}{z} \quad (1)$$

besitzt eine natürliche Fortsetzung auf ganz $\overline{\mathbb{C}}$ (siehe Abschnitt 1.2); im Augenblick halten wir uns aber an (1). Für die geometrische Beschreibung dieser Abbildung betrachten wir die Bilder von Strahlen $\arg z = \alpha$, α fest, und von konzentrischen Kreisen $|z| = r$, $r > 0$ fest. In der Fig. 1.4.3 sind z -Ebene und w -Ebene übereinandergelegt.

Es sei

$$\sigma: t \mapsto z(t) := t e^{i\alpha} \quad (0 < t < \infty) \quad (2)$$

ein derartiger Strahl. Sein Bild $f(\sigma)$ besitzt die Parameterdarstellung

$$f(\sigma): t \mapsto w(t) = \frac{1}{z(t)} = \frac{1}{t} e^{-i\alpha} \quad (0 < t < \infty).$$

Wir sehen: $f(\sigma)$ ist ein aus dem Unendlichen auf 0 zulaufender Strahl; als Punktmengen liegen σ und $f(\sigma)$ spiegelbildlich zur reellen Achse.

Die im Gegenuhrzeigersinn umlaufende Kreislinie

$$\gamma: t \mapsto z(t) := r e^{it} \quad (0 \leq t \leq 2\pi) \quad (3)$$

wird durch f in die Kurve

$$f(\gamma): t \mapsto w(t) = \frac{1}{z(t)} = \frac{1}{r} e^{-it} \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

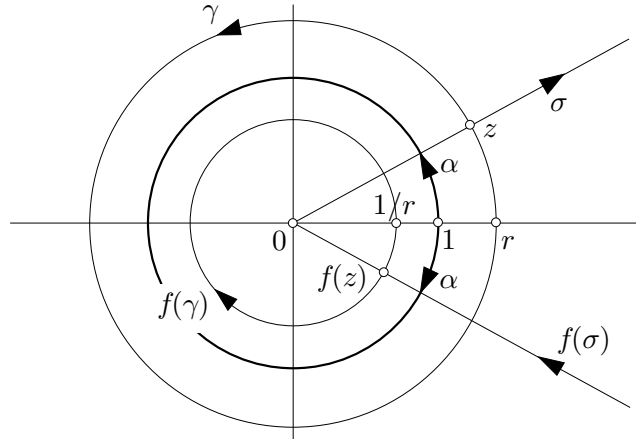


Fig. 1.4.3

übergeführt. Die Bildkurve ist ein Kreis vom Radius $1/r$, der aber im negativen, d.h. im Uhrzeigersinn durchlaufen wird. Wir sehen: Die betrachtete Abbildung f verkehrt den Umlaufssinn von Kurven um 0 herum in den jeweiligen Gegensinn. (Es ist ein Paradox, dass dasselbe f lokal orientierungserhaltend ist, d.h. den Umlaufssinn von "infinitesimalen Kreisen" nicht umkehrt. Wir werden auf diesen Punkt zurückkommen.)

1.4.4. Auch die von der Funktion

$$f: \mathbb{C}_z \rightarrow \mathbb{C}_w, \quad z \mapsto w := z^2$$

vermittelte Abbildung (Fig. 1.4.4) lässt sich am einfachsten in Polarkoordinaten diskutieren.

Den Strahl (2) können wir diesmal bei $t := 0$ beginnen lassen. Sein Bild besitzt die Parameterdarstellung:

$$f(\sigma): \quad t \mapsto w(t) := (z(t))^2 = t^2 e^{2i\alpha} \quad (0 \leq t < \infty).$$

Wir erhalten als Bild wieder einen von 0 ausgehenden Strahl; sein Argument beträgt allerdings das Doppelte des Arguments von σ . Aus diesen Betrachtungen ergibt sich weiter, dass der Sektor $\{z \in \mathbb{C}^* \mid 0 < \arg z < \alpha\}$ auf einen Sektor vom doppelten Zentriwinkel abgebildet wird.

