

2

Analytische Funktionen

2.1 Ableitung nach einer komplexen Variablen

Wir stoßen nun zum Kern der komplexen Analysis vor: Es geht ums Differenzieren “im Komplexen”. In der reellen Analysis ist die Ableitung einer Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ an der Stelle $t_0 \in \text{dom}(f)$ erklärt als Grenzwert von Differenzenquotienten:

$$f'(t_0) := \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t}.$$

Die angeschriebenen Quotienten lassen sich für $t \neq t_0$ bzw. $\Delta t \neq 0$ ohne weiteres bilden, da \mathbb{R} ein Körper ist.

Nun ist aber auch \mathbb{C} ein Körper, so dass wir rein formal für Funktionen $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ genau gleich definieren können: Die Funktion f heisst an der Stelle z_0 **komplex differenzierbar**, wenn f in einer ganzen Umgebung von z_0 definiert ist und wenn der Grenzwert

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} \quad (1)$$

existiert. Dieser Grenzwert, eine komplexe Zahl, heisst **(komplexe) Ableitung von f an der Stelle z_0** und wird natürlich mit

$$f'(z_0), \quad \frac{df}{dz}(z_0), \quad \left. \frac{df}{dz} \right|_{z=z_0}$$

oder ähnlich bezeichnet.

Es wird nun darum gehen, diese formale Definition mit lebendigem Inhalt zu erfüllen. Dabei verwenden wir gelegentlich die Abkürzung

$$\Delta f := f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)$$

und betrachten diesen **Wertzuwachs** Δf (Fig. 2.1.1) als eine Funktion der Variablen Δz ; der Punkt z_0 ist im Augenblick fest.

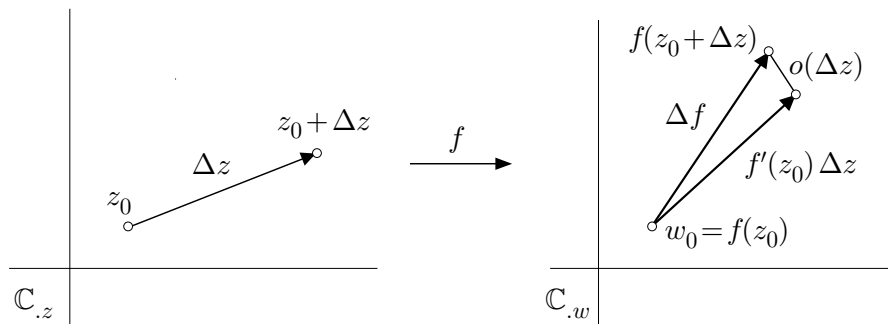


Fig. 2.1.1

Zunächst einmal muss man sich vergegenwärtigen, dass in (1) das variable Inkrement Δz “aus allen Richtungen kommend gegen 0 geht”: Komplexe Differenzierbarkeit impliziert

$$\left| \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} - f'(z_0) \right| < \varepsilon \quad (2)$$

für alle hinreichend kleinen Inkremente Δz , *unabhängig von* $\arg \Delta z$. “Hinreichend klein” bedeutet: $|\Delta z| < \delta$, wobei δ von der Toleranz ε in (2) abhängt.

Wir wollen diesen Sachverhalt nennerfrei formulieren. Hierzu geben wir der in (2) betrachteten “Differenz zwischen Sekanten- und Tangentensteigung” einen Namen:

$$\nu(\Delta z) := \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} - f'(z_0) \quad (\Delta z \neq 0). \quad (3)$$

Nach Definition von $f'(z_0)$ gilt

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \nu(\Delta z) = 0.$$

Setzen wir also $\nu(0) := 0$, so ist $\nu(\cdot)$ in einer vollen Umgebung von $\Delta z = 0$ definiert und im Nullpunkt stetig. Aus (3) folgt durch Heraufmultiplizieren und Umordnen

$$f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = f'(z_0) \Delta z + \nu(\Delta z) \Delta z ,$$

und zwar gilt dies trivialerweise auch für $\Delta z = 0$. Zusammenfassend können wir daher folgendes sagen:

(2.1) *Ist die Funktion $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ an der Stelle z_0 komplex differenzierbar, so besitzt Δf eine Darstellung der Form*

$$f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = (f'(z_0) + \nu(\Delta z)) \Delta z , \quad \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \nu(\Delta z) = 0 \quad (4)$$

bzw.

$$\Delta f = f'(z_0) \Delta z + o(\Delta z) \quad (\Delta z \rightarrow 0) ;$$

in Worten: Der Wertzuwachs von f ist "in erster Näherung" ein konstantes komplexes Vielfaches des komplexen Inkrements Δz .

In (4) strebt die rechte Seite mit $\Delta z \rightarrow 0$ gegen 0, ergo auch die linke Seite. Daraus ziehen wir noch den folgenden Schluss: Ist f an der Stelle z_0 differenzierbar, so ist f dort erst recht stetig.

Für die komplexe Ableitung gelten dieselben Rechenregeln wie im Reellen, denn zu deren Herleitung wurden nur Körper- und Stetigkeitseigenschaften benutzt, die sowohl in \mathbb{R} wie in \mathbb{C} vorhanden sind. Es handelt sich um die folgenden Regeln (wir schreiben z anstelle von z_0):

(2.2) (a) *Linearität: Für beliebige $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ gilt*

$$(\lambda f + \mu g)'(z) = \lambda f'(z) + \mu g'(z) .$$

(b) *Produkt- und Quotientenregel:*

$$(f g)'(z) = f'(z)g(z) + f(z)g'(z) ,$$

$$(f/g)'(z) = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{g^2(z)} \quad (g(z) \neq 0) .$$

(c) Kettenregel: Ist f komplex differenzierbar an der Stelle z und g an der Stelle $w := f(z)$, so ist $g \circ f$ differenzierbar an der Stelle z , und es gilt

$$\frac{d}{dz} g(f(z)) = g'(f(z)) f'(z).$$

□ (c) Wir bezeichnen die unabhängige Zuwachsvariable wieder mit Δz und benützen die Abkürzung $f(z + \Delta z) - f(z) =: \Delta w$, dann ist $f(z + \Delta z) = w + \Delta w$. Mit zweimaliger Benützung von (4) ergibt sich jetzt

$$\begin{aligned} (g \circ f)(z + \Delta z) - (g \circ f)(z) &= g(w + \Delta w) - g(w) \\ &= (g'(w) + \nu_g(\Delta w)) \Delta w \\ &= (g'(w) + \nu_g(\Delta w)) (f'(z) + \nu_f(\Delta z)) \Delta z \end{aligned}$$

und folglich

$$\frac{(g \circ f)(z + \Delta z) - (g \circ f)(z)}{\Delta z} = (g'(w) + \nu_g(\Delta w)) (f'(z) + \nu_f(\Delta z)).$$

Da mit $\Delta z \rightarrow 0$ auch Δw gegen 0 konvergiert, strebt hier die rechte Seite für $\Delta z \rightarrow 0$ gegen $g'(w)f'(z)$, wie behauptet. □

2.2 Begriff der analytischen Funktion

Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Die Funktion $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ heisst **(komplex) analytisch** oder auch **holomorph** auf Ω , wenn sie an jeder Stelle $z \in \Omega$ komplex differenzierbar und die Ableitung $f': \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ stetig ist. (Nach einem berühmten Satz von E. Goursat ist f' von selbst stetig. Wir machen es uns hier einfacher und nehmen die Stetigkeit von f' in die Definition auf.) Die Menge aller analytischen Funktionen $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ bezeichnen wir mit $\mathcal{O}(\Omega)$.

Analytizität ist eine *lokale* Eigenschaft: Besitzt jeder Punkt $z \in \Omega$ eine Umgebung $U(z)$, in der f analytisch ist, so ist $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Eine Funktion, die auf ganz \mathbb{C} analytisch ist, heisst eine **ganz-analytische** oder kurz eine **ganze Funktion**.

