3

Der Satz von Cauchy, I

Vorbemerkung: Der Integralsatz von Cauchy in seinen verschiedenen Ausprägungen ist *der zentrale Sachverhalt der Komplexen Analysis.* Philosophisch gesprochen drückt er aus, dass eine analytische Funktion, *jede* analytische Funktion (nicht nur die Beispielfunktionen, die wir bis jetzt angetroffen haben), ein globales Objekt darstellt, das als ganzes so hingenommen werden muss, wie es daherkommt, und zum Beispiel nicht in einem kleinen Teilbereich ein wenig abgeändert werden kann. So ist zum Beispiel eine analytische Funktion $f\colon\ \Omega \to \mathbb{C}$ durch ihre Werte in einer kleinen Umgebung $U(z_0) \subset \Omega$, ja sogar durch ihre Werte auf einer konvergenten Punktfolge $z_k \to a \in \Omega$ auf ganz Ω vollständig bestimmt. Insbesondere sind die Werte im Innern eines berandeten Gebietes $G \subset \Omega$ durch die Werte von f auf dem Rand ∂G vollständig bestimmt. Es gibt dafür sogar eine Integralformel (genaue Voraussetzungen s.u.), nämlich

$$f(z) \;=\; \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \qquad (z \in G)\ .$$

3.1 Komplexe Linienintegrale

Es sei $[\,a, b\,]$ ein Intervall und $f\colon\ [\,a, b\,] \to \mathbb{C}$ eine komplexwertige Funktion. Das Integral von f über $[\,a, b\,]$ ist bekanntlich wie folgt erklärt: Man betrachtet “markierte Zerlegungen” des Intervalls $[\,a, b\,]$ in Teilintervalle $[\,x_{k-1}, x_k\,]$

$(1 \le k \le N)$. Eine derartige Zerlegung ist bestimmt durch die Menge

$$T: \qquad a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b$$

der *Teilungspunkte* (Fig. 3.1.1) und einen zugehörigen Set von *Messpunkten*

$$\xi_k \in [\, x_{k-1}, x_k\,] \qquad (1 \le k \le N)\ .$$

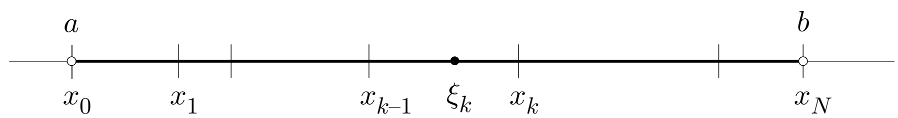

Fig. 3.1.1

Mit Hilfe von derartigen Zerlegungen bildet man dann *Riemannsche Summen*

$$R_T(f) \ := \sum_{k=1}^{N} f(\xi_k)\,(x_k - x_{k-1})\ . \tag{1}$$

Unter geeigneten Voraussetzungen über f ist garantiert, dass der Grenzwert derartiger Summen existiert, wenn das *Korn*

$$\delta(T) \ := \max_{1\le k\le N}(x_k - x_{k-1})$$

gegen 0 geht. Dieser Grenzwert der Riemannschen Summen ist dann eben das **Integral** von f über das Intervall $[\, a, b\,]$ und wird mit

$$\int_{[\,a,b\,]} f(x)\,dx \tag{2}$$

(oder ähnlich) bezeichnet.

Wir haben diese Dinge hier nocheinmal repetiert, weil man nämlich ein Intervall $[\, a, b\,] \subset \mathbb{R}$ als spezielle Kurve in der komplexen Ebene auffassen kann. Wir wollen nun den zu (2) führenden Prozess sinngemäss auf eine Funktion $f\colon\ \Omega \to \mathbb{C}$ und eine beliebige Kurve $\gamma \subset \Omega$ verallgemeinern. Hier ist $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, die Funktion f ist stetig (sie braucht nicht analytisch zu sein), und über γ reden wir noch.

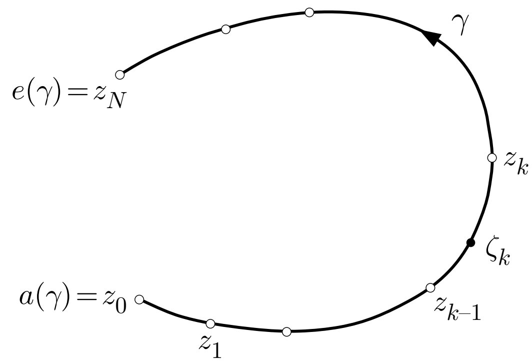

Fig. 3.1.2

Um zu Riemannschen Summen zu kommen, benötigen wir eine "zeitlich gestaffelte" Folge von Punkten z_0, z_1, …, z_N auf γ, wobei z_0 der Anfangspunkt und z_N der Endpunkt von γ sein muss; ferner braucht es für jedes k einen Messpunkt $\zeta_k \in \gamma$ "zeitlich" zwischen z_{k-1} und z_k, siehe die Fig. 3.1.2. Die zugehörige Riemannsche Summe hätte dann in Analogie zu (1) die Gestalt

$$R(f) \;:=\; \sum_{k=1}^{N} f(\zeta_k)\,(z_k - z_{k-1}) \;. \tag{3}$$

Wir nehmen an, dass γ eine stetig differenzierbare Parameterdarstellung

$$\gamma: \quad [\,a,b\,] \to \Omega\,, \qquad t \mapsto z(t) \tag{4}$$

besitzt. Um uns die genannten z_k und ζ_k zu verschaffen, wählen wir eine Teilung

$$T: \qquad a = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = b$$

des in (4) benutzten Parameterintervalls, ferner Messzeiten $\tau_k \in [\,t_{k-1}, t_k\,]$ und setzen

$$z_k := z(t_k) \quad (0 \le k \le N)\,, \qquad \zeta_k := z(\tau_k) \quad (1 \le k \le N)\;.$$

Damit geht (3) über in

$$R(f) \;=\; \sum_{k=1}^{N} f\bigl(z(\tau_k)\bigr)\,\bigl(z(t_k) - z(t_{k-1})\bigr)\;.$$

Nun gilt mit vertretbarem Fehler

$$z(t_k) - z(t_{k-1}) \;\doteq\; \dot z(\tau_k)\,(t_k - t_{k-1}) \qquad (1 \le k \le N)\,,$$

und dieser Fehler ist um so kleiner, je feiner die Teilung T ist. Jedenfalls ergibt sich

$$R(f) \doteq \sum_{k=1}^{N} f\bigl(z(\tau_k)\bigr)\, \dot z(\tau_k)\,(t_k - t_{k-1}) \ .$$

Hier steht auf der rechten Seite eine Riemannsche Summe für das t-Integral

$$\int_a^b f\bigl(z(t)\bigr)\, \dot z(t)\, dt \ , \tag{5}$$

so dass wir insgesamt folgendes sagen können: Die Riemannschen Summen (3) sind näherungsweise gleich dem Integral (5), und der Fehler ist um so kleiner, je feiner die Teilung T ist. Dies bringt uns dazu, das **Linienintegral** der Funktion f längs der Kurve γ wie folgt zu definieren:

$$\int_\gamma f(z)\, dz \ := \ \int_a^b f\bigl(z(t)\bigr)\, \dot z(t)\, dt \ . \tag{6}$$

Diese Definition nimmt auf eine bestimmte Parameterdarstellung der Kurve γ Bezug. Es ist aber ziemlich klar und auch leicht zu beweisen, dass der Wert des Linienintegrals $\int_\gamma f(z)\, dz$ nicht vom gewählten "Fahrplan" (4) abhängt, sondern nur vom "geometrischen Gehalt" der Kurve γ, gemeint ist: wo sie beginnt, wo sie durchgeht und wo sie endet.

Gemäss Definition (6) hat man zur Berechnung des Linienintegrals $\int_\gamma f(z)\, dz$ folgendes zu tun:

1. Wähle eine Parameterdarstellung $z = z(t)$ $(a \le t \le b)$ der Kurve γ. (Richtungssinn beachten!)
2. Setze sie wie folgt ins Integral ein: $z \leftarrow z(t)$, $dz \leftarrow \dot z(t)\, dt$.
3. Integriere nach t von a bis b.

Wir geben nun einige Beispiele.