Das f -Bild der Kreislinie (3) ist gegeben durch

$$f(\gamma): \quad t \mapsto w(t) := (z(t))^2 = r^2 e^{2it} \quad (0 \leq t \leq 2\pi);$$

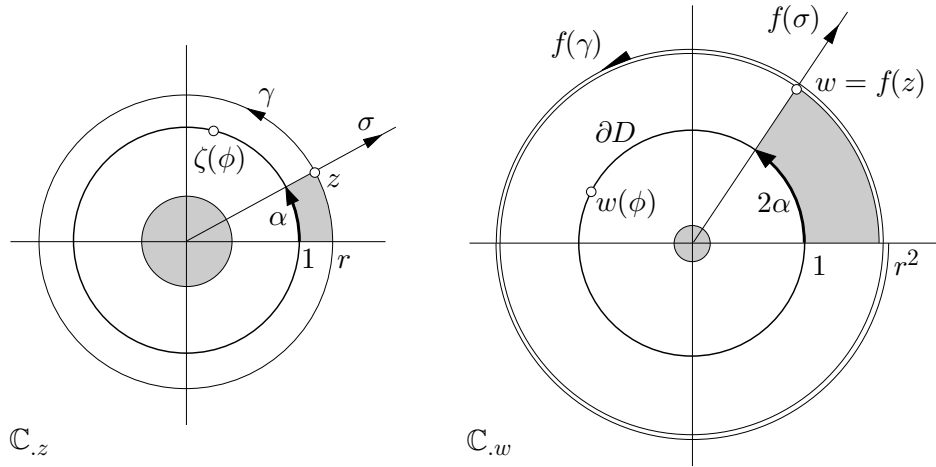


Fig. 1.4.4

es handelt sich um den *zweimal durchlaufenen* Kreis vom Radius r^2 . Ist $r \ll 1$, so besitzt $f(\gamma)$ einen wesentlich kleineren Radius als γ ; für $r \gg 1$ ist es gerade umgekehrt: $f(\gamma)$ ist riesig im Verhältnis zu γ .

Alles in allem ergibt sich, dass das Bild $f(\mathbb{C}^*)$ die Menge \mathbb{C}^* “doppelt überdeckt” und sich sozusagen zweimal um den Ursprung herumwindet. Im Ursprung ist f als Funktion zwar stetig; aber als Abbildung einer Umgebung $U(0)$ der z -Ebene auf eine Umgebung $V(0)$ der w -Ebene besitzt f im Nullpunkt eine Singularität.

Was sich hier für die Funktion $z \mapsto z^2$ ergeben hat, gilt natürlich *mutatis mutandis* für alle Funktionen $z \mapsto z^n$, $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$.

1.4.5. Wie steht es mit der Wurzelfunktion wrz_n , $n \geq 2$? Aus der Analysis I wissen wir: Ist $w \in \mathbb{C}^*$ gegeben, so gibt es genau n verschiedene Lösungen z_k der Gleichung $z^n = w$, und diese **n -ten Wurzeln** der komplexen Zahl w bilden ein reguläres n -Eck auf dem Kreis vom Radius $\sqrt[n]{|w|}$. Ist $w = |w|e^{i\phi}$, so sind diese z_k explizit gegeben durch

$$z_k = \sqrt[n]{|w|} e^{i(\frac{\phi}{n} + k \frac{2\pi}{n})} \quad (0 \leq k \leq n-1). \quad (4)$$

In anderen Worten: Die n -te Wurzel

$$\text{wrz}_n(w) := \{z \in \mathbb{C}^* \mid z^n = w\} \quad (w \in \mathbb{C}^*)$$

ist wie das Argument eine mengenwertige Funktion, nur $\text{wrz}_n(0) := 0$ ist eindeutig bestimmt.