Mit **(2.2)** folgt: Summe und Produkt von analytischen Funktionen f, g sind wieder analytisch, ein Quotient f/g nur, wenn g auf Ω nirgends verschwindet. Natürlich sind konstante Funktionen sowie die Funktion $f(z) := z$ ganz-analytisch. Hieraus folgt sofort mit **(2.2)**: Beliebige Polynomfunktionen

$$p(z) := a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0$$

mit komplexen Koeffizienten sind ganz-analytisch, und es gelten für sie die bekannten Differentiationsregeln. Die Funktion $z \mapsto 1/z$ ist analytisch in der **punktierten Ebene** \mathbb{C}^* ; allgemein ist eine rationale Funktion

$$R(z) := \frac{p(z)}{q(z)}, \quad p, q \text{ Polynome, } q \neq 0,$$

analytisch auf der Menge $\mathbb{C} \setminus \{z \mid q(z) = 0\}$.

Aus der Kettenregel **(2.2)**(d) ergibt sich unmittelbar das folgende Prinzip: Sind $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ und $g: \Omega' \rightarrow \mathbb{C}$ analytisch und gilt $f(\Omega) \subset \Omega'$, so ist auch die Zusammensetzung $h(z) := g(f(z))$ analytisch auf Ω .

Die Exponentialfunktion ist eine ganze Funktion, und es gilt wie erwartet $\exp' = \exp$: Für beliebiges $z \in \mathbb{C}$ ergibt sich mit Hilfe der Funktionalgleichung und eines Standardgrenzwerts

$$\frac{\exp(z + \Delta z) - \exp z}{\Delta z} = \exp z \frac{\exp \Delta z - 1}{\Delta z} \rightarrow \exp z \cdot 1 \quad (\Delta z \rightarrow 0).$$

Damit sind zum Beispiel auch die ins Komplexe fortgesetzten trigonometrischen Funktionen

$$\cos z := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

ganz-analytisch, ebenso für festes $a \in \mathbb{C}^*$ die allgemeine Potenz $z \mapsto \operatorname{pv} a^z$.

Mit diesem Material können wir schon eine ganze Menge von “analytischen Ausdrücken” bilden, die auf ihrem Definitionsbereich analytische Funktionen repräsentieren. Log und $\operatorname{pv} \sqrt{}$ werden wir uns im folgenden Abschnitt vornehmen; diese als Umkehrfunktionen erklärten Funktionen sind von selbst analytisch auf ihrem Definitionsbereich \mathbb{C}^* .

Wir benötigen aber noch ein allgemeines Prinzip, das uns gestattet, sozusagen “beliebige” analytische Funktionen herzustellen. Dieses Prinzip ist der folgende **Satz von Weierstrass**, den wir allerdings erst in Abschnitt 3.3 beweisen werden:

(2.3) Es seien $f_k : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ ($k = 0, 1, \dots$) gegebene analytische Funktionen; dabei gelte

$$|f_k(z)| \leq c_k \quad (z \in \Omega), \quad \sum_{k=0}^{\infty} c_k < \infty. \quad (1)$$

Dann stellt die Reihe $s(z) := \sum_{k=0}^{\infty} f_k(z)$ eine auf Ω analytische Funktion dar, und es gilt

$$s'(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f'_k(z) \quad (z \in \Omega).$$

Die wichtigste Anwendung dieses Satzes bezieht sich auf Potenzreihen:

(2.4) Es sei

$$f(z) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \quad (2)$$

eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $\rho > 0$. Dann ist f auf der Kreisscheibe $D_\rho := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < \rho\}$ analytisch, und es gilt

$$f'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k z^{k-1} \quad (z \in D_\rho).$$

□ Eine Garantie der Form (1), also

$$|a_k z^k| \leq c_k \quad (z \in D_\rho), \quad \sum_{k=0}^{\infty} c_k < \infty,$$

kann im allgemeinen nicht gegeben werden, da die meisten Reihen (2) immer schlechter konvergieren, je mehr man sich dem Rand von D_ρ nähert. Wir können aber (auch in anderen, ähnlich gelagerten Fällen) folgendermassen argumentieren: Für jedes $\rho' < \rho$ ist die Reihe $\sum_k c_k$ mit $c_k := |a_k| \rho'^k$ konvergent, und es gilt

$$|a_k z^k| \leq c_k \quad (z \in D_{\rho'}).$$

Satz **(2.4)** ist somit anwendbar, und f ist analytisch auf $D_{\rho'}$. Da jeder Punkt $z \in D_\rho$ von einem geeigneten $D_{\rho'}$ umgeben wird, ist folglich $f \in \mathcal{O}(D_\rho)$. □

① Die Binomialreihe

$$b_\alpha(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} z^k = 1 + \alpha z + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} z^2 + \dots$$

(siehe die Analysis I) besitzt für jedes feste $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{N}$ den Konvergenzradius 1 (und für $\alpha \in \mathbb{N}$ trivialerweise den Konvergenzradius ∞). Somit ist $b_\alpha(z)$ eine auf D analytische Funktion. In der Analysis I haben wir gesehen, dass b_α der Differentialgleichung

$$(1+x)b'_\alpha(x) = \alpha b_\alpha(x) \quad (-1 < x < 1) \quad (3)$$

genügt, und hieraus hergeleitet, dass in Wirklichkeit

$$b_\alpha(x) = (1+x)^\alpha \quad (-1 < x < 1)$$

gilt. Dieselbe Rechnung beweist natürlich

$$(1+z)b'_\alpha(z) = \alpha b_\alpha(z) \quad (z \in D);$$

und sobald wir Log' zur Verfügung haben, werden wir verifizieren können, dass auch die Identität

$$b_\alpha(z) = \text{pv} (1+z)^\alpha \quad (z \in D) \quad (4)$$

richtig ist. ○

2.3 Die CR-Differentialgleichungen

Bis dahin sind analytische Funktionen immer als “analytische Ausdrücke in der Variablen z ” in Erscheinung getreten. Wir wollen nun untersuchen, was sich über Real- und Imaginärteil einer analytischen Funktion $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ sagen lässt. Es geht also um die Zerlegung

$$f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y) \quad (x+iy \in \Omega) . \quad (1)$$

Wir halten einen Punkt $z_0 = x_0 + iy_0 \in \Omega$ bis auf weiteres fest und schreiben

$$f'(z_0) =: A + iB .$$

Es sei jetzt $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ ein variabler von $z_0 = x_0 + iy_0$ aus gemessener Zuwachs, siehe die Fig. 2.3.1. Mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} \Delta f &:= f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) , \\ \Delta u &:= u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0) , \\ \Delta v &:= v(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0) \end{aligned} \quad (2)$$

folgt aus (1) die für alle hinreichend kleinen Δz gültige Zerlegung

$$\Delta f = \Delta u + i\Delta v .$$

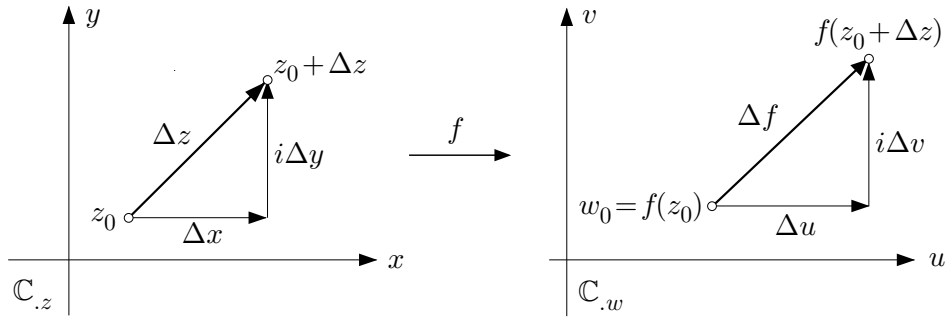


Fig. 2.3.1

Tragen wir dies in die fundamentale Beziehung (2.1) ein, so ergibt sich

$$\Delta u + i\Delta v = (A + iB) (\Delta x + i\Delta y) + o(\Delta z) ,$$

und Trennung von Real- und Imaginärteil liefert

$$\left. \begin{aligned} \Delta u &= A \Delta x - B \Delta y + o(\Delta z) , \\ \Delta v &= B \Delta x + A \Delta y + o(\Delta z) \end{aligned} \right\} \quad (\Delta z \rightarrow 0) . \quad (3)$$