① Es seien a und b zwei Punkte auf der reellen Achse ($b < a$ zugelassen), und es sei σ der Streckenweg in $\mathbb{C}$ von a nach b. Dann ist

$$\sigma: \quad t \mapsto z := a + t(b-a) \qquad (0 \le t \le 1)$$

eine Parameterdarstellung von σ, und die Definition (6) liefert

$$\int_\sigma f(z)\, dz = \int_0^1 f\bigl(a + t(b-a)\bigr)\,(b-a)dt = \int_a^b f(x)\, dx \ ,$$

wie erhofft. ○

② Wir berechnen die Integrale

$$\int_{\partial D_r} z^n\,dz\,, \qquad n \in \mathbb{Z}\,,$$

wobei

$$\partial D_r: \quad \phi \mapsto z := r\,e^{i\phi} \qquad (0 \le \phi \le 2\pi)$$

den positiv durchlaufenen Randkreis von D_r, $r > 0$, bezeichnet. Es ist $\dot z(\phi) = ir\,e^{i\phi}$, auf Grund des obigen Rezepts ergibt sich daher

$$\int_{\partial D_r} z^n\,dz = \int_0^{2\pi} r^n\,e^{in\phi}\,ir\,e^{i\phi}\,d\phi = ir^{n+1}\int_0^{2\pi} e^{i(n+1)\phi}\,d\phi\ .$$

Nun berechnet man

$$\int_0^{2\pi} e^{i(n+1)\phi}\,d\phi = \begin{cases} \dfrac{1}{i(n+1)} e^{i(n+1)\phi}\Big|_0^{2\pi} = 0 & (n \ne -1) \\ \displaystyle\int_0^{2\pi} 1\,d\phi = 2\pi & (n = -1) \end{cases}$$

und erhält damit definitiv

$$\int_{\partial D_r} z^n\,dz = 0 \quad (n \ne -1)\,, \qquad \int_{\partial D_r} \frac{1}{z}\,dz = 2\pi i\,,$$

unabhängig von r. ○

③ Auf ∂D_r ist $z\,\bar z = r^2$ und folglich $\bar z = r^2/z$. Für die Berechnung des Integrals

$$\int_{\partial D_r} \bar z\,dz$$

können wir daher auf die nochmalige Parameterdarstellung von ∂D_r verzichten und direkt das Resultat des vorangehenden Beispiels verwenden:

$$\int_{\partial D_r} \bar z\,dz = \int_{\partial D_r} \frac{r^2}{z}\,dz = r^2 \cdot 2\pi i\ .$$

○

Das Linienintegral besitzt natürlich die folgenden elementaren Eigenschaften (wir haben z.T. schon davon Gebrauch gemacht):

(**3.1**) (a)
$$\int_\gamma \bigl(f(z)+g(z)\bigr)\,dz = \int_\gamma f(z)\,dz + \int_\gamma g(z)\,dz\ ,$$

(b)
$$\int_\gamma \lambda\, f(z)\,dz = \lambda \int_\gamma f(z)\,dz \qquad (\lambda \in \mathbb{C})\ ,$$

(c)
$$\int_{-\gamma} f(z)\,dz = -\int_\gamma f(z)\,dz\ .$$

(d) *Ist $|f(z)| \leq M$ in allen Punkten $z \in \gamma$, so gilt*

$$\left|\int_\gamma f(z)\,dz\right| \ \leq\ M \cdot L(\gamma)\ ;$$

dabei bezeichnet $L(\gamma)$ die Länge von γ.

In (c) bezeichnet $-\gamma$ die “in umgekehrter Richtung durchlaufene” Kurve γ. Ist γ gegeben durch (4), so ist zum Beispiel

$$-\gamma: \quad t \mapsto z(-t) \qquad (-b \leq t \leq -a)$$

eine Darstellung der Umkehrkurve, wobei der intendierte Richtungssinn nun wieder *wachsendem* t entspricht. Als Anfangspunkt von $-\gamma$ erscheint damit $z\bigl(-(-b)\bigr) = z(b)$ und als Endpunkt $z\bigl(-(-a)\bigr) = z(a)$, wie es sich gehört. — Wir beweisen nur (d):

⌜ Für alle Riemannschen Summen (3) gilt

$$|R(f)| \leq \sum_{k=1}^N |f(\zeta_k)|\,|z_k - z_{k-1}| \leq M \sum_{k=1}^N |z_k - z_{k-1}| \leq M\, L(\gamma)\ ;$$

folglich besteht diese Ungleichung auch noch im Limes. ⌟

Wir müssen uns noch etwas genauer über die “Kurven” unterhalten , längs denen wir integrieren wollen.

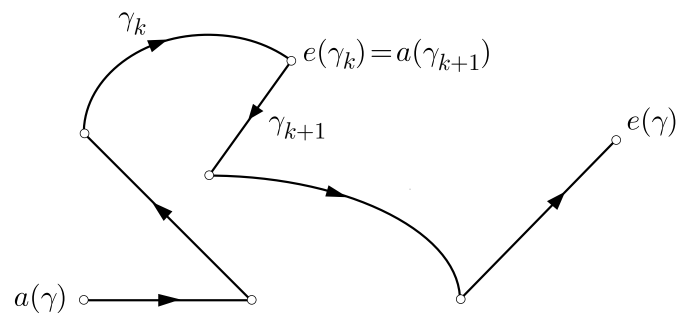

Fig. 3.1.3

Ist die Darstellung

$$\gamma: \quad t \mapsto z(t) \qquad (a \leq t \leq b)$$

stetig differenzierbar und ist dabei $\dot{z}(t) \neq 0$ für alle t, so nennen wir γ einen **(glatten) Bogen**. Ein Bogen hat einen wohlbestimmten **Anfangspunkt** $a(\gamma) := z(a)$ und einen **Endpunkt** $e(\gamma) := z(b)$. Die Punktmenge

$$\mathrm{sp}(\gamma) \ := \ \{z(t) \,|\, a \leq t \leq b\} \ \subset \mathbb{C}$$

heisst die **Spur** von γ. (Wir werden uns weiterhin erlauben, $z \in \gamma$ oder $\gamma \subset \Omega$ zu schreiben, wenn im Grunde genommen die Spur gemeint ist.)

Sind $\gamma_1, \ldots, \gamma_r$ glatte Bögen mit

$$e(\gamma_k) = a(\gamma_{k+1}) \qquad (1 \leq k < r)$$

so erhält man durch Konkatenation (Fig. 3.1.3) eine **stückweise glatte Kurve** γ mit **Anfangspunkt** $a(\gamma) := a(\gamma_1)$ und **Endpunkt** $e(\gamma) := e(\gamma_r)$. Ist $e(\gamma) = a(\gamma)$, so heisst die Kurve γ **geschlossen**. Unter einer **Kurve** verstehen wir im weiteren immer eine stückweise glatte Kurve.

Sind $\gamma_1, \ldots, \gamma_r$ glatte Bögen, so nennen wir eine "formale Linearkombination"

$$\gamma := \sum_{k=1}^{r} c_k \gamma_k \tag{7}$$

mit ganzzahligen Koeffizienten c_k eine **Kette**. Insbesondere lässt sich die Kurve γ von vorher als Kette $\gamma_1 + \ldots + \gamma_r$ auffassen. Eine Kette, die sich als Summe von geschlossenen Kurven darstellen lässt, heisst ein **Zyklus**. Die **Spur** $\mathrm{sp}(\gamma)$ einer Kette γ ist sinngemäss erklärt.

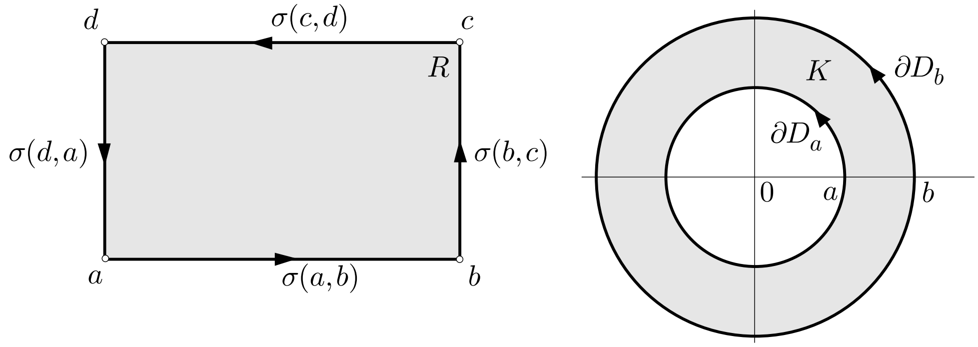

Fig. 3.1.4

④ Sind a und b zwei beliebige komplexe Zahlen, so bezeichnet

$$\sigma(a,b): \quad t \mapsto a + t(b-a) \qquad (0 \leq t \leq 1)$$

den **Streckenweg** von a nach b.

Das Rechteck R der Figur 3.1.4 besitzt als Randzyklus (dieser Begriff wird in Abschnitt 4.2 erklärt) die aus vier Strecken gebildete Kette

$$\partial R \;:=\; \sigma(a,b) + \sigma(b,c) + \sigma(c,d) + \sigma(d,a) \ .$$

Der Kreisring $K := \{ z \in \mathbb{C} \mid a < |z| < b \}$ besitzt den Randzyklus

$$\partial K \;=\; \partial D_b - \partial D_a \ .$$

Das Bild der Kette $\partial D \subset \mathbb{C}_{.z}$ unter der Abbildung $z \mapsto w := z^n$ ist die Kette $n\,\partial D$ in der w-Ebene. ○

Die formale Summenbildung (7) erfolgt natürlich im Hinblick auf die Integration. Das **Integral** der Funktion $f\colon\ \Omega \to \mathbb{C}$ über die in Ω gelegene Kette (7) ist nämlich definiert durch

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{r} c_k \int_{\gamma_k} f(z)\,dz \ ,$$

wobei die Integrale längs den Bögen γ_k durch (6) erklärt sind.

3.2 Der Satz von Cauchy für konvexe Gebiete

Es sei Ω ein beliebiges Gebiet. Die Menge der auf Ω analytischen Funktionen haben wir mit $\mathcal{O}(\Omega)$ bezeichnet; mit $\mathcal{Z}(\Omega)$ bezeichnen wir nun die Menge aller in Ω gelegenen Zyklen. Beim Satz von Cauchy geht es darum, für welche $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ und welche $\gamma \in \mathcal{Z}(\Omega)$ das Integral $\int_\gamma f(z)\,dz$ verschwindet.