Es ist *unmöglich*, einen auf ganz \mathbb{C}^* stetigen Repräsentanten von wrz_n als "Standardwurzel" auszuzeichnen. Dies kann man sich auf folgende Weise klarmachen, wobei man die Fig. 1.4.4 von rechts nach links lesen muss: Wir verschieben den Punkt w kontinuierlich längs $\partial D \subset \mathbb{C}_w$ mit Hilfe der Parameterdarstellung

$$\phi \mapsto w(\phi) := e^{i\phi} \quad (0 \leq \phi \leq 2\pi) .$$

Wählen wir für $\text{wrz}_n(w(0)) = \text{wrz}_n(1)$ in (4) den Repräsentanten $z_0 = 1$, so sehen wir, dass die einzig mögliche stetige Fortsetzung $\phi \mapsto \zeta(\phi)$ dieses Repräsentanten gegeben ist durch

$$\zeta(\phi) = e^{i\phi/n} \quad (0 \leq \phi \leq 2\pi) .$$

Nun ist $w(2\pi) = 1 = w(0)$; aber $\zeta(2\pi) = e^{2\pi i/n}$ ist vom Anfangswert 1 verschieden.

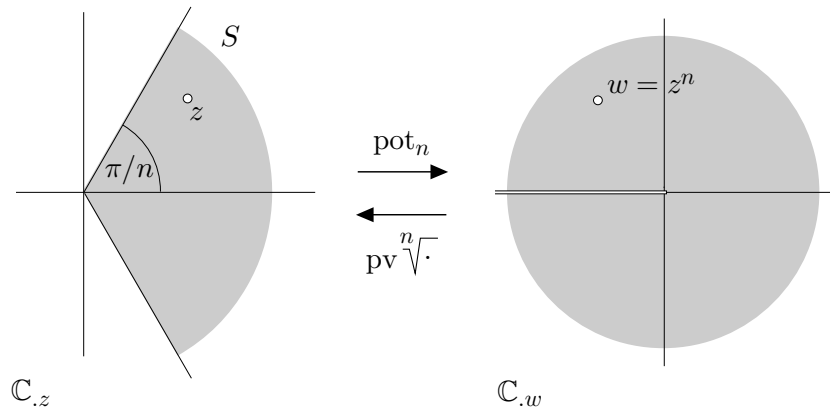


Fig. 1.4.5

In dieser Situation helfen die folgenden Überlegungen weiter: Wir bemerken, dass nach 1.4.4 die Potenzfunktion $\text{pot}_n: z \mapsto z^n$ den offenen Sektor

$$S := \left\{ z \in \mathbb{C}^* \mid -\frac{\pi}{n} < \text{Arg } z < \frac{\pi}{n} \right\} \subset \mathbb{C}_z$$

bijektiv auf die eingeschnittene w -Ebene

$$\mathbb{C}^* := \{ w \in \mathbb{C} \mid -\pi < \text{Arg } w < \pi \} \subset \mathbb{C}_w$$

abbildet, siehe die Fig. 1.4.5. Wir erklären daher die Inverse

$$(\text{pot}_n \upharpoonright S)^{-1} : \mathbb{C}^* \rightarrow S$$

zum **Hauptwert der n -ten Wurzel** und bezeichnen diesen Hauptwert mit $\text{pv } \sqrt[n]{\cdot}$ (pv für *principal value*). Die komplexe Funktion $\text{pv } \sqrt[n]{\cdot} : \mathbb{C}^* \rightarrow S$ ist stetig und ist explizit gegeben durch

$$\text{pv } \sqrt[n]{w} = \sqrt[n]{|w|} e^{i \text{Arg } w/n} .$$

Ist $w > 0$, so stimmt $\text{pv } \sqrt[n]{w}$ mit der n -ten Wurzel $\sqrt[n]{w}$ aus der reellen Analysis überein.