Wir betrachten jetzt ein reelles $\Delta z := \Delta x \neq 0$. Dann folgt aus der ersten Formel (3) die Relation

$$\frac{\Delta u}{\Delta x} = A + o(1) \quad (\Delta x \rightarrow 0) .$$

Führen wir hier den Grenzübergang $\Delta x \rightarrow 0$ tatsächlich durch, so erscheint auf der linken Seite die partielle Ableitung

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0) - u(x_0, y_0)}{\Delta x} =: u_x(x_0, y_0),$$

womit wir $u_x(x_0, y_0) = A$ bewiesen haben. Analog ergibt sich aus der zweiten Formel (3) die partielle Ableitung $v_x(x_0, y_0) = B$, und die Betrachtung eines rein imaginären $\Delta z = i\Delta y$ liefert die weiteren Formeln $u_y(x_0, y_0) = -B$ und $v_y(x_0, y_0) = A$. Damit haben wir insgesamt

$$u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) = A, \quad -u_y(x_0, y_0) = v_x(x_0, y_0) = B. \quad (4)$$

Für eine analytische Funktion $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ ergibt sich daher der folgende Satz:

(2.5.) Die Funktion $f = u + iv$ sei analytisch in dem Gebiet Ω . Dann besitzen $u, v: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ stetige partielle Ableitungen nach x und nach y , und diese partiellen Ableitungen sind miteinander verknüpft durch die **Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen**

$$u_x(x, y) = v_y(x, y), \quad u_y(x, y) = -v_x(x, y) \quad (x + iy \in \Omega). \quad (\text{CR})$$

Ferner gelten die Formeln

$$f' = u_x + iv_x = f_x, \quad f' = v_y - iu_y = -if_y \quad (5)$$

und weitere dieser Art.

Eine Bemerkung noch zu (5): Die komplexwertige Funktion $f = u + iv$ hat natürlich auch komplexwertige partielle Ableitungen nach x und nach y ; dabei ist $f_x = u_x + iv_x$. Die Gleichung (5) drückt u.a. aus, wie diese *partiellen* Ableitungen f_x, f_y mit der *komplexen Ableitung* f' verknüpft sind.

Das Bestehen der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen ist für die Analytizität einer Funktion $f = u + iv$ notwendig und hinreichend. In anderen Worten, von **(2.5)** gilt auch die Umkehrung:

(2.6) Besitzen die beiden Funktionen $u, v: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ stetige partielle Ableitungen nach x und nach y und gelten die Cauchy-Riemannsches Differentialgleichungen (CR), so ist die komplexe Funktion

$$f(x + iy) := u(x, y) + iv(x, y)$$

auf Ω analytisch, und es gelten die Formeln (5).

□ Wir betrachten wieder einen festen Punkt $z_0 = x_0 + iy_0 \in \Omega$. Wir schreiben zur Abkürzung $u_x(x_0, y_0) =: u_x$ und analog für die übrigen drei. Nach Voraussetzung über u und v gilt dann

$$u_x = v_y =: A, \quad v_x = -u_y =: B.$$

Über die Zuwächse (2) wird in der reellen Differentialrechnung mehrerer Variablen das folgende bewiesen: Sind u und v im Punkt (x_0, y_0) stetig differenzierbar, so gilt

$$\left. \begin{aligned} \Delta u &= u_x \Delta x + u_y \Delta y + o(|\Delta z|), \\ \Delta v &= v_x \Delta x + v_y \Delta y + o(|\Delta z|) \end{aligned} \right\} \quad (\Delta z \rightarrow 0).$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} \Delta u + i\Delta v &= A\Delta x - B\Delta y + i(B\Delta x + A\Delta y) + o(\Delta z) \\ &= (A + iB)(\Delta x + i\Delta y) + o(\Delta z) \end{aligned}$$

und folglich

$$\Delta f = (A + iB)\Delta z + o(\Delta z) \quad (\Delta z \rightarrow 0).$$

Die letzte Formel lässt sich lesen als

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = A + iB;$$

somit ist f im Punkt z_0 komplex differenzierbar, und es gilt

$$f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0).$$

Da der Punkt $z_0 \in \Omega$ beliebig war und u_x, v_x nach Voraussetzung stetig sind, ist damit alles bewiesen. □

① Wir beweisen: Der Hauptwert des Logarithmus ist analytisch auf \mathbb{C}^* . Es geht also um die Funktion

$$\operatorname{Log} z := \ln |z| + i \operatorname{Arg} z \quad (z \in \mathbb{C}^*).$$

Für den Nachweis von (CR) beschränken wir uns der Einfachheit halber auf die rechte Halbebene $x > 0$. Dort ist

$$u(x, y) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2), \quad v(x, y) = \arctan \frac{y}{x},$$

und eine kurze Rechnung liefert

$$u_x = v_y = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad v_x = -u_y = \frac{-y}{x^2 + y^2}.$$

Da diese partiellen Ableitungen in dem betrachteten Bereich stetig sind, ist damit Log als analytische Funktion erwiesen. Ferner ergibt sich mit (5):

$$\operatorname{Log}'(z) = u_x + i v_x = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{1}{x + iy}.$$

Damit haben wir folgendes bewiesen:

$$\frac{d}{dz} \operatorname{Log} z = \frac{1}{z} \quad (z \in \mathbb{C}^*).$$

Wir kommen zurück auf Beispiel 2.2.①. Es sei ein $\alpha \in \mathbb{C}$ gegeben. Für $|z| < 1$ liegt der Punkt $1 + z$ in \mathbb{C}^* . Die zusammengesetzte Funktion

$$f(z) := \operatorname{pv}(1 + z)^\alpha := \exp(\alpha \operatorname{Log}(1 + z))$$

ist folglich auf $D := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ analytisch, und es gilt

$$f'(z) = \exp(\dots) \frac{\alpha}{1 + z} = f(z) \frac{\alpha}{1 + z}$$

(= $\alpha \operatorname{pv}(1 + z)^{\alpha-1}$, wie im Reellen). Insbesondere genügt f wie b_α der Differentialgleichung

$$(1 + z)f'(z) = \alpha f(z) \quad (z \in D),$$

und hieraus folgt leicht $(b_\alpha/f)'(z) \equiv 0$. Mit **(2.9)** (s.u.) schliesst man auf $b_\alpha(z)/f(z) = \text{const.}$, und diese Konstante hat den Wert $b_\alpha(0)/f(0) = 1$. Damit ist 2.2(4) erwiesen. \circ

Wir benötigen noch mehr Material aus der reellen mehrdimensionalen Differentialrechnung.

Ist eine stetig differenzierbare Abbildung

$$\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \rightsquigarrow \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \mapsto \begin{cases} u := u(x, y) \\ v := v(x, y) \end{cases}$$

gegeben, so lassen sich die partiellen Ableitungen von u und v zusammenfassen zu der sogenannten **Funktionalmatrix**

$$\begin{bmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{bmatrix},$$

und deren Determinante

$$J_{\mathbf{f}} := \det \begin{bmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{bmatrix} = u_x v_y - v_x u_y$$

heißt **Funktionaldeterminante** oder **Jacobische Determinante** der betrachteten Abbildung \mathbf{f} .