Als erstes beweisen wir darüber:

(3.2) *Es sei Ω ein beliebiges Gebiet. Besitzt die stetige Funktion $f\colon\ \Omega \to \mathbb{C}$ eine analytische Stammfunktion $F\colon\ \Omega \to \mathbb{C}$, das heisst: Gilt*

$$F'(z) \;=\; f(z) \qquad (z \in \Omega)\,,$$

so trifft folgendes zu:

(a) *Für jede Kurve $\gamma \subset \Omega$ mit $a(\gamma) = p$ und $e(\gamma) = q$ gilt*

$$\int_\gamma f(z)\,dz \;=\; F(q) - F(p)\,; \tag{1}$$

insbesondere hat das Integral für alle diese Kurven denselben Wert.

(b) *Das Integral $\int_\gamma f(z)\,dz$ hat für alle Zyklen $\gamma \in \mathcal{Z}(\Omega)$ den Wert 0.*

⌜ Es sei zunächst

$$\gamma:\quad t \mapsto z(t) \qquad (a \le t \le b)$$

ein glatter Bogen von p nach q. Betrachte die Hilfsfunktion

$$\Phi(t) := F\bigl(z(t)\bigr) \qquad (a \le t \le b)\ .$$

Wir können dann folgende Rechnung aufmachen:

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z)\,dz &= \int_a^b f\bigl(z(t)\bigr)\dot z(t)\,dt = \int_a^b F'\bigl(z(t)\bigr)\dot z(t)\,dt = \int_a^b \Phi'(t)\,dt \\ &= \Phi(b) - \Phi(a) = F(q) - F(p)\ .\end{aligned}$$

Für eine stückweise glatte Kurve $\gamma = \sum_{k=1}^r \gamma_k$ mit

$$a(\gamma_1) = p, \qquad e(\gamma_k) = a(\gamma_{k+1}) \quad (1 \le k < r), \qquad e(\gamma_r) = q$$

erhält man daher die folgende teleskopierende Summe:

$$\int_\gamma f(z) = \sum_{k=1}^{r} \Big(F\big(e(\gamma_k)\big) - F\big(a(\gamma_k)\big)\Big) = F(q) - F(p)\ .$$

Damit ist (a) bewiesen, und (b) folgt nun sofort, da $\int_\gamma f(z)\,dz$ für beliebige geschlossene Kurven (d.h., wenn $p = q$ ist) verschwindet. $\lrcorner$

Man kann (1) als eine Art "komplexe Version des Hauptsatzes der Infinitesimalrechnung" auffassen. — Um gleich eine Anwendung von Satz **(3.2)** zu geben, verweisen wir auf Beispiel 3.1.②. Wir haben dort gesehen, dass die Integrale $\int_{\partial D} z^n\,dz$ für alle $n \neq -1$ verschwinden. Das ist nun nicht mehr verwunderlich; denn die Funktion $f(z) := z^n$ ist für $n \geq 0$ in der ganzen, für $n < 0$ in der punktierten z-Ebene analytisch und besitzt die Funktion

$$F(z) := \frac{1}{n+1} z^{n+1}$$

als Stammfunktion, letzteres aber nur, falls $n \neq -1$. Im Fall $n = -1$, d.h. $f(z) := 1/z$, gibt es *keine globale Stammfunktion* $F\colon\ \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$, sondern nur *lokale* Stammfunktionen: In der Umgebung des Punktes $z_0 \in \mathbb{C}^*$ ist

$$F(z)\ :=\ \mathrm{Log}(z/z_0)$$

wohldefiniert, und es gilt $F'(z) = 1/z$, wie man leicht nachrechnet.

Jedenfalls hat sich in jenem Beispiel

$$\int_{\partial D} \frac{1}{z}\,dz = 2\pi i \neq 0$$

ergeben. Dieses Resultat soll nun ganz wesentlich verallgemeinert und auch geometrisch interpretiert werden:

(3.3) *Es sei γ ein beliebiger Zyklus, der nicht durch den Punkt $a \in \mathbb{C}$ geht: $a \notin \mathrm{sp}(\gamma)$. Dann ist*

$$n(\gamma, a)\ :=\ \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{z-a}\,dz$$

eine ganze Zahl, nämlich die **Umlaufszahl** *von γ um den Punkt a herum.*

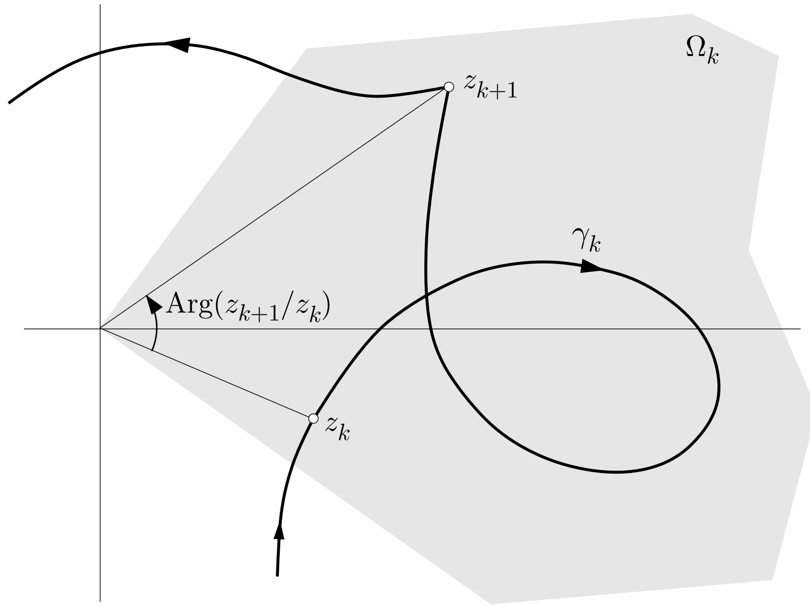

Fig. 3.2.1

⌜ Es genügt, den Fall $a := 0$ und eine einzige geschlossene Kurve $\gamma = \sum_{k=1}^{r} \gamma_k$ zu betrachten. Der Bogen γ_k verbindet z_k mit z_{k+1}, und es ist $z_{r+1} = z_1$, siehe die Fig. 3.2.1. Wir dürfen dabei annehmen, dass jedes γ_k vollständig in einem Sektor Ω_k liegt, in dem $F(z) := \mathrm{Log}(z/z_k)$ wohldefiniert und eine Stammfunktion von $1/z$ ist. Bei der Berechnung von $\int_{\gamma_k} dz/z$ kommt damit (1) zum Zug; es ergibt sich

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_k} \frac{1}{z}\,dz &= F(z_{k+1}) - F(z_k) = \mathrm{Log}(z_{k+1}/z_k) = \ln\left|\frac{z_{k+1}}{z_k}\right| + i\mathrm{Arg}\left(\frac{z_{k+1}}{z_k}\right) \\ &= \ln|z_{k+1}| - \ln|z_k| + i\Delta\phi_k \ .\end{aligned}$$

Hier stellt

$$\Delta\phi_k := \mathrm{Arg}\left(\frac{z_{k+1}}{z_k}\right) \in (\arg z_{k+1} - \arg z_k)$$

die (kleine) Zunahme des Arguments längs γ_k dar. Bei der Summation über k heben sich die reellen Anteile heraus, und es bleibt

$$\int_\gamma \frac{1}{z}\,dz = \sum_{k=1}^{r} \int_{\gamma_k} \frac{1}{z}\,dz = i \sum_{k=1}^{r} \Delta\phi_k$$

Die letzte Summe lässt sich als totale Zunahme des Arguments längs γ interpretieren und ist damit das 2π-fache der Umlaufszahl von γ um 0. ⌟

Von Satz **(3.2)** gilt auch die Umkehrung:

(3.4) *Es sei* Ω *ein beliebiges Gebiet und* $f\colon\ \Omega \to \mathbb{C}$ *eine stetige Funktion mit* $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$ *für alle Zyklen* $\gamma \in \mathcal{Z}(\Omega)$*. Dann trifft folgendes zu:*

(a) *Die Funktion* f *besitzt analytische Stammfunktionen* $F\colon\ \Omega \to \mathbb{C}$.

(b) *Es sei* $a \in \Omega$ *beliebig gewählt. Dann ist die Funktion*

$$F(z) := \int_a^z f(\zeta)\,d\zeta$$

eine Stammfunktion von f*; dabei darf längs einer beliebigen Kurve* γ *von* a *nach* z *integriert werden.*

⌜ Wir müssen nur (b) beweisen. Nach Voraussetzung über Ω und f ist die Funktion F wohldefiniert: Es gibt immer eine Kurve von a nach z, und zwei verschiedene derartige Kurven γ_1, γ_2 liefern dasselbe Integral, da $\gamma_1 - \gamma_2$ ein Zyklus ist.