1.4.6. Wir kommen zu der (komplexen) **Exponentialfunktion**

$$\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} , \quad z \mapsto w := \exp z := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k .$$

In der Analysis I wurde hierzu u.a. folgendes gezeigt:

- (a) Die Exponentialfunktion genügt der Funktionalgleichung

$$\exp(z + z') = \exp z \cdot \exp z' \quad (z, z' \in \mathbb{C}) . \quad (5)$$

- (b) Setzt man zur Abkürzung $\exp 1 =: e$, so stimmt $\exp x$ für reelle x mit der “naiven” Potenz e^x überein. Aus diesem Grund wird auch für beliebige komplexe z die Schreibweise e^z verwendet anstelle von $\exp z$.

- (c) Für reelle ϕ gilt die Eulersche Identität

$$e^{i\phi} \equiv \cos \phi + i \sin \phi .$$

Aus (c) folgt $e^{2\pi i} = 1$, und mit (a) ergibt sich die Identität

$$\exp(z + 2\pi i) = \exp z \cdot \exp(2\pi i) = \exp z \quad (z \in \mathbb{C}) ;$$

sie drückt aus, dass die komplexe Exponentialfunktion *periodisch* ist mit der rein imaginären Periode $2\pi i$. Hieraus folgt erstens, dass sich $\exp: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ nicht global invertieren lässt, und zweitens, dass \exp durch seine Werte auf

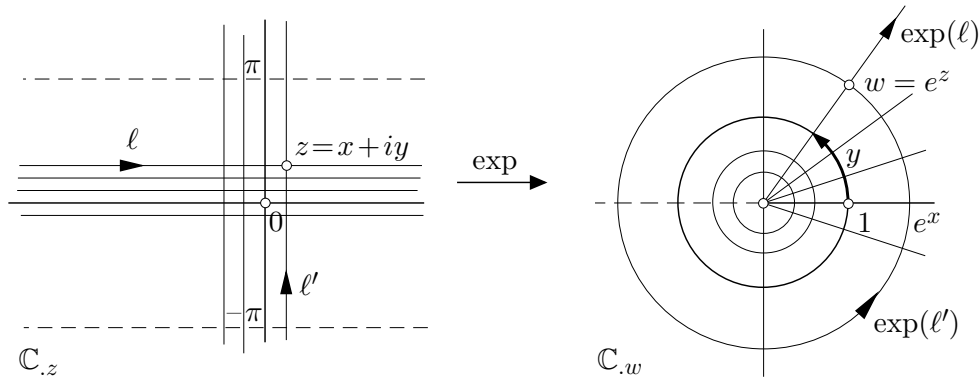


Fig. 1.4.6

einem horizontalen Streifen der Breite 2π , zum Beispiel auf dem Streifen $-\pi \leq \operatorname{Im} z \leq \pi$, bereits vollständig bestimmt ist.

Für die geometrische Beschreibung der Abbildung (5) schreiben wir $z = x + iy$ und erhalten

$$w = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} .$$

Damit folgt

$$|w| = e^x = e^{\operatorname{Re} z} , \quad \arg w = \{y\} = \{\operatorname{Im} z\} , \quad (6)$$

in Worten: $x = \operatorname{Re} z$ bestimmt den Betrag von $w := e^z$, und $y = \operatorname{Im} z$ bestimmt das Argument von e^z .

Wir halten y für den Moment fest und betrachten die horizontale **x -Linie**

$$\ell : \quad x \mapsto z := x + iy \quad (-\infty < x < \infty) .$$

Sie wird durch \exp übergeführt in

$$\exp(\ell) : \quad x \mapsto e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} \quad (-\infty < x < \infty) ,$$

das heisst: in den von 0 (exklusive) ausgehenden und ins Unendliche laufenden Strahl vom Argument y , siehe die Fig. 1.4.6. Äquidistante x -Linien im Abstand $\Delta y > 0$ (und $\ll 1$) gehen in Strahlen über, die um den konstanten Winkel $\delta := \Delta y$ gegeneinander verdreht sind.