Sind u und v Real- und Imaginärteil einer analytischen Funktion f , so erhalten wir mit (4) den folgenden Ausdruck für die Funktionaldeterminante J_f :

$$J_f(z) = A^2 + B^2 = |f'(z)|^2. \quad (6)$$

Diese Feststellung erlaubt, einen Hauptsatz der mehrdimensionalen Differentialrechnung zu einem Satz über analytische Funktionen umzumodeln. Wir beziehen uns dabei auf Fig. 2.3.2.

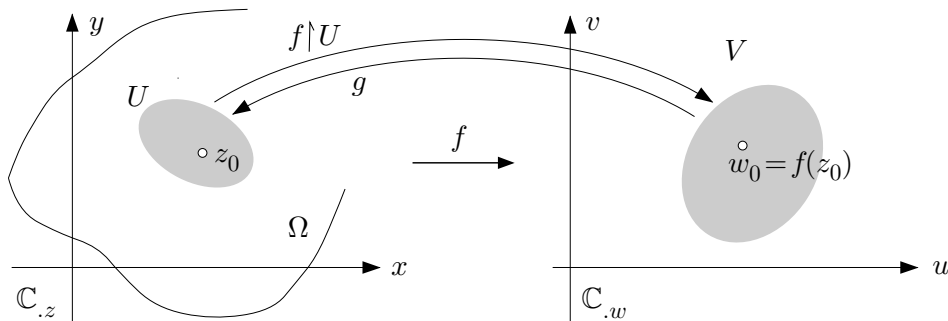


Fig. 2.3.2

(2.7) Die Funktion $f: \mathbb{C}_z \curvearrowright \mathbb{C}_w$ sei analytisch, und es sei $f'(z_0) \neq 0$. Dann trifft folgendes zu:

(a) f bildet eine geeignete offene Umgebung U von z_0 bijektiv auf eine offene Umgebung V von $w_0 := f(z_0)$ ab.

(b) Die Umkehrfunktion

$$g := (f \upharpoonright U)^{-1}: V \rightarrow U, \quad w \mapsto z := g(w)$$

ist analytisch.

$$(c) \quad g'(w_0) = \frac{1}{f'(z_0)} \quad \text{bzw.} \quad (f^{-1})'(w_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(w_0))}.$$

□ Auf Grund von (6) ist $J_f(z_0) \neq 0$. Der angeführte Hauptsatz garantiert daher (a) sowie die stetige Differenzierbarkeit der Umkehrabbildung

$$\mathbf{g}: V \rightarrow U, \quad (u, v) \mapsto (x, y)$$

bzw. der komplexen Funktion $g: w \mapsto z$.

Weiter: Die Funktionalmatrix von f (bzw. \mathbf{f}) ist in allen Punkten $z \in U$ vom Typ

$$\begin{bmatrix} A & -B \\ B & A \end{bmatrix}.$$

Die Funktionalmatrix von \mathbf{g} in den zugehörigen Punkten $w \in V$ ist die Inverse hiervon, d.h. es gilt

$$\begin{bmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{bmatrix} = \frac{1}{A^2 + B^2} \begin{bmatrix} A & B \\ -B & A \end{bmatrix}.$$

Hieraus folgt, dass g in allen Punkten $w \in V$ den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen genügt; somit ist g nach **(2.6)** analytisch. Aus

$$g(f(z)) \equiv z \quad (z \in U)$$

ergibt sich nun mit Hilfe der Kettenregel

$$g'(f(z)) f'(z) \equiv 1$$

und damit (c). □

① (Forts.) Log ist die Umkehrfunktion der Einschränkung $\exp \upharpoonright S$, wobei S den Streifen $|\operatorname{Im} z| < \pi$ bezeichnet, und $\exp'(z) = \exp z$ ist für alle z ungleich 0. Damit wird (2.7)(c) für alle $w \in \mathbb{C}^*$ anwendbar, und man erhält

$$\operatorname{Log}'(w) = \frac{1}{\exp'(\operatorname{Log} w)} = \frac{1}{\exp(\operatorname{Log} w)} = \frac{1}{w} \quad (w \in \mathbb{C}^*),$$

wie vorher. ○

② $\operatorname{pv} \sqrt[n]{\cdot}$ ($=: g$) ist die Umkehrfunktion der auf den Sektor

$$S := \left\{ z \in \mathbb{C}^* \mid -\frac{\pi}{n} < \operatorname{Arg} z < \frac{\pi}{n} \right\}$$

eingeschränkten Funktion $f(z) := z^n$, und $f'(z) = n z^{n-1}$ ist $\neq 0$ auf diesem Sektor. Hiernach ist $\operatorname{pv} \sqrt[n]{\cdot}$ auf \mathbb{C}^* analytisch, und mit (2.7)(c) ergibt sich nacheinander

$$g'(w) = \frac{1}{f'(g(w))} = \frac{1}{n(g(w))^{n-1}} = \frac{g(w)}{n(g(w))^n} \quad (w \in \mathbb{C}^*).$$

Wegen $(g(w))^n \equiv w$ erhalten wir damit definitiv

$$\frac{d}{dw}(\operatorname{pv} \sqrt[n]{w}) = \frac{1}{n w} \operatorname{pv} \sqrt[n]{w} \quad (w \in \mathbb{C}^*).$$

(In dieser Form geschrieben stimmt die Formel auch, wenn anstelle des Hauptwerts ein anderer "Zweig" der Wurzel gewählt wird.) ○

2.4 Winkeltreue

Bis dahin haben wir analytische Funktionen $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ eher als komplexe Skalarfelder betrachtet. Bei dieser Interpretation dient die Ableitung $f'(z_0)$ zur Approximation des Wertzuwachses bei einer kleinen Verschiebung des Messpunktes von z_0 nach $z_0 + \Delta z$: Nach **(2.1)** gilt

$$f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = f'(z_0) \Delta z + o(\Delta z) \quad (\Delta z \rightarrow 0). \quad (1)$$

Wir wechseln nun die Betrachtungsweise und fassen eine analytische Funktion f in erster Linie als eine Abbildung von der z -Ebene in die w -Ebene auf. Es geht dann um die folgenden Fragen: Welche besonderen geometrischen Eigenschaften hat eine derartige Abbildung? Welche geometrische Interpretation hat der Ableitungswert $f'(z_0)$?

Wir halten den Punkt $z_0 \in \Omega$ bis auf weiteres fest, schreiben $f(z_0) =: w_0$ und setzen ausdrücklich

$$f'(z_0) =: A = |A| e^{i\alpha} \neq 0 \quad (2)$$

voraus. Die Formel (1) handelt von der Abbildung

$$\Delta f: \mathbb{C}_{\Delta z} \rightarrow \mathbb{C}_{\Delta w}, \quad \Delta z \mapsto f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)$$

(Fig. 2.4.1) und besagt, dass diese ‘‘Transformation der Zuwächse’’ für kleine $|\Delta z|$ durch eine komplex-lineare Abbildung, nämlich die Drehstreckung

$$S_A: \mathbb{C}_{\Delta z} \rightarrow \mathbb{C}_{\Delta w}, \quad \Delta z \mapsto \Delta w := A \Delta z$$

gut approximiert wird. (Im Sinn der mehrdimensionalen Differentialrechnung würde man diese komplex-lineare Abbildung mit $df(z_0)$ bezeichnen.) Der lineare Streckungsfaktor von S_A ist $|A| = |f'(z_0)|$, der Drehwinkel beträgt $\alpha = \arg f'(z_0)$. Dabei geht ein ‘‘infinitesimaler’’ Kreis

$$\gamma: t \mapsto \Delta z(t) := r e^{it} \quad (0 \leq t \leq 2\pi), \quad 0 < r \ll 1,$$

in den Kreis

$$S_A(\gamma): t \mapsto \Delta w(t) := |A| r e^{i(t+\alpha)} \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

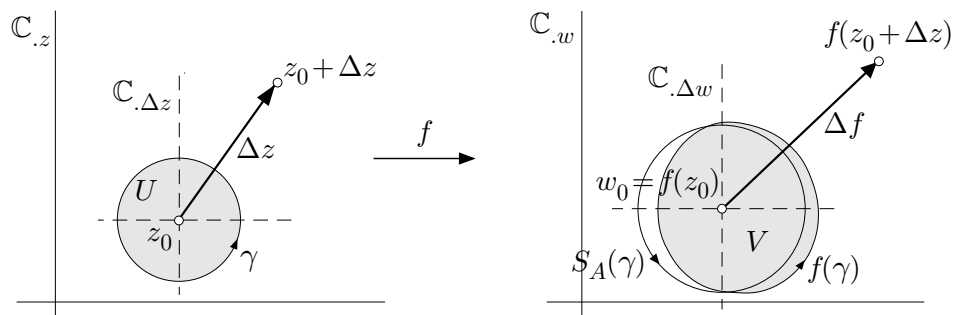


Fig. 2.4.1

vom Radius $|A|r$ über, der ebenfalls in positivem Sinn umläuft. Wir sehen: Ist $f'(z_0) \neq 0$, so bleibt der Umlaufssinn von “infinitesimalen” Kreisen um z_0 erhalten.