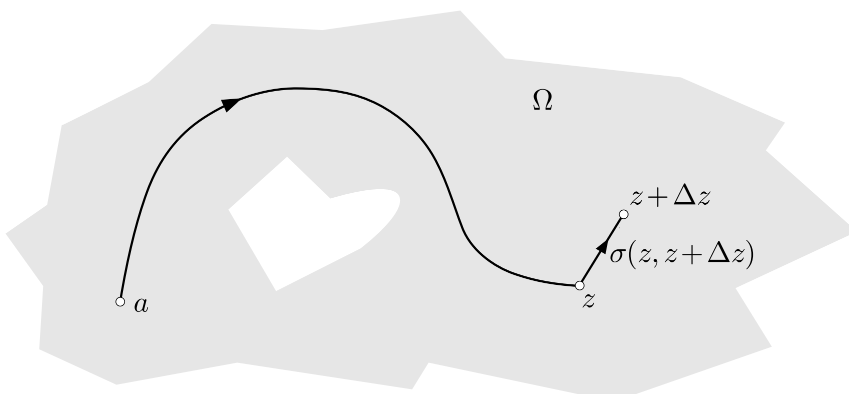

Fig. 3.2.2

Um nun $F' = f$ zu beweisen, halten wir den Punkt $z \in \Omega$ für einen Moment fest und betrachten einen variablen von z aus gemessenen Zuwachs Δz. Es gilt dann (Fig. 3.2.2):

$$F(z + \Delta z) = \int_a^z f(\zeta)\,d\zeta + \int_z^{z+\Delta z} f(\zeta)\,d\zeta = F(z) + \int_z^{z+\Delta z} f(\zeta)\,d\zeta$$

und folglich

$$F(z+\Delta z)-F(z)=\int_{\sigma(z,z+\Delta z)} f(\zeta)\,d\zeta=\int_0^1 f(z+t\Delta z)\,\Delta z\,dt\ .$$

Hieraus schliesst man auf

$$\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}-f(z)=\int_0^1\bigl(f(z+t\Delta z)-f(z)\bigr)\,dt\ ,$$

und hier konvergiert die rechte Seite mit $\Delta z\to 0$ offensichtlich gegen 0, also auch die linke Seite. Dies beweist $F'(z)=f(z)$. $\lrcorner$

Ein Gebiet $\Omega\subset\mathbb{C}$ heisst **konvex**, wenn für je zwei Punkte $z,\ z'\in\Omega$ die Verbindungsstrecke $\sigma(z,z')$ ganz in Ω liegt.

Bsp: Der Streifen $|\mathrm{Im}\,z|<\pi$, die Halbebene $\mathrm{Im}\,z>0$, eine beliebige Kreisscheibe sind konvex; die eingeschnittene Ebene $\mathbb{C}^{-*}$ ist nicht konvex.

Wir zeigen als nächstes, dass jede in einem konvexen Gebiet analytische Funktion f eine analytische Stammfunktion F besitzt. Ein möglicher Ansatz für F wird durch **(3.4)**(b) nahegelegt.

(3.5) *Das Gebiet Ω sei konvex mit $0\in\Omega$, und $f\colon\ \Omega\to\mathbb{C}$ sei analytisch. Dann ist die Funktion*

$$F(z)\ :=\int_{\sigma(0,z)} f(\zeta)\,d\zeta\qquad(z\in\Omega)$$

eine analytische Stammfunktion von f.

Zusatz: Die Behauptung trifft auch dann zu, wenn im Ursprung nur die Stetigkeit von f garantiert ist.

$\ulcorner$ Auf Grund der Parameterdarstellung

$$\sigma(0,z):\quad t\mapsto\zeta(t):=t\,z\qquad(0\le t\le 1)$$

können wir F in der folgenden Form schreiben:

$$F(z)=\int_0^1 f(t\,z)\,z\,dt\ .$$

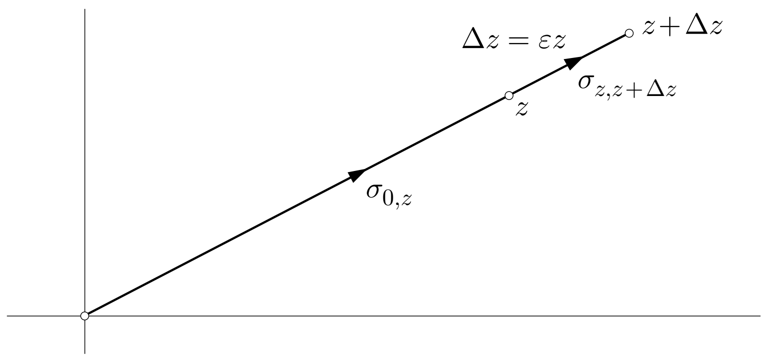

Fig. 3.2.3

Hier ist der Integrand für jedes feste $t \in [0,1]$ eine analytische Funktion von $z \in \Omega$. Mit Hilfe der Leibnizschen Regel über das Differenzieren unter dem Integralzeichen ergibt sich damit $F \in \mathcal{O}(\Omega)$.

Um nun $F' = f$ zu beweisen, betrachten wir (Fig. 3.2.3) ein festes $z \neq 0$ sowie ein $\Delta z := \varepsilon z,\ \varepsilon > 0$. Nach Definition von F gilt dann

$$F(z+\Delta z) - F(z) = \int_{\sigma(z,z+\Delta z)} f(z)\,dz = \int_0^1 f(z+t\Delta z)\,\Delta z\,dt$$

(wie im Beweis des vorangehenden Satzes) und folglich

$$\frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z) = \int_0^1 \bigl(f(z+t\Delta z) - f(z)\bigr)\,dt\ .$$

Hier strebt die rechte Seite mit $\varepsilon \to 0$, d.h. $\Delta z \to 0$, gegen 0, folglich auch die linke Seite. Damit ist $F'(z) = f(z)$ für $z \neq 0$ bewiesen. Dieselbe Rechnung, wobei nun Δz beliebig sein darf, beweist auch $F'(0) = f(0)$.

Den Beweis des Zusatzes verschieben wir auf später, da wir ihn vorderhand noch nicht benötigen. ┘

Die Sätze **(3.5)** und **(3.2)** zusammengenommen liefern nun den **Satz von Cauchy** für konvexe Gebiete:

(3.6) *Die Funktion $f\colon\ \Omega \to \mathbb{C}$ sei analytisch in dem konvexen Gebiet Ω. Dann gilt*

$$\int_\gamma f(z)\,dz\ =\ 0 \qquad \forall \gamma \in \mathcal{Z}(\Omega)\ .$$

Zusatz: Die Behauptung trifft auch dann zu, wenn es einen Ausnahmepunkt $a \in \Omega$ gibt, in dem nur die Stetigkeit von f garantiert ist.

Die Konvexität von Ω ist eigentlich kaum benützt worden; "sternförmig bezüglich 0" hätte auch gereicht. In Wirklichkeit genügt es, das Gebiet Ω einfach zusammenhängend (s.u.) anzunehmen. Besitzt Ω "Löcher", so trifft die Behauptung des Satzes nicht mehr zu; $\int_{\partial D} dz/z = 2\pi i$ ist hierfür das einfachste Beispiel.

① Wir beweisen den Fundamentalsatz der Algebra. Hierzu nehmen wir an, es sei

$$p(z) := z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_0$$

ein Polynom ohne Nullstelle in $\mathbb{C}$. Dann ist die Funktion $f(z) := p'(z)/p(z)$ auf ganz $\mathbb{C}$ analytisch. Wir haben

$$p(z) = z^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{z} + \ldots + \frac{a_0}{z^n}\right) = z^n\bigl(1 + o(1)\bigr) \qquad (z \to \infty)$$

und analog

$$p'(z) = n\, z^{n-1} + \ldots = n\, z^{n-1}\bigl(1 + o(1)\bigr) \qquad (z \to \infty)\ .$$

Die Funktion f lässt sich daher folgendermassen schreiben:

$$f(z) = \frac{n}{z}\bigl(1 + r(z)\bigr)\ , \qquad \lim_{z\to\infty} r(z) = 0\ .$$

Wähle nun R so gross, dass auf ∂D_R durchwegs $|r(z)| < \frac{1}{2}$ ist. Das Integral $Q := \int_{\partial D_R} f(z)\, dz$ müsste nach Satz **(3.6)** den Wert 0 haben. Die Rechnung liefert aber

$$Q = n \int_{\partial D_R} \frac{dz}{z} + n \int_{\partial D_R} \frac{r(z)}{z}\, dz = n(2\pi i + A) \tag{2}$$

mit

$$|A| \le \frac{1/2}{R} \cdot 2\pi R = \pi\ ;$$

dabei haben wir zuletzt die Abschätzung **(3.1)**(d) verwendet. Ein Blick auf (2) zeigt nun, dass $Q = 0$ unmöglich ist — ein Widerspruch. ○

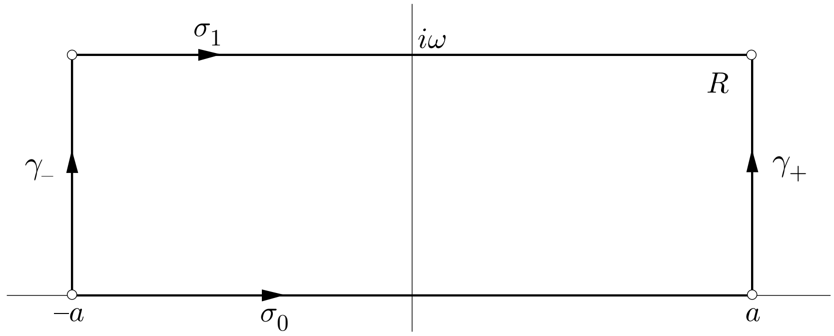

Fig. 3.2.4

② In der Fourier-Analysis (Kapitel 6) wird das Integral

$$q(\omega) \;:=\; \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2} \cos(\omega t)\, dt$$

benötigt. Den Fall $\omega = 0$ kennen wir schon aus der reellen Analysis:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2}\, dt = \sqrt{2\pi}\ . \tag{3}$$

Für gegebenes $\omega > 0$ betrachten wir das Rechteck R der Fig. 3.2.4, wobei wir den Grenzübergang $a \to \infty$ im Auge haben.