Analog können wir für ein festes x die vertikale **y -Linie**

$$\ell' : \quad x \mapsto z := x + iy \quad (-\infty < y < \infty)$$

betrachten. Ihr Bild ist

$$\exp(\ell') : y \mapsto e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} \quad (-\infty < y < \infty);$$

es handelt sich um den Kreis vom Radius $e^x > 0$, der unendlich oft durchlaufen wird. Äquidistante y -Linien im Abstand $\Delta x > 0$ gehen in konzentrische Kreise über, die durch Streckung mit dem konstanten Faktor $\lambda := e^{\Delta x} > 1$ auseinander hervorgehen.

Alles in allem ergibt sich, dass \exp die komplexe Ebene \mathbb{C} surjektiv auf die **punktierte Ebene** \mathbb{C}^* abbildet, wobei allerdings jeder Wert $w \in \mathbb{C}^*$ Bild von unendlich vielen Punkten $z \in \mathbb{C}$ ist. Zwei derartige Punkte z, z' unterscheiden sich um ein ganzzahliges Vielfaches von $2\pi i$.

1.4.7. Damit tritt das Problem “Logarithmus” auf den Plan. Im Reellen ist der natürliche Logarithmus $\ln a$ einer Zahl $a > 0$ definiert als die wohlbestimmte Lösung der Gleichung $e^x = a$. Es sei nun eine komplexe Zahl $w \in \mathbb{C}^*$ gegeben, von der wir den Logarithmus nehmen wollen. Wie wir eben (am Schluss von Abschnitt 1.4.6) festgehalten haben, besitzt die Gleichung $e^z = w$ unendlich viele Lösungen. Wir definieren daher als **Logarithmus** der Zahl $w \in \mathbb{C}^*$ die *unendliche Menge*

$$\log w := \{z \in \mathbb{C} \mid e^z = w\} \subset \mathbb{C}.$$

Es sei $w = |w|e^{i\phi}$. Um diese Menge in aufzählender Form präsentieren zu können, müssen wir die Gleichung $e^z = w$, d.h.

$$e^x \cdot e^{iy} = |w| \cdot e^{i\phi}$$

nach x und y auflösen. Es ergibt sich

$$x = \ln |w|, \quad y \in \{\phi\} = \arg w.$$

Damit haben wir definitiv

$$\log w = \ln |w| + i \arg w, \tag{7}$$

und das ist, wie erwartet, eine Menge von äquidistanten Zahlen auf der Vertikalen $x = \ln |w|$.

Im Reellen haben wir die Funktionalgleichung des Logarithmus:

$$\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b \quad (a, b \in \mathbb{R}_{>0}). \tag{8}$$

Diese Funktionalgleichung bleibt im Komplexen gültig, wenn wir akzeptieren, dass Logarithmen Mengen sind:

(1.1) Für beliebige $w, w' \in \mathbb{C}^*$ gilt

$$\log(w \cdot w') = \log w + \log w' .$$

□ Nach 1.1.(8) genügt auch das Argument einer Funktionalgleichung der Form (8). Wir haben daher

$$\begin{aligned} \log(w w') &= \ln(|w w'|) + i \arg(w w') = \ln(|w| |w'|) + i \arg(w w') \\ &= \ln |w| + \ln |w'| + i(\arg w + \arg w') \\ &= \log w + \log w' . \end{aligned} \quad \square$$

Es ist *unmöglich*, einen auf ganz \mathbb{C}^* stetigen Repräsentanten von \log als “Standardlogarithmus” auszuzeichnen. Dies kann man sich wie seinerzeit bei wrz_n klarmachen: Wir verschieben den Punkt w kontinuierlich längs $\partial D \subset \mathbb{C}_w$ mit Hilfe der Parameterdarstellung

$$\phi \mapsto w(\phi) := e^{i\phi} \quad (0 \leq \phi \leq 2\pi) .$$

Wählen wir für $\log(w(0)) = \log 1$ in (7) den Repräsentanten $0 \in \mathbb{C}$, so sehen wir, dass die einzig mögliche stetige Fortsetzung $\phi \mapsto \zeta(\phi)$ dieses Repräsentanten gegeben ist durch

$$\zeta(\phi) = i\phi \quad (0 \leq \phi \leq 2\pi) .$$

Nun ist $w(2\pi) = 1 = w(0)$; aber $\zeta(2\pi) = 2\pi i$ ist vom Anfangswert 0 verschieden.