Alles in allem hat sich folgendes herausgestellt: Eine kleine Umgebung U des Punktes z_0 , zum Beispiel das Innere des eben betrachteten Kreises γ , wird durch f im wesentlichen *ähnlich* auf eine kleine Umgebung V von w_0 abgebildet. Das tatsächliche f -Bild des Kreises γ ist aber im allgemeinen kein genauer Kreis, sondern bloss eine “kreisförmige” geschlossene Kurve, die einmal in positivem Sinn um den Punkt w_0 herumläuft.

Man kann aber noch mehr sagen. Hierzu betrachten wir Kurven γ durch den Punkt z_0 sowie deren Bildkurven $f(\gamma)$, die dann durch den Punkt w_0 gehen. Die folgende Variante der Kettenregel drückt aus, dass $f'(z_0)$ etwas mit den Tangentenvektoren an diese Kurven zu tun hat. Der Beweis verläuft genau gleich wie der Beweis von (2.2)(c), weshalb wir ihn hier unterdrücken. Im übrigen wird auf die Fig. 2.4.2 verwiesen.

(2.8) Es seien $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}_w$ eine analytische Funktion,

$$\gamma: \mathbb{R} \curvearrowright \Omega, \quad t \mapsto z(t)$$

eine differenzierbare Kurve durch den Punkt $z_0 = z(t_0)$ und

$$f(\gamma): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}_w \quad t \mapsto w(t) := f(z(t))$$

deren Bildkurve in der w -Ebene. Dann gilt

$$\dot{w}(t_0) = f'(z_0) \dot{z}(t_0) \quad (= df(z_0) \cdot \dot{z}(t_0)). \quad (3)$$

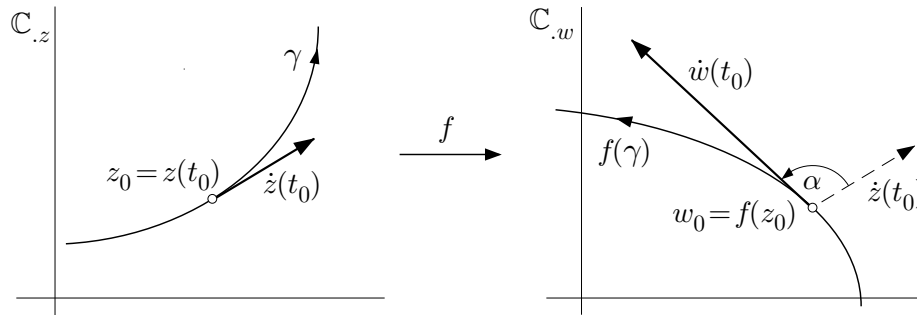


Fig. 2.4.2

Bevor wir uns weiter mit den genannten Kurven beschäftigen, beweisen wir als Nebenprodukt die komplexe Version eines aus dem Reellen bekannten Prinzips:

(2.9) Die Funktion f sei analytisch auf dem Gebiet Ω , und es gelte $f'(z) \equiv 0$ auf Ω . Dann ist f eine konstante Funktion.

□ Da Ω zusammenhängend ist, lassen sich je zwei Punkte $p, q \in \Omega$ durch einen in Ω gelegenen Streckenzug miteinander verbinden. Es genügt daher, folgendes zu beweisen: Liegt die Strecke

$$\sigma: t \mapsto z(t) := (1-t)p + tq \quad (0 \leq t \leq 1)$$

in Ω , so gilt $f(q) = f(p)$. Betrachte hierzu die Hilfsfunktion

$$\phi(t) := f(z(t)) \quad (0 \leq t \leq 1).$$

Nach **(2.8)** und nach Voraussetzung über f ist $\phi'(t) = f'(z(t)) \dot{z}(t) \equiv 0$; hieraus folgt nach dem Mittelwertsatz der reellen Differentialrechnung

$$f(q) = \phi(1) = \phi(0) = f(p). \quad \square$$

Zurück zu **(2.8)**, wobei wir wiederum (2) zugrundelegen. Wir nehmen jetzt an, die Kurve γ gehe zum Zeitpunkt t_0 mit Absolutgeschwindigkeit $v_0 \neq 0$ durch den Punkt z_0 :

$$z(t_0) = z_0, \quad \dot{z}(t_0) = v_0 e^{i\theta} \neq 0.$$

Es sei $w(t_0) = f(z(t_0)) =: w_0$, siehe die Fig. 2.4.2. Mit (3) ergibt sich

$$\dot{w}(t_0) = f'(z(t_0)) \dot{z}(t_0) = A \dot{z}(t_0) = |A| v_0 e^{i(\theta+\alpha)} \neq 0.$$

Wir sehen: Die Bildkurve $f(\gamma)$ hat im Punkt w_0 eine wohlbestimmte Tangentialrichtung $\arg \dot{w}(t_0)$, und zwar ist

$$\arg \dot{w}(t_0) = \arg \dot{z}(t_0) + \alpha, \quad (4)$$

wobei der Winkel α nicht von der betrachteten Kurve abhängt, sondern allein durch den Ableitungswert $f'(z_0)$ bestimmt ist. Die Gleichung (4) besagt daher folgendes: Die Tangentialvektoren von irgendwelchen Kurven durch z_0 werden durch $df(z_0) = S_A$ um den Winkel $\alpha = \arg f'(z_0)$ gedreht.

Betrachten wir also zwei Kurven γ_1 und γ_2 durch den Punkt z_0 , so werden ihre Tangentialvektoren durch $df(z_0)$ um denselben Winkel α gedreht; der von diesen Vektoren eingeschlossene Winkel ψ bleibt daher unter $df(z_0)$ *unverändert*, siehe die Fig. 2.4.3. Man sagt, die Abbildung f sei an der Stelle z_0 **winkeltreu** oder **konform**. Alles in allem haben wir den folgenden Satz bewiesen:

(2.10) *Ist $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ eine analytische Funktion, so ist die von f vermittelte Abbildung in allen Punkten z , in denen $f'(z) \neq 0$ ist, winkeltreu.*

Von diesem Satz gilt auch die Umkehrung:

(2.11) *Die Abbildung*

$$f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}, \quad z = x + iy \mapsto f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

besitze stetige partielle Ableitungen und sei in allen Punkten $z \in \Omega$ winkeltreu. Dann ist f eine analytische Funktion, und es gilt $f'(z) \neq 0$ für alle $z \in \Omega$.