Die Funktion $f(z) := e^{-z^2/2}$ ist in der ganzen Ebene analytisch, nach dem Satz von Cauchy ist daher $\int_{\partial R} f(z)\, dz = 0$. Wir können das in der folgenden Form schreiben:

$$\int_{\sigma_0} f(z)\, dz + \int_{\gamma_+} f(z)\, dz - \int_{\sigma_1} f(z)\, dz - \int_{\gamma_-} f(z)\, dz = 0\ . \tag{4}$$

(I) Nach Beispiel 3.1.① und (3) ist

$$\int_{\sigma_0} f(z)\, dz = \int_{-a}^{a} e^{-t^2/2}\, dt = \sqrt{2\pi} + o(1) \qquad (a \to \infty)\ .$$

(II) Der Streckenweg σ_1 besitzt die Parameterdarstellung

$$\sigma_1 : \quad t \mapsto z(t) := i\omega + t \qquad (-a \le t \le a)\ .$$

Damit ergibt sich nacheinander

$$\begin{aligned}\int_{\sigma_1} f(z)\,dz &= \int_{-a}^{a} \exp\bigl((\omega^2 - t^2 - 2i\omega t)/2\bigr)\,dt \\ &= e^{\omega^2/2} \int_{-a}^{a} e^{-t^2/2}\bigl(\cos(\omega t) - i\sin(\omega t)\bigr)\,dt \\ &= e^{\omega^2/2} \int_{-a}^{a} e^{-t^2/2} \cos(\omega t)\,dt \\ &= e^{\omega^2/2}\, q(\omega) + o(1) \qquad (a \to \infty)\ .\end{aligned}$$

(III) Für die beiden vertikalen Segmente

$$\gamma_\pm: \quad t \mapsto z(t) := \pm a + it \qquad (0 \le t \le \omega)$$

ergibt sich

$$\int_{\gamma_\pm} f(z)\,dz = \int_0^\omega \exp\bigl(-(a^2 - t^2 \pm 2iat)/2\bigr)\, i\,dt\ .$$

Wir können das folgendermassen abschätzen:

$$\left|\int_{\gamma_\pm} f(z)\,dz\right| \le e^{-a^2/2} \int_0^\omega e^{t^2/2}\,dt = C\,e^{-a^2/2}\ ,$$

wobei die Konstante C nicht von a abhängt. Hieraus schliessen wir auf

$$\int_{\gamma_\pm} f(z)\,dz = o(1) \qquad (a \to \infty)\ .$$

(IV) Tragen wir die Ergebnisse von (I)–(III) in (4) ein, so ergibt sich

$$\sqrt{2\pi} - e^{\omega^2/2}\, q(\omega) = o(1) \qquad (a \to \infty)\ ,$$

und hieraus schliesst man auf $q(\omega) = e^{-\omega^2/2}\sqrt{2\pi}$, oder ausführlich:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2} \cos(\omega t)\,dt = \sqrt{2\pi}\,e^{-\omega^2/2}\ . \tag{5}$$

○

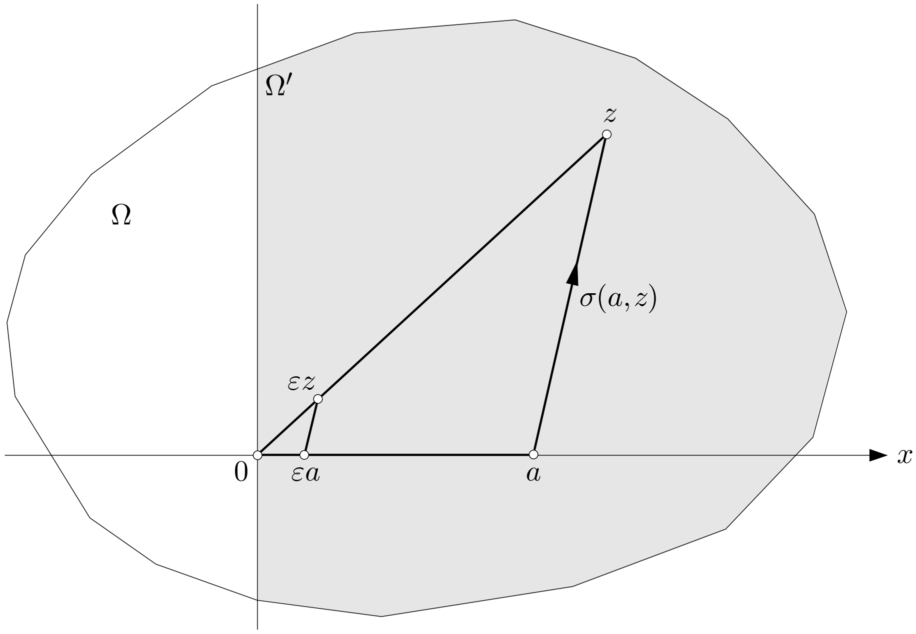

Fig. 3.2.5

Um weiter zu kommen, benötigen wir den in **(3.5)** und **(3.6)** noch zugelassenen Ausnahmepunkt. Wir müssen also den Zusatz zu **(3.5)** beweisen:

⌜ Das “Halbgebiet” $\Omega' := \{z \in \Omega \,|\, x > 0\}$ (siehe die Fig. 3.2.5) ist konvex. Wir wählen einen Punkt $a \in \Omega'$ und definieren die Funktion F_a durch

$$F_a(z) \;:=\; \int_{\sigma(0,a)} f(\zeta)\,d\zeta + \int_{\sigma(a,z)} f(\zeta)\,d\zeta \qquad (z \in \Omega')\ .$$

Auf Grund von **(3.5)** ist F_a eine Stammfunktion von f auf Ω', und nach **(3.6)** ist $\int_\gamma f(\zeta)\,d\zeta$ längs beliebigen Zyklen in Ω' gleich 0. Wir behaupten: Für alle $z \in \Omega'$ gilt

$$F_a(z) \;=\; \int_{\sigma(0,z)} f(\zeta)\,d\zeta\ . \tag{6}$$

Zum Beweis von (6) benützen wir die Abkürzung

$$\int_{\sigma(p,q)} f(\zeta)\,d\zeta \;=:\; S(p,q)\ .$$

Es sei $0 < \varepsilon \ll 1$. Wir können dann folgendermassen argumentieren:

$$\begin{aligned} F_a(z) - S(0,z) &= S(0,a) + S(a,z) + S(z,0) \\ &= S(0,\varepsilon a) + \underline{S(\varepsilon a, a)} + \underline{S(a,z)} + \underline{S(z,\varepsilon z)} \\ &\qquad\qquad + \underline{S(\varepsilon z, \varepsilon a)} + S(\varepsilon a, \varepsilon z) + S(\varepsilon z, 0) \\ &= S(0,\varepsilon a) + S(\varepsilon a, \varepsilon z) + S(\varepsilon z, 0) \ . \end{aligned}$$

Hier wurden im ersten Schritt zwei entgegengesetzt gleiche Beiträge hinzugegeben, und im zweiten Schritt wurde benutzt, dass sich die vier unterstrichenen Beiträge herausheben. Da f in der Umgebung von 0 beschränkt ist, können die drei zuletzt erschienenen Integrale durch geeignete Wahl von ε beliebig klein gemacht werden. Somit gilt in Wirklichkeit $F_a(z) = S(0,z)$, d.h. (6).

Die rechte Seite von (6) hängt nicht von dem betrachteten Halbgebiet Ω' und dem gewählten Punkt a ab. Hieraus können wir den folgenden Schluss ziehen: Die rechte Seite von (6) definiert eine analytische Stammfunktion $F\colon \dot{\Omega} \to \mathbb{C}$ der Funktion f, die im Ursprung den Wert 0 annimmt. Man verifiziert leicht, dass auch die Beziehung $F'(0) = f(0)$ zutrifft. ⌟

Der Leser denkt sich jetzt: Eine typische Mathematikerspitzfindigkeit; soviel Aufwand, um einen Ausnahmepunkt herauszuschinden. Aber der Hammer kommt gleich:

(3.7) *Es seien $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ eine analytische Funktion in dem konvexen Gebiet Ω, γ ein beliebiger Zyklus in Ω und $a \in \mathbb{C}$ ein beliebiger Punkt $\notin \mathrm{sp}(\gamma)$. Dann gilt*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-a}\,dz \ = \ n(\gamma,a)\,f(a) \ .$$

Dies ist die **Integralformel von Cauchy** für konvexe Gebiete.