Der Ausweg ist auch hier gegeben: Wir schneiden \mathbb{C}^* längs der negativen reellen Achse auf und erhalten dadurch ein *einfach zusammenhängendes* Gebiet, auf dem sich ein eindeutiger und stetiger komplexer Logarithmus auszeichnen lässt. Auf Grund von (7) definieren wir: Unter dem **Hauptwert des Logarithmus** versteht man die Funktion

$$\text{Log} : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}, \quad w \mapsto \ln |w| + i \text{Arg } w .$$

In anderen Worten: $\text{Log } w$ ist der eindeutig bestimmte Repräsentant von $\log w$ in dem Streifen

$$S := \{z = x + iy \mid -\pi < y < \pi\} = \{z \in \mathbb{C} \mid |\text{Im } z| < \pi\}$$

der z -Ebene. Man kann sogar folgendes sagen: Log ist die Umkehrfunktion der Einschränkung von \exp auf den genannten Streifen, siehe die Fig. 1.4.7. Es gilt daher unbeschränkt

$$\exp(\text{Log } w) = w \quad (w \in \mathbb{C}^*).$$

Auf der positiven reellen Achse stimmt Log mit dem natürlichen Logarithmus \ln überein; ferner gilt allgemein $\text{Log } \bar{w} = \overline{\text{Log } w}$. Die Funktionalgleichung (1.1) ist jedoch für den Hauptwert des Logarithmus nicht allgemein richtig.

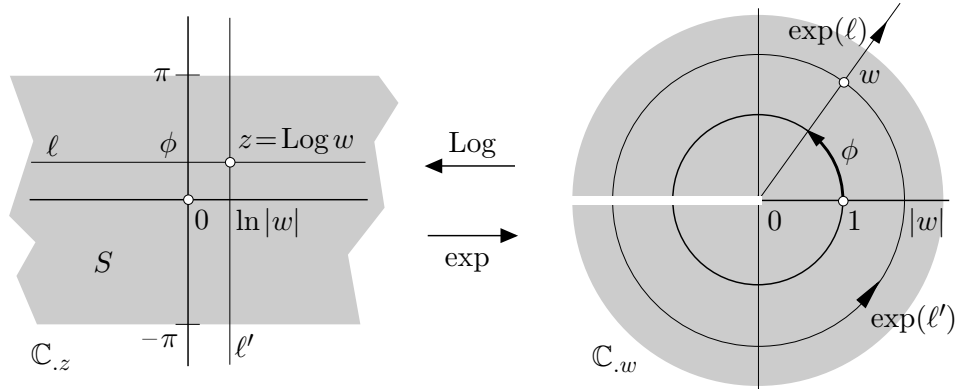


Fig. 1.4.7

Bsp: $\text{Log } i = i\frac{\pi}{2}$, aber $\text{Log } i^4 = \text{Log } 1 = 0 \neq 4 \cdot i\frac{\pi}{2}$.

Wir haben in der Analysis I für reelle $a > 0$ und beliebige $t \in \mathbb{R}$ die Potenz a^t definiert durch

$$a^t := e^{t \ln a} \quad (9)$$

und gesehen, dass die aus der elementaren Algebra bekannten Regeln des Potenzrechnens gültig bleiben. Was lässt sich hiervon ins Komplexe übertragen? Wir definieren für beliebige $a \in \mathbb{C}^*$ (und nur für solche a !), aber für beliebige Exponenten $z \in \mathbb{C}$ den **Hauptwert von a^z** durch

$$\text{pv } a^z := \exp(z \text{Log } a). \quad (10)$$

Dies stimmt für $a > 0$ und reelle z mit (9) überein; ferner gilt unbeschränkt die Regel

$$\text{pv } a^{(z+z')} = \text{pv } a^z \cdot \text{pv } a^{z'} \quad (z, z' \in \mathbb{C}).$$