□ Betrachte einen festen Punkt $z_0 \in \Omega$. "Konform" bedeutet, dass die lineare Abbildung $df(z_0)$, die Tangentialvektoren an der Stelle z_0 in solche an der Stelle $w_0 = f(z_0)$ überführt, eine Drehstreckung ist. Ihre reelle (2×2)-Matrix

$$\begin{bmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{bmatrix}_{(x_0, y_0)}$$

hat daher die Form

$$\begin{bmatrix} A \cos \alpha & -A \sin \alpha \\ A \sin \alpha & A \cos \alpha \end{bmatrix}$$

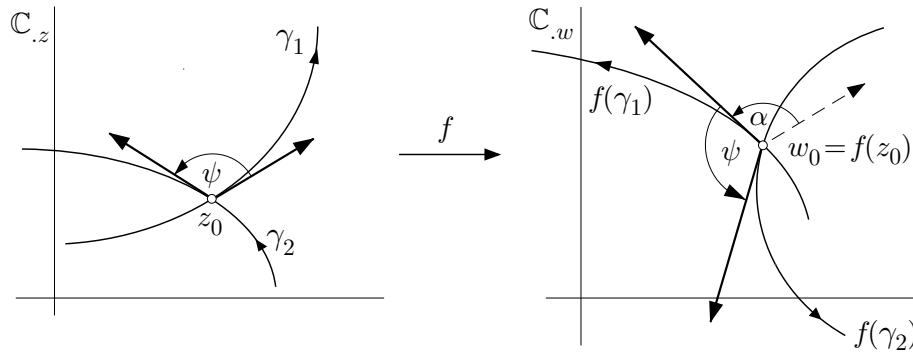


Fig. 2.4.3

mit einem gewissen linearen Streckungsfaktor $A > 0$ und einem gewissen Drehwinkel α . Der Elementvergleich liefert

$$u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0), \quad -u_y(x_0, y_0) = v_x(x_0, y_0);$$

ferner hat man $J_f(z_0) = A^2 \neq 0$. Da $z_0 \in \Omega$ beliebig war, folgt mit Satz (2.6) und 2.3.(6) die Behauptung. \square

Was bleibt von alledem übrig, wenn $f'(z_0) = 0$ ist? Nichts! Man kann dazu folgendes sagen (einiges davon wird später noch bewiesen): Ist f nicht konstant, so liegen die Nullstellen der Ableitung *isoliert*, und in jeder von ihnen verhält sich die Funktion f wie eine Funktion $z \mapsto z^n$, $n \geq 2$, im Ursprung. Kleine Umgebungen eines derartigen Punktes z_0 werden durch f nicht injektiv, sondern “ $n : 1$ ” auf eine Umgebung von $w_0 = f(z_0)$ abgebildet.

Eine winkeltreue Abbildung ist “in kleinsten Teilen ähnlich” und lässt die Schnittwinkel von Kurven unverändert. Insbesondere gehen orthogonale Kurvennetze in orthogonale Netze über. Aus diesem Grund spielen winkeltreue Abbildungen seit altersher in der Kartographie eine Rolle, wo es darum geht, die sphärische Erdoberfläche möglichst unverzerrt auf ein ebenes Blatt Papier abzubilden. Wir beweisen in diesem Zusammenhang:

(2.12) Die stereographische Projektion $\sigma: \overline{\mathbb{C}} \rightarrow S^2$ ist in allen Punkten $z \in \mathbb{C}$ winkeltreu.

\square Das stereographische Bild $\sigma(g)$ einer Geraden $g \subset \mathbb{C}$ wird erhalten, indem man die Ebene durch g und $N = (0, 0, 1)$ mit S^2 schneidet, siehe die Fig. 1.2.2. Somit ist $\sigma(g)$ ein Kreis $\kappa \subset S^2$, der durch den Nordpol

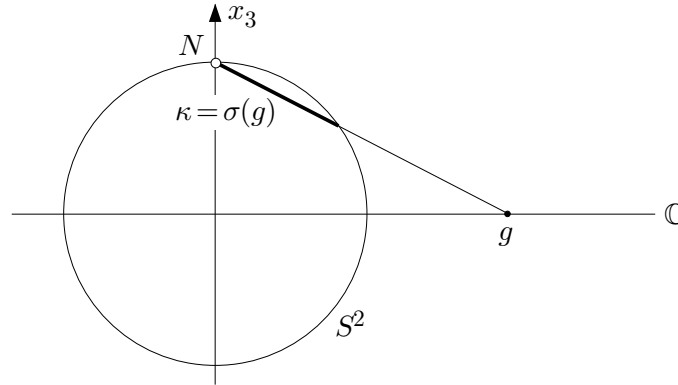


Fig. 2.4.4

$N = (0, 0, 1)$ geht. In der Fig. 2.4.4 ist g projizierend dargestellt, der Kreis κ erscheint dann als Strecke. Man erkennt, dass im Punkt N die Tangente an κ ebenfalls projizierend und damit zur Ausgangsgeraden g parallel ist.

Betrachte nun einen beliebigen Punkt $z \in \mathbb{C}$ und zwei Geraden g_1, g_2 , die sich im Punkt z unter dem Winkel ψ schneiden. Deren stereographische Bilder κ_1, κ_2 schneiden sich in den beiden Punkten $\sigma(z)$ und N . Die beiden Tangenten im Punkt N sind parallel zu g_1 bzw. g_2 , schneiden sich also ebenfalls unter dem Winkel ψ . Dann schneiden sich aber die beiden Kreise κ_1, κ_2 auch in ihrem zweiten Schnittpunkt $\sigma(z)$ unter dem Winkel ψ . Nach ‘‘allgemeinen Prinzipien der Differentialgeometrie’’ folgt hieraus die Behauptung des Satzes. \square

2.5 Konforme Abbildungen von Gebieten

Es seien $\Omega_1 \subset \mathbb{C}_z$ und $\Omega_2 \subset \mathbb{C}_w$ zwei Gebiete. Eine analytische Funktion f , die Ω_1 bijektiv auf Ω_2 abbildet, heisst eine **konforme Abbildung** von Ω_1 auf Ω_2 . Unter den genannten Umständen ist automatisch $f'(z) \neq 0$ für alle $z \in \Omega_1$, und mit Satz (2.7) folgt, dass die Inverse f^{-1} das Gebiet Ω_2 konform auf Ω_1 abbildet. Zwei Gebiete Ω_1 und Ω_2 , die sich konform aufeinander abbilden lassen, werden **konform äquivalent** genannt.

Obwohl eine konforme Abbildung “in kleinsten Teilen ähnlich” abbildet, können konform äquivalente Gebiete global sehr verschieden aussehen. So ist zum Beispiel das Gebiet $\Omega_1 :=$ “offene Schweiz 1 : 1 Mio” konform äquivalent zu dem unendlichlangen Streifen $\Omega_2 := \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \operatorname{Im} z < 1\}$. Es gilt nämlich der folgende zentrale Existenzsatz, genannt **Riemannscher Abbildungssatz**:

(2.13) *Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein beliebiges einfach zusammenhängendes Gebiet $\neq \mathbb{C}$. Dann gibt es eine konforme Abbildung von Ω auf die Einheitskreisscheibe D .*

Aber nicht alles ist möglich. So lassen sich zum Beispiel zwei Kreise

$$\Omega := \{z \mid a < |z| < b\}, \quad \Omega' := \{z \mid a' < |z| < b'\}$$

(Fig. 2.5.1) nur dann konform aufeinander abbilden, wenn $b'/a' = b/a$ ist. Vornehm ausgedrückt: Die “logarithmische Breite” eines Kreisrings ist eine konforme Invariante.

Bevor wir erklären, warum konforme Abbildungen von Gebieten auch für den Anwender interessant sind, behandeln wir einige Beispiele.