⌜ Die Funktion

$$g(z) \ := \ \begin{cases} \dfrac{f(z)-f(a)}{z-a} & (z \neq a) \\ f'(a) & (z = a) \end{cases}$$

ist analytisch auf $\dot{\Omega} := \Omega \setminus \{a\}$ und stetig im Punkt a (falls a überhaupt in Ω liegt). Nach dem Satz **(3.6)** ist daher $\int_\gamma g(z)\, dz = 0$ für alle Zyklen $\gamma \in \mathcal{Z}(\Omega)$, und mit Satz **(3.3)** folgt

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{z-a}\, dz = \int_\gamma \frac{f(a)}{z-a}\, dz = 2\pi i\, n(\gamma, a)\, f(a) \qquad \bigl(\gamma \in \mathcal{Z}(\dot{\Omega})\bigr)\ . \qquad \lrcorner$$

In den meisten Anwendungen ist $n(\gamma, a) = 0$ oder $= 1$. Im ersten Fall kann man folgendes sagen: Liegt der Punkt a "ausserhalb" des Zyklus γ, so ist (unter den angegebenen Voraussetzungen über f und Ω)

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{z-a}\, dz = 0\ .$$

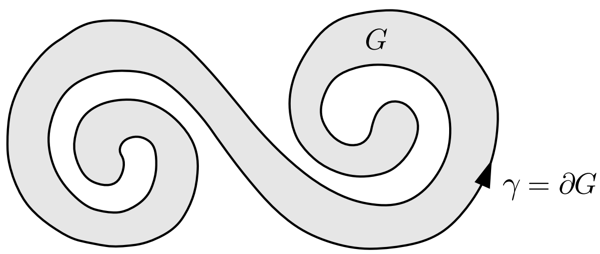

Fig. 3.2.6

Der Fall $n(\gamma, a) = 1$ ist besonders interessant, und es drängt sich auf, hier etwas weiter auszuholen. — Eine geschlossene Kurve $\gamma \subset \mathbb{C}$ heisst **einfach geschlossen** oder auch eine **Jordankurve**, wenn sie keine Selbstdurchdringungen aufweist, mithin das injektive Bild einer Kreislinie ist, siehe die Fig. 3.2.6. Es ist ein berühmter Satz der Geometrie (und schwierig zu beweisen), dass eine Jordankurve die Ebene in genau zwei Gebiete zerlegt: in ein beschränktes **Innengebiet** G und ein unbeschränktes **Aussengebiet**. Nach allfälliger Umkehrung des Richtungssinns gilt $n(\gamma, a) = 1$ für alle $a \in G$ und $n(\gamma, a) = 0$ für alle a im Aussengebiet. Ein so erhaltenes Gebiet G heisst ein **Jordanbereich**, und die Kurve $\gamma =: \partial G$ ist der **Randzyklus** von G.

Aus **(3.7)** ziehen wir nun das folgende Korollar (Fig. 3.2.7):

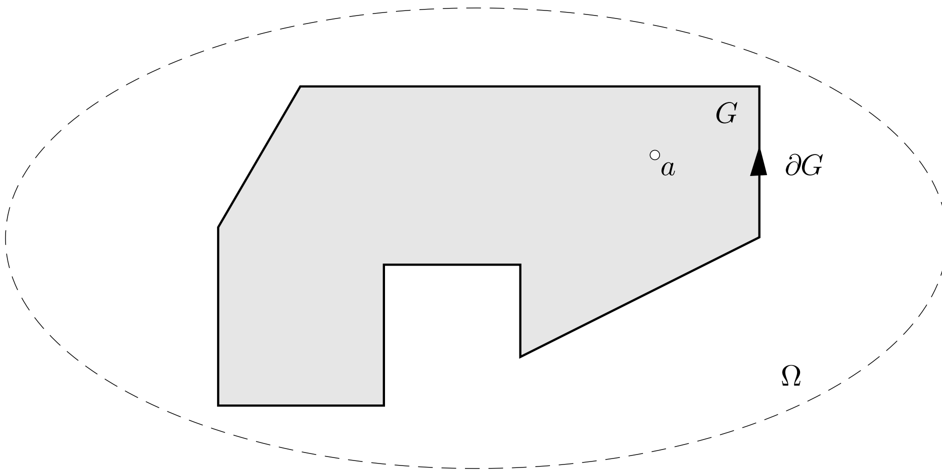

Fig. 3.2.7

(3.8) *Es seien $f : \Omega \to \mathbb{C}$ eine analytische Funktion in dem konvexen Gebiet Ω und $G \subset \Omega$ ein beliebiger Jordanbereich mit Randzyklus $\partial G \in \mathcal{Z}(\Omega)$. Dann gilt*

$$f(a) \;=\; \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial G} \frac{f(z)}{z-a}\,dz \qquad (a \in G)\ .$$

Insbesondere ist der Wert von f in allen Punkten $a \in G$ durch die Werte von f auf ∂G vollständig bestimmt.

3.3 Anwendungen der Integralformel

Im Augenblick haben wir die Integralformel von Cauchy nur für konvexe Definitionsgebiete zur Verfügung. Das reicht aber zur Etablierung der *lokalen* Eigenschaften von analytischen Funktionen vollständig aus. Ist nämlich

$$B_r(a) \;:=\; \bigl\{ z \in \mathbb{C} \;\bigm|\; |z-a| \le r \bigr\}$$

eine abgeschlossene Kreisscheibe in dem beliebigen Gebiet Ω (Fig. 3.3.1), so gibt es eine offene Kreisscheibe Ω' mit einem Radius $\rho > r$, in der f analytisch

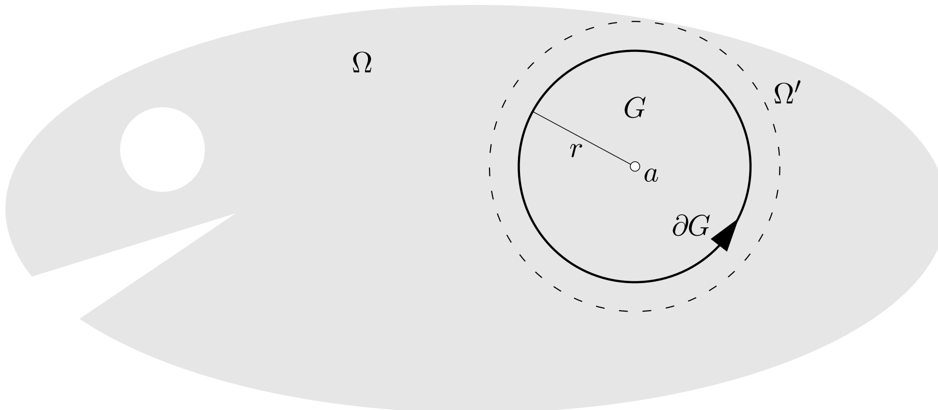

Fig. 3.3.1

ist. Das Innere G von $B_r(a)$ ist ein Jordanbereich in dem konvexen Gebiet Ω' und besitzt den Randzyklus

$$\partial G: \quad \phi \mapsto \zeta(\phi) := a + r\, e^{i\phi} \qquad (0 \le \phi \le 2\pi)\ . \tag{1}$$

Auf diese Situation dürfen wir nun die Integralformel **(3.8)** ohne Bedenken anwenden. — Wir beginnen mit der **Mittelwerts-Eigenschaft**:

(3.9) *Es seien f eine analytische Funktion in dem beliebigen Gebiet Ω und $B_r(a)$ eine abgeschlossene Kreisscheibe in Ω. Dann gilt*

$$f(a) \;=\; \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{i\phi})\, d\phi\ .$$

In Worten: Der Wert von f im Mittelpunkt einer Kreisscheibe $B_r(a) \subset \Omega$ ist gleich dem Mittelwert von f über ihren Rand.

⌜ Wir wenden Satz **(3.8)** an und berechnen das Linienintegral mit Hilfe der Darstellung (1) von ∂G. Es ergibt sich

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{f(\zeta)}{\zeta - a}\, d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(a + r\, e^{i\phi})}{re^{i\phi}}\, i\, r\, e^{i\phi}\, d\phi\ ,$$

und hier hat die rechte Seite nach Kürzen ersichtlich den behaupteten Wert. ⌟

Ein Korollar der Mittelwertseigenschaft ist das sogenannte **Maximumprinzip**:

(3.10) *Eine nichtkonstante analytische Funktion kann im Innern eines Gebietes kein Betragsmaximum und auch kein Maximum des Realteils annehmen.*

⌜ Wir müssen zeigen: Gibt es einen Punkt $z^* \in \Omega$ mit

$$|f(z^*)| = M := \sup\{|f(z)| \mid z \in \Omega\},$$

so ist f konstant auf Ω.

Es sei $|f(z_0)| = M$ für ein $z_0 \in \Omega$. Ist $B_r(z_0) \subset \Omega$, so haben wir auf Grund von **(3.9)** die Abschätzung

$$M = |f(z_0)| \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|f(z_0 + re^{i\phi})\right| d\phi \ .$$

Wegen $|f(z_0 + re^{i\phi})| \le M$ kann das nur gelten, wenn $\left|f(z_0 + re^{i\phi})\right| \equiv M$ ist. Da dies für alle hinreichend kleinen $r > 0$ zutrifft, ist $|f(z)|$ in einer ganzen Umgebung von z_0 konstant gleich M. Hieraus ziehen wir den folgenden Schluss: Die Menge $\Omega_1 := \{z \in \Omega \mid |f(z)| = M\}$ ist offen; ferner ist $\Omega_1 \ne \emptyset$ nach Voraussetzung. Aus Stetigkeitsgründen ist aber auch $\Omega_0 := \{z \in \Omega \mid |f(z)| < M\}$ eine offene Menge. Hiernach ist

$$\phi(z) := \begin{cases} 0 & (z \in \Omega_0) \\ 1 & (z \in \Omega_1) \end{cases}$$

eine stetige Funktion, und da Ω zusammenhängend ist, kann das nur der Fall sein, wenn Ω_0 in Wirklichkeit leer ist.

Wir sehen: $|f|$ und damit $|f|^2$ ist konstant auf Ω, und hieraus folgt leicht mit Hilfe der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen, dass f selber konstant ist.