Wegen $\text{pv } a^1 = a$ folgt hieraus durch vollständige Induktion, dass $\text{pv } a^k$ für beliebige $k \in \mathbb{Z}$ mit a^k übereinstimmt. Der Leser kann sich selbst überlegen, dass auch die Formel $\text{pv } a^{1/n} = \text{pv } \sqrt[n]{a}$ richtig ist.

Weiter geht es aber nicht: Die Formeln

$$(ab)^t = a^t \cdot b^t, \quad (a^t)^s = a^{t \cdot s}$$

lassen sich nicht kommentarlos ins Komplexe übernehmen.

1.4.8. Beliebige Zusammensetzungen der in 1.2 und 1.4.1–3 betrachteten Abbildungen

$$T_c: z \mapsto z + c \quad (c \in \mathbb{C}), \quad S_a: z \mapsto az \quad (a \in \mathbb{C}^*), \quad I: z \mapsto \frac{1}{z} \quad (1)$$

heissen **Möbiustransformationen**. Wir haben in Abschnitt 1.2 gesehen, dass sich die Abbildungen (1) auf natürliche Weise zu bijektiven Selbstabbildungen der Riemannschen Zahlenkugel erweitern lassen. Dasselbe ist dann auch für die Möbiustransformationen der Fall. Wir behaupten:

(1.2) Die Gesamtheit \mathcal{M} der Möbiustransformationen besteht aus allen Funktionen der Form

$$T(z) := \frac{az + b}{cz + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{C}, \quad ad - bc \neq 0. \quad (2)$$

An dieser Stelle drängt sich ein für allemal die folgende Bemerkung auf: Der in (2) angegebene Funktionsterm ist für zwei Punkte $z \in \overline{\mathbb{C}}$ (im Fall $c = 0$ für einen Punkt) undefiniert. Die stetige Fortsetzung von T auf ganz $\overline{\mathbb{C}}$ ist natürlich gegeben durch

$$T(\infty) := \lim_{z \rightarrow \infty} T(z) = \frac{a}{c}, \quad T\left(-\frac{d}{c}\right) := \infty,$$

$c \neq 0$ vorausgesetzt, und durch $T(\infty) := \infty$ im Fall $c = 0$.

□ Die Ausgangsabbildungen (1) sind Spezialfälle von (2). Ist neben T die weitere Abbildung

$$T'(z) := \frac{a'z + b'}{c'z + d'}$$

gegeben, so berechnet man

$$T'(T(z)) = \frac{a' \frac{az+b}{cz+d} + b'}{c' \frac{az+b}{cz+d} + d'} = \frac{(a'a + b'c)z + a'b + b'd}{(c'a + d'c)z + c'b + d'd}.$$

Dies zeigt nicht nur, dass sich die Zusammensetzung $T' \circ T$ wieder auf die Form (2) bringen lässt, sondern zusätzlich, dass dieser Zusammensetzung das Produkt

$$\begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

der Koeffizientenmatrizen von T' und T entspricht. Jedenfalls ist erwiesen, dass alle $T \in \mathcal{M}$ die Form (2) haben.