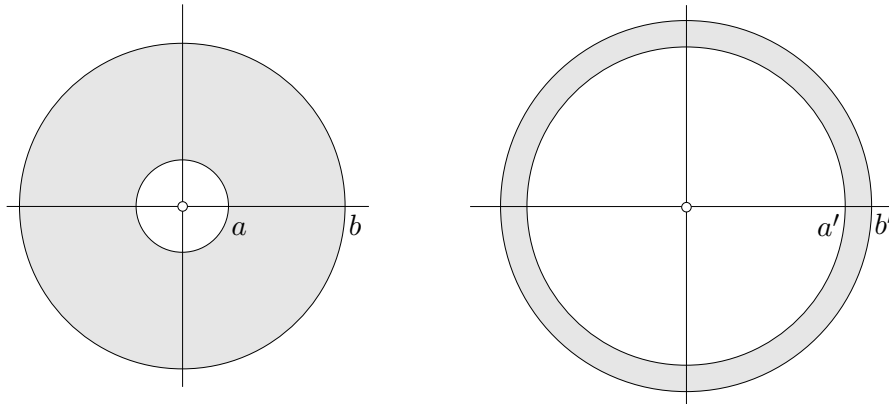


Fig. 2.5.1

① Die Exponentialfunktion $\exp: \mathbb{C}_z \rightarrow \mathbb{C}_w$ bildet Rechtecke

$$\{z = x + iy \mid a < x < b, \alpha < y < \beta\}, \quad -\pi \leq \alpha < \beta \leq \pi,$$

konform auf Kreisringsektoren

$$\{w \mid e^a < |w| < e^b, \alpha < \operatorname{Arg} w < \beta\}$$

ab und zum Beispiel den Streifen

$$S_\eta := \{z \mid |\operatorname{Im} z| < \eta\}, \quad 0 < \eta \leq \pi,$$

konform auf den Sektor

$$K_\eta := \{w \in \mathbb{C}^* \mid -\eta < \operatorname{Arg} w < \eta\}$$

(K für “Keil”, siehe die Fig. 2.5.2). Durch geeignete Zusammensetzung sind wir damit in der Lage, einen beliebigen solchen Keil K_η konform auf die rechte Halbebene $P := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0\}$ abzubilden: Wir setzen

$$f(w) := \exp\left(\frac{\pi}{2\eta} \operatorname{Log} w\right) = \operatorname{pv} w^{\pi/(2\eta)} \quad (w \in K_\eta).$$

Der erste Schritt “Log” bildet K_η auf S_η ab; im zweiten Schritt wird S_η ähnlich vergrößert auf die Breite π , und im dritten Schritt bildet \exp den Streifen $S_{\pi/2}$ auf den Sektor $K_{\pi/2} = P$ ab. Man erkennt an diesem Beispiel, dass Ecken eines gegebenen Gebiets durch geeignete Tricks zum Verschwinden gebracht werden können. \circ

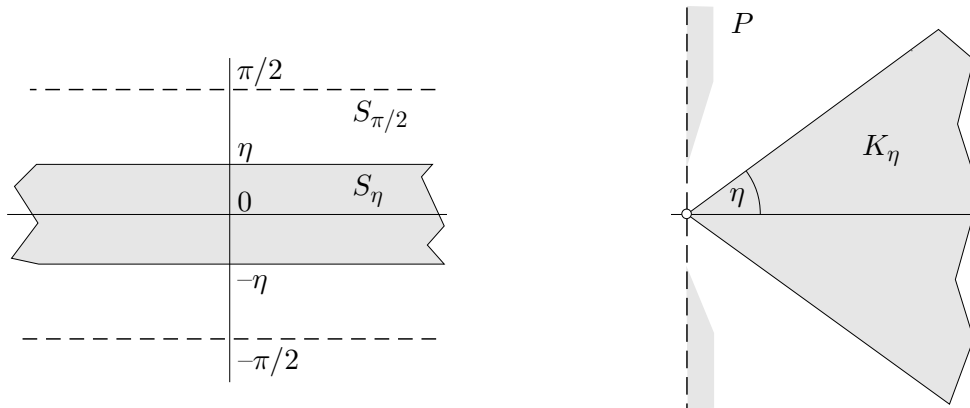


Fig. 2.5.2

② Die Abbildung

$$T(z) := \frac{1 + iz}{1 - iz}$$

ist eine Möbiustransformation. Wir parametrisieren die reelle Achse durch

$$\gamma: \quad t \mapsto z(t) := \tan t \quad \left(-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}\right)$$

und erhalten als Bild die Kurve

$$T(\gamma) : t \mapsto \frac{1 + i \tan t}{1 - i \tan t} = \frac{\cos t + i \sin t}{\cos t - i \sin t} = e^{2it} \quad \left(-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}\right).$$

Hiernach bildet T die reelle Achse auf den Einheitskreis ∂D ab; dabei ist natürlich $T(\infty) = -1$. Aus $T(i) = 0$ ziehen wir den Schluss, dass die obere Halbebene $H := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$ unter T ins Innere von ∂D übergeht; in anderen Worten: T bildet H konform auf D ab, siehe die Fig 2.5.3. Wie man leicht nachrechnet, ist die Umkehrabbildung durch den folgenden Ausdruck gegeben:

$$T^{-1}(w) = i \frac{1 - w}{1 + w}.$$

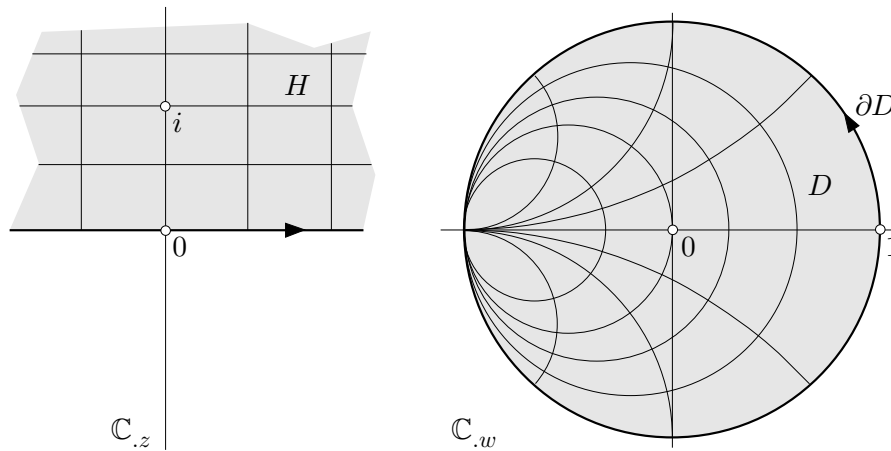


Fig. 2.5.3

Die Abbildung T ist nach Satz (1.2) kreistreu. Ohne weitere Rechnungen ziehen wir daraus die folgenden Schlüsse: Geraden $y = \text{const.}$, $y > 0$, werden in Kreise abgebildet, die durch den Punkt $T(\infty) = -1$ gehen, aber keinen weiteren Schnittpunkt mit ∂D haben. Es handelt sich offenbar um die Schar der Kreise, die ∂D im Punkt -1 von innen berühren. Halbgeraden $x = \text{const.}$, $y > 0$, gehen in Kreisbögen über, die im Punkt -1 beginnen und ∂D senkrecht treffen.



③ Die Funktion

$$J(z) := \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) \quad (|z| > 1)$$

wird gelegentlich **Joukowski-Funktion** genannt, nach einem russischen Aerodynamiker. Um die Abbildung $J: \mathbb{C}_z \curvearrowright \mathbb{C}_w$ geometrisch zu beschreiben, untersuchen wir die Bilder der Kreise

$$\gamma_r: \quad t \mapsto r e^{it} \quad (0 \leq t \leq 2\pi), \quad r \geq 1,$$

sowie die Bilder der Strahlen

$$\sigma_\phi: \quad t \mapsto e^t e^{i\phi} \quad (0 \leq t < \infty), \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi$$

(Fig. 2.5.4). Für $J(\gamma_r)$ erhalten wir die Parameterdarstellung

$$\begin{aligned} J(\gamma_r): \quad t \mapsto w(t) &= \frac{1}{2} \left(r e^{it} + \frac{1}{r} e^{-it} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(r + \frac{1}{r} \right) \cos t + i \frac{1}{2} \left(r - \frac{1}{r} \right) \sin t \quad (0 \leq t \leq 2\pi). \end{aligned}$$

Es handelt sich offensichtlich um eine einmal im Gegenuhrzeigersinn umlaufende Ellipse mit Halbachsen

$$a := \frac{1}{2} \left(r + \frac{1}{r} \right), \quad b := \frac{1}{2} \left(r - \frac{1}{r} \right).$$

Im Grenzfall $r = 1$ ist $b = 0$. Das Bild von ∂D ist somit die bei 1 beginnend hin und zurück durchlaufene Strecke $[-1, 1]$ auf der reellen Achse. Unabhängig von $r \geq 1$ ist $a^2 - b^2 = 1$; die Ellipsen $J(\gamma_r)$ besitzen daher alle die gleichen beiden Brennpunkte ± 1 , sie sind, wie man sagt, **konfokal**. Für $r \rightarrow \infty$ strebt b/a gegen 1; diese Ellipsen werden also immer kreisähnlicher. Man kann aber noch mehr sagen: Für grosse $|z|$ ist $J(z)$ mit guter Näherung $= z/2$; in Worten: Umgebungen von ∞ werden durch J im wesentlichen ähnlich abgebildet.