Ähnlich schliesst man für $\operatorname{Re} f$. ⌟

Wir betrachten nun eine *feste* Kreisscheibe $B_r(a) \subset \Omega$. Es sei wiederum G deren Inneres und (1) ihr Randzyklus. Nach **(3.8)** gilt für alle $z \in G$ die Formel

$$f(z) \ = \ \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial G} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \ .$$

Wir können hier die rechte Seite als ein Integral mit dem Parameter z auffassen, und zwar ist der Integrand für jedes feste $\zeta \in \partial G$ eine analytische

Funktion von $z \in G$. Nach der Leibnizschen Regel dürfen wir unter dem Integralzeichen nach z differenzieren und erhalten

$$f'(z) \;=\; \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial G}\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\,d\zeta \qquad (z \in G)\ .$$

Dieses Prozedere lässt sich offensichtlich iterieren: Für alle $n \geq 0$ gilt

$$f^{(n)}(z) \;=\; \frac{n!}{2\pi i}\int_{\partial G}\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\,d\zeta \qquad (z \in G)\ . \tag{2}$$

Damit haben wir den folgenden Satz bewiesen:

(3.11) (a) *Eine analytische Funktion $f\colon\ \Omega \to \mathbb{C}$ ist in ihrem ganzen Definitionsbereich beliebig oft differenzierbar, und ihre Ableitungen sind selbst wieder analytisch auf Ω.*

(b) *Es sei G eine Kreisscheibe, die samt ihrem Randzyklus in Ω liegt. Dann gilt innerhalb G für alle $n \geq 0$ die Integralformel* (2).

Einen derartigen Satz gibt es im Reellen nicht!

Bsp: Die Funktion $f(t) := |t|^{3/2}$ ist auf $\mathbb{R}$ stetig differenzierbar, aber im Ursprung nicht zweimal differenzierbar.

Mit Hilfe dieses Satzes können wir nun rasch eine Restanz aus dem vorangehenden Abschnitt aus der Welt schaffen. Es geht um jenen ominösen Ausnahmepunkt in den Sätzen **(3.5)** und **(3.6)**. Was ist dort in Wirklichkeit los? Hierauf gibt es eine überraschende Antwort: Die betrachtete Funktion ist auch im Ausnahmepunkt differenzierbar, nur wussten wir es nicht. Es gilt nämlich der folgende starke Satz:

(3.12) *Es sei $\dot\Omega := \Omega \setminus \{a\}$ ein punktiertes Gebiet. Ist die analytische Funktion $f\colon\ \dot\Omega \to \mathbb{C}$ in einer punktierten Umgebung von a beschränkt, so lässt sie sich stetig in den Punkt a hinein fortsetzen, und diese Fortsetzung ist auf ganz Ω analytisch.*

⌈ Betrachte eine kleine Kreisscheibe G mit Mittelpunkt a und in dieser Kreisscheibe die stetige Hilfsfunktion

$$\phi(z) \;:=\; \begin{cases} (z-a)f(z) & (z \neq a) \\ 0 & (z = a) \end{cases}\ .$$

Gemäss dem Zusatz zu **(3.5)** besitzt ϕ in G eine analytische Stammfunktion Φ. Nach **(3.11)** ist Φ' $(=\phi)$ ebenfalls analytisch in G. Hieraus ergibt sich weiter die Existenz des Grenzwerts

$$\lim_{z\to a} f(z) = \lim_{z\to a} \frac{\phi(z)}{z-a} = \lim_{z\to a} \frac{\phi(z)-\phi(a)}{z-a} = \phi'(a)\ .$$

Durch $f(a) := \phi'(a)$ wird daher die gegebene Funktion f stetig in den Punkt a hinein fortgesetzt. Nach dem Zusatz zu **(3.5)** besitzt f in G eine analytische Stammfunktion F, und nach **(3.11)** ist F' $(=f)$ ebenfalls analytisch in G.

⌟

Dies ist der berühmte **Hebbarkeitssatz** von Riemann. Einen derartigen Satz gibt es im Reellen nicht: Die Funktion $t \mapsto \sin(1/t)$ ist in einer punktierten Umgebung von $t=0$ beschränkt und beliebig oft differenzierbar, lässt sich aber nicht stetig in den Ursprung hinein fortsetzen.

① Es ist $\lim_{z\to 0} \dfrac{e^z-1}{z} = 1$. Die Funktion

$$f(z) \ := \begin{cases} \dfrac{z}{e^z-1} & (z \neq 0) \\ 1 & (z=0) \end{cases}$$

ist daher in einer Umgebung von $z=0$ analytisch. ○

Als weitere Anwendung von Satz **(3.11)** geben wir hier die Beweisidee für den Satz von Weierstrass **(2.3)**.

⌜ Zu jedem Punkt $a \in \Omega$ gibt es eine Kreisscheibe G mit Radius $2r > 0$, die samt Rand ∂G in Ω liegt. Dann gilt, siehe die Fig. 3.3.2:

$$|\zeta - z| \geq r \qquad \forall \zeta \in \partial G\,, \quad \forall z \in B_r(a)\ .$$

Mit (2) und **(3.1)**(d) lassen sich nun die $f_k'(z)$ innerhalb $B_r(a)$ folgendermassen abschätzen:

$$|f_k'(z)| \ \leq \ \frac{1}{2\pi}\,\frac{c_k}{r^2}\,2\pi\,2r = \frac{2c_k}{r} \qquad \bigl(z \in B_r(a)\bigr)\ . \tag{3}$$

Wegen $\sum_k c_k < \infty$ folgt hieraus, dass die Reihe $\sum_k f_k'(z)$ auf $B_r(a)$ "gleichmässig in z" konvergiert. Nach allgemeinen Prinzipien stellt sie damit die Ableitung der Summe $\sum_k f_k(z)$ dar.

⌟

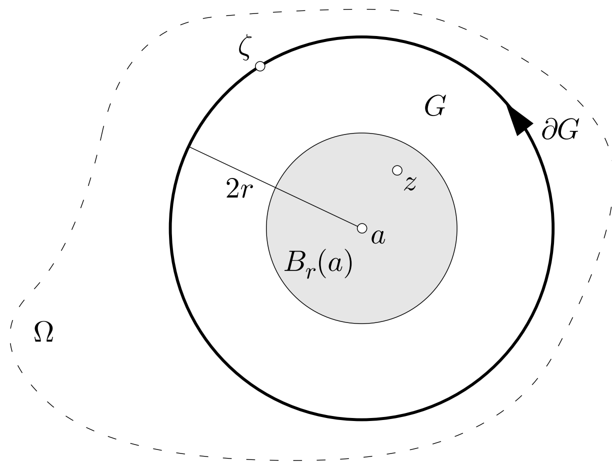

Fig. 3.3.2

Bezeichnet $M(r)$ das Maximum des Betrages von f auf der Kreislinie vom Radius r um den Punkt $a \in \Omega$, so folgt aus (2), ähnlich wie vorher (3), nur einfacher, die Abschätzung

$$\left|f^{(n)}(a)\right| \leq n!\,\frac{M(r)}{r^n}\;,$$

insbesondere

$$|f'(a)| \leq \frac{M(r)}{r}\;. \tag{4}$$

Damit können wir nun den ersten "globalen" Satz über analytische Funktionen beweisen, nämlich den **Satz von Liouville**:

(3.13) *Eine beschränkte auf ganz $\mathbb{C}$ analytische Funktion ist notwendigerweise konstant.*

⌜ Es sei $|f(z)| \leq M$ für alle $z \in \mathbb{C}$ und $a \in \mathbb{C}$ beliebig. Nach (4) gilt $|f'(a)| \leq M/r$ für beliebig grosse r, folglich muss $f'(a) = 0$ sein. Da dies für jedes $a \in \mathbb{C}$ zutrifft, ist f nach **(2.9)** eine Konstante. ⌟

Wir werden nun zeigen, dass sich jede analytische Funktion $f\colon\ \Omega \to \mathbb{C}$ an jeder Stelle $a \in \Omega$ nach Taylor entwickeln lässt, wobei diese Reihe die Funktion in einer maximal möglichen Kreisscheibe tatsächlich darstellt:

(3.14) *Es sei $f\colon\ \Omega \to \mathbb{C}$ eine analytische Funktion, und es sei $a \in \Omega$ ein Punkt im Abstand $\rho > 0$ ($\rho = \infty$ zugelassen) vom Rand von Ω. Dann gilt*

$$f(z) \ = \ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,(z-a)^k$$

für alle $z \in D_\rho(a)$.

Im Hinblick auf spätere Zwecke beweisen wir vorweg das folgende Lemma, siehe die Fig 3.3.3:

(3.15) *Die Funktion f sei stetig auf der Kreislinie ∂D_r, und die Funktion g sei definiert durch*

$$g(z) \ := \ \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta \qquad (z \notin \partial D_r)\ .$$

Dann gilt

$$g(z) \ = \ \begin{cases} \displaystyle\sum_{k\geq 0} c_k z^k & (|z| < r) \\ \displaystyle -\sum_{k<0} c_k z^k & (|z| > r) \end{cases} \ ,$$

wobei die c_k gegeben sind durch

$$c_k \ := \ \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta^k}\,\frac{d\zeta}{\zeta} \qquad (k \in \mathbb{Z})\ . \tag{5}$$

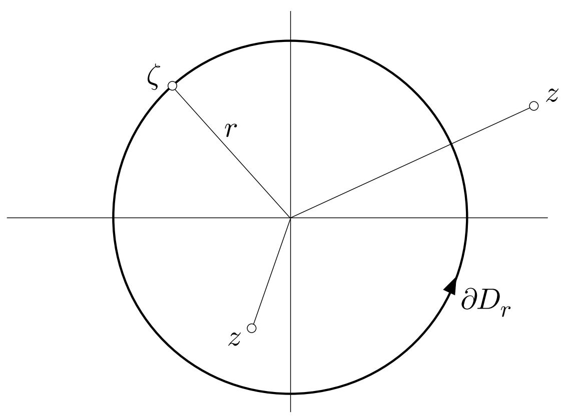

Fig. 3.3.3

⌜ Es sei zunächst $|z| < r$. Für alle $\zeta \in \partial D_r$ ist dann $|z/\zeta| = |z|/r < 1$, und wir können $\dfrac{1}{\zeta - z}$ wie folgt in eine geometrische Reihe entwickeln:

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta}\,\frac{1}{1 - z/\zeta} = \frac{1}{\zeta}\,\sum_{k\geq 0}\left(\frac{z}{\zeta}\right)^k \qquad (\zeta \in \partial D_r)\ .$$

Damit ergibt sich

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_r} f(\zeta)\,\sum_{k\geq 0}\left(\frac{z}{\zeta}\right)^k\frac{d\zeta}{\zeta} = \sum_{k\geq 0}\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_r} z^k\,\frac{f(\zeta)}{\zeta^k}\,\frac{d\zeta}{\zeta} = \sum_{k\geq 0} c_k z^k\ ,$$

wie behauptet.