Wir müssen nun umgekehrt zeigen, dass sich jedes T gemäss (2) als Zusammensetzung von Abbildungen (1) darstellen lässt. Ist zunächst $c \neq 0$, so können wir schreiben

$$T(z) = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{cz + d} = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c} \frac{1}{z + d/c}.$$

Mit den Abkürzungen $a/c =: c'$, $(bc - ad)/c =: a'$ und $d/c =: d'$ gilt daher

$$T = T_{c'} \circ S_{a'} \circ I \circ T_{d'}.$$

Im Fall $c = 0$ ist notwendigerweise $d \neq 0$, und man hat

$$T(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}, \quad \text{d.h.} \quad T = T_{b/d} \circ S_{a/d}. \quad \lrcorner$$

Wir haben schon gezeigt, dass mit T' , $T \in \mathcal{M}$ auch die Zusammensetzung $T' \circ T$ in \mathcal{M} liegt. Ferner ist von selbst auch $T^{-1} \in \mathcal{M}$. Wird nämlich die Gleichung

$$w = T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

nach z aufgelöst, so ergibt sich

$$z = T^{-1}(w) = \frac{dw - b}{-cw + a}.$$

Folglich bildet die Gesamtheit \mathcal{M} der Möbiustransformationen eine *Gruppe*. Obwohl in (2) vier Koeffizienten erscheinen, sind nur drei davon wesentlich, da man sie noch mit einem gemeinsamen Faktor $\neq 0$ multiplizieren kann, ohne

das betreffende T zu ändern. Damit ist genügend Flexibilität vorhanden, um sicherzustellen, dass \mathcal{M} auf $\overline{\mathbb{C}}$ **dreifach transitiv** operiert. Damit ist folgendes gemeint: Zu je drei verschiedenen Punkten z_1, z_2, z_3 und w_1, w_2, w_3 gibt es genau ein $T \in \mathcal{M}$, das $T(z_k) = w_k$ ($1 \leq k \leq 3$) realisiert.

Im Zusammenhang mit Möbiustransformationen drängt es sich auf, Geraden als Kreise zu betrachten, die zufällig durch den Punkt ∞ gehen. Wir behaupten nämlich:

(1.3) *Möbiustransformationen sind kreistreu, das heisst, sie führen Kreise $\gamma \subset \overline{\mathbb{C}}$ in Kreise über.*

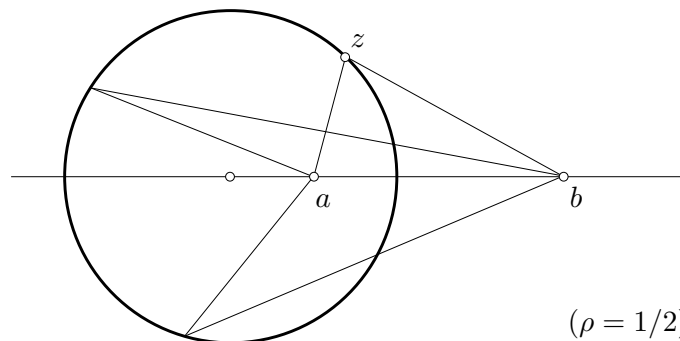


Fig. 1.4.8

Es genügt offenbar zu zeigen, dass die Inversion $I: z \mapsto 1/z$ kreistreu ist. Wir lassen den Punkt ∞ ausser Acht. Jeder Kreis (und jede Gerade) lässt sich auf vielfältige Weise als Apolloniuskreis (Fig. 1.4.8) bezüglich zweier Punkte $a, b \in \mathbb{C}$ betrachten, das heisst, für ein gewisses $\rho > 0$ in der Form

$$\gamma = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| = \rho |z - b|\}$$

darstellen, wobei wir noch $ab \neq 0$ annehmen dürfen. Für ein $w \in I(\gamma)$ ist $z := 1/w \in \gamma$. Es gilt daher

$$\left| \frac{1}{w} - a \right| = \rho \left| \frac{1}{w} - b \right|$$

und folglich (multipliziere auf beiden Seiten mit $|w|/|a|$)

$$\left| w - \frac{1}{a} \right| = \frac{\rho|b|}{|a|} \left| w - \frac{1}{b} \right|.$$

Hiernach liegt w auf einem gewissen Apolloniuskreis γ' , und durch Umkehrung der Rechnung folgt, dass jedes $w \in \gamma'$ als I -Bild eines $z \in \gamma$ aufgefasst werden kann. ┌