Für die Strahlen σ_ϕ erhalten wir analog

$$\begin{aligned} J(\sigma_\phi): \quad t \mapsto w(t) &= \frac{1}{2} (e^t e^{i\phi} + e^{-t} e^{-i\phi}) \\ &= \cosh t \cos \phi + i \sinh t \sin \phi \quad (0 \leq t < \infty). \end{aligned}$$

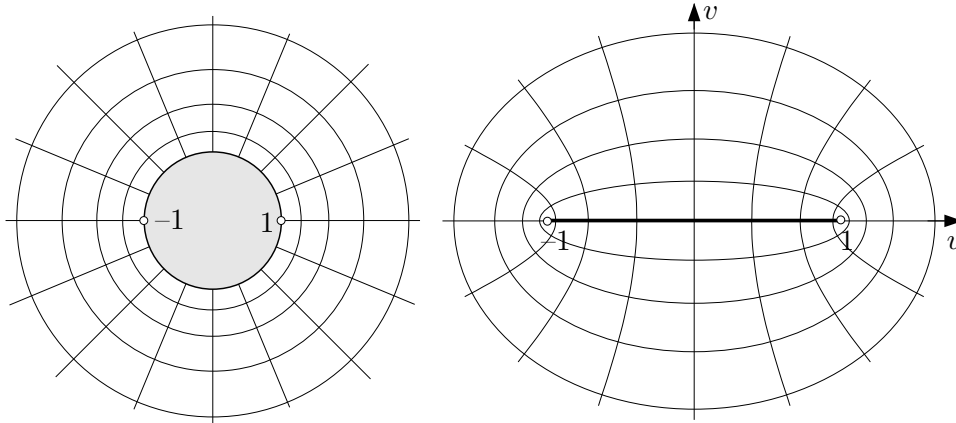


Fig. 2.5.4

Somit genügen die Punkte $w = u + iv \in J(\sigma_\phi)$ der Gleichung

$$\frac{u^2}{\cos^2 \phi} - \frac{v^2}{\sin^2 \phi} = \cosh^2 t - \sinh^2 t \equiv 1;$$

sie liegen also auf einer Hyperbel mit Halbachsen $a := \cos \phi$, $b := \sin \phi$ und Brennpunkten ± 1 . Die Bildkurve $J(\sigma_\phi)$ macht aber nur einen Viertel dieser Hyperbel aus: Der laufende Punkt $w(t)$ startet im Punkt $u = \cos \phi$ auf der reellen Achse und läuft dann auf einem Ast der betreffenden Hyperbel ins Unendliche. In der Fig. 2.5.4 macht es den Anschein, dass wir eine Schar von konfokalen Hyperbeln vor uns haben; in Wirklichkeit liegt eine mit $\phi \in \mathbb{R}/2\pi$ parametrisierte Schar von Halbästen vor.

Zusammengefasst ergibt sich folgendes: Die Joukowskifunktion J bildet das Äussere der Kreisscheibe D konform auf die von -1 bis 1 geschlitzte Ebene $\Omega := \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} \mid -1 \leq z \leq 1\}$ ab.

Wie steht es mit der Umkehrabbildung $J^{-1}: \Omega \rightarrow \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1\}$? Wird die Gleichung

$$w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$$

nach z aufgelöst, so ergibt sich rein formal zunächst

$$z = w \pm \sqrt{w^2 - 1} = w \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{1}{w^2}} \right). \quad (1)$$

Von den beiden Lösungen müssen wir diejenige wählen, die für grosse $|w|$ ungefähr mit $2w$ übereinstimmt. Wir würden also in (1) auf das Pluszeichen tendieren. Aber macht das auch im Komplexen Sinn? Hier hilft uns die folgende Überlegung weiter: Ist $w \in \Omega$, so ist $w \notin [-1, 1]$ und folglich $w^2 \notin [0, 1]$. Hieraus schliesst man auf $1/w^2 \notin [1, \infty[$, also

$$1 - \frac{1}{w^2} \notin]-\infty, 0] \quad \text{bzw.} \quad 1 - \frac{1}{w^2} \in \mathbb{C}^* .$$

Wir dürfen daher von der Quadratwurzel in (1) den Hauptwert nehmen. Der gesuchte “analytische Ausdruck” für die Umkehrabbildung J^{-1} ist damit definitiv gegeben durch

$$J^{-1}(w) = w \left(1 + \text{pv} \sqrt{1 - \frac{1}{w^2}} \right) \quad (w \in \Omega) . \quad \bigcirc$$

Der Zweck des Unternehmens “Konforme Abbildung” ist im allgemeinen folgender: Gegeben ist eine technische Form, zum Beispiel ein Rechteck, ein L-Profil, ein Transformatorblech, das Aussengebiet eines Tragflügelprofils. In einem derartigen zweidimensionalen Bereich $\Omega \cup \partial\Omega$ soll ein gewisses, sagen wir einmal, Potentialproblem oder ein Strömungsproblem behandelt werden. Wenn es gelingt, den gegebenen Bereich auf einen *Standardbereich*, zum Beispiel D oder einen Kreisring, abzubilden, so lassen sich die Symmetrien des Standardbereichs (Fig. 2.5.5), die dort vorhandenen Formeln und speziellen Funktionen, zum Beispiel $\phi \mapsto e^{ik\phi}$, für die Lösung des ursprünglichen, den Bereich Ω betreffenden, Problems heranziehen. Leider ist es nur in ganz wenigen Fällen möglich, eine konforme Abbildung von Ω auf einen Standardbereich explizit anzugeben, und man ist im allgemeinen auf numerische Methoden angewiesen.

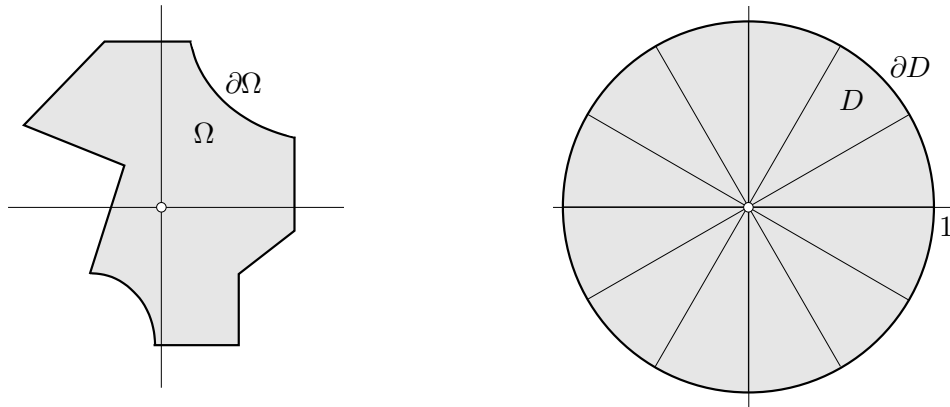


Fig. 2.5.5