Für den Aussenbereich schliessen wir ganz ähnlich: Ist $|z| > r$, so gilt für alle $\zeta \in \partial D_r$ die Abschätzung $|\zeta/z| = r/|z| < 1$, und wir können die konvergente Reihe

$$\frac{1}{\zeta - z} = -\frac{1}{z}\,\frac{1}{1 - \zeta/z} = -\frac{1}{z}\,\sum_{k\geq 0}\left(\frac{\zeta}{z}\right)^k = -\,\frac{1}{\zeta}\,\sum_{k<0}\left(\frac{z}{\zeta}\right)^k \qquad (\zeta \in \partial D_r)$$

ansetzen. Damit ergibt sich wie vorher

$$g(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_r} f(\zeta)\,\sum_{k<0}\left(\frac{z}{\zeta}\right)^k\frac{d\zeta}{\zeta} = \ldots = -\sum_{k<0} c_k z^k\ .$$ ⌟

Die eine Hälfte dieses Lemmas liefert uns nun den Beweis von Satz **(3.14)**:

⌜ Wir dürfen ohne Einschränkung der Allgemeinheit $a = 0$ annehmen. Betrachte ein festes $z \in D_\rho$ und wähle ein r mit $|z| < r < \rho$. Wir können dann die Integralformel von Cauchy auf die Kreisscheibe D_r anwenden und erhalten mit **(3.15)** die folgende Darstellung von f:

$$f(z)\ =\ \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_r}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta = \sum_{k=0}^{\infty} c_k\, z^k\ .$$

Die Koeffizienten c_k berechnen sich mit Hilfe von (5) und (2) zu

$$c_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{k+1}}\, d\zeta = \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \qquad (k \geq 0)\,,$$

wie behauptet. ⌟

② In der reellen Analysis hatten wir

$$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - \ldots \qquad (-1 < t < 1)\ .$$

Die Funktion linker Hand ist für alle $t \in \mathbb{R}$ definiert, wird aber nur in dem Intervall $]-1,1[$ durch die angegebene Reihe dargestellt. Grund: Es handelt sich um die Taylor-Entwicklung der Funktion

$$f(z) \ := \ \frac{1}{1+z^2}$$

im Ursprung. Diese Funktion ist in D analytisch, aber in den Punkten $\pm i$ nicht definiert (bzw. $= \infty$). Das ρ in Satz **(3.14)** ist daher $= 1$. ○

Die folgenden zwei Prinzipien sind gelegentlich nützlich; sie zeigen, dass eine analytische Funktion f schon durch relativ wenige Daten (die sich überdies auf die unmittelbare Umgebung eines einzigen Punktes a beziehen) in ihrem ganzen Definitionsbereich eindeutig festgelegt ist.

(3.16) *Es sei f eine analytische Funktion in dem Gebiet Ω.*

(a) *Gibt es einen Punkt $a \in \Omega$ mit*

$$f^{(k)}(a) = 0 \qquad \forall k \in \mathbb{N}\,, \tag{6}$$

so ist $f(z) \equiv 0$ in Ω.

(b) *Gibt es einen Punkt $a \in \Omega$ und eine gegen a konvergente Punktfolge $\bigl(z_k \bigm| k \geq 0\bigr)$ mit $f(z_k) = 0$ für alle k, so ist $f(z) \equiv 0$ auf Ω.*

⌜ (a) Gilt (6), so ist f nach **(3.14)** in einer ganzen Umgebung von a identisch 0. Hieraus folgt weiter: Die Menge Ω_0 der Punkte $a \in \Omega$, für die (6) gilt, ist offen; ferner ist $\Omega_0 \neq \emptyset$ nach Voraussetzung. Die Menge Ω_1 der Punkte $a \in \Omega$, für die wenigstens ein $f^{(k)}(a) \neq 0$ ist, ist ebenfalls offen aus Stetigkeitsgründen. Wie im Beweis von Satz **(3.10)** zieht man hieraus den Schluss, dass Ω_1 leer ist.

(b) Ist $f(z)$ nicht identisch 0, so können im Punkt a nicht alle Ableitungen verschwinden. Ist $f^{(n)}(a)$ die erste nichtverschwindende Ableitung, so beginnt die Taylor-Entwicklung von f an der Stelle a mit $f^{(n)}(a)(z-a)^n/n!$, und man kann einen Faktor $(z-a)^n$ aus der Reihe herausziehen. In anderen Worten, es gilt

$$f(z) = (z-a)^n g(z)\,, \qquad g(a) = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \neq 0\,, \tag{7}$$

für eine gewisse Funktion $g \in \mathcal{O}(\Omega)$. Aus Stetigkeitsgründen ist dann $g(z) \neq 0$ in einer ganzen Umgebung von a, im Widerspruch zur Annahme über f. ┘

③ In (b) ist die Voraussetzung $a \in \Omega$ wesentlich, wie das folgende Beispiel zeigt: Die Funktion $f(z) := \sin(\pi/z)$ ist analytisch in dem Gebiet $\mathbb{C}^*$ und besitzt Nullstellen in den Punkten $\pm 1/k$, die sich bei 0 häufen. Trotzdem ist $f(z) \not\equiv 0$. ○

Aus Satz **(3.16)** folgt insbesondere, dass die Nullstellen einer nichtkonstanten analytischen Funktion isoliert liegen und eine wohlbestimmte endliche Ordnung im Sinne von (7) haben. — Wir geben noch eine Anwendung von **(3.16)** und verweisen dazu auf die Fig. 3.3.4.

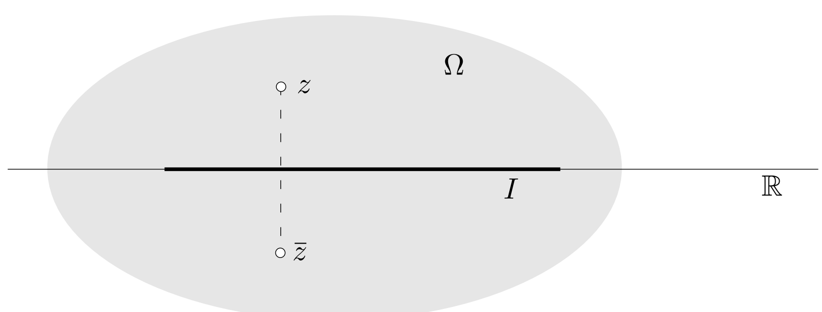

Fig. 3.3.4

(3.17) (a) *Ist $f\colon I \to \mathbb{C}$ eine gegebene Funktion auf dem Intervall $I \subset \mathbb{R}$, so ist es auf höchstens eine Art möglich, dieses f zu einer analytischen Funktion $\tilde{f}\colon \Omega \to \mathbb{C}$ auf ein Gebiet $\Omega \supset I$ fortzusetzen.*

(b) *Es sei* $f\colon\ \Omega \to \mathbb{C}$ *eine analytische Funktion. Enthält* Ω *ein Intervall* $I \subset \mathbb{R}$ *und ist* f *reellwertig auf* I*, so gilt*

$$f(\bar{z}) \;=\; \overline{f(z)} \qquad \forall z \in \Omega\,; \tag{8}$$

d.h., die Funktion f *nimmt in zu* $\mathbb{R}$ *spiegelbildlich gelegenen Punkten konjugiert komplexe Werte an.*

Nach (a) sind zum Beispiel die Funktionen

$$\sin z := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\,, \qquad \tanh z := \frac{e^{z} - e^{-z}}{e^{z} + e^{-z}}\,, \qquad \operatorname{Log} z := \ln|z| + i\operatorname{Arg} z$$

nicht nur die einfachstmöglichen, sondern die einzig möglichen analytischen Fortsetzungen der reellen Funktionen sin, tanh und ln ins Komplexe. — Vom **Spiegelungsprinzip** (b) gibt es verschiedene Varianten; so kann man zum Beispiel auch die Spiegelung an einem Kreis betrachten.

⌜ Wir müssen nur (8) beweisen und dürfen dabei annehmen, dass Ω bezüglich der reellen Achse symmetrisch ist. Die Funktion

$$g(z) \;:=\; \overline{f(\bar{z})} \qquad (z \in \Omega)$$

genügt, wie man leicht nachrechnet, den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen. Folglich ist $g \in \mathcal{O}(\Omega)$. Da g auf I mit f übereinstimmt, ist in Wirklichkeit $g = f$, das heisst, es gilt

$$f(z) \;=\; \overline{f(\bar{z})} \qquad (z \in \Omega)\,,$$

in Übereinstimmung mit (8). ⌟