4

Der Satz von Cauchy, II

4.1 Die allgemeine Integralformel

Wir haben bewiesen $\bigl($Satz **(3.6)**$\bigr)$: Ist f eine analytische Funktion in dem konvexen Gebiet Ω, so gilt

$$\int_\gamma f(z)\,dz \;=\; 0 \qquad \forall \gamma \in \mathcal{Z}(\Omega)\ .$$

Was bleibt von dem übrig, wenn das Gebiet Ω nicht konvex ist, insbesondere, wenn Ω Löcher hat? Wir ahnen es: Bei Zyklen $\gamma \in \mathcal{Z}(\Omega)$, die um ein Loch von Ω herumgehen, gibt es Schwierigkeiten. Wir müssen uns also mit dem **Komplement** von Ω beschäftigen, das ist die Menge

$$\complement\Omega \;:=\; \bigl\{z \in \mathbb{C} \bigm| z \notin \Omega\bigr\}\ .$$

Das Komplement von Ω (Fig. 4.1.1) besteht im allgemeinen aus mehreren zusammenhängenden Teilen, den sogenannten **Komponenten** von $\complement\Omega$. Die beschränkten Komponenten von $\complement\Omega$ sind die besagten "Löcher", das können auch isolierte Punkte sein. Unbeschränkte Komponenten von $\complement\Omega$ sind harmlos, da ein Zyklus nicht um sie herumgehen kann.

Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein beliebiges Gebiet. Ein Zyklus $\gamma \in \mathcal{Z}(\Omega)$ heisst **nullhomolog modulo** Ω, wenn der folgende Sachverhalt zutrifft:

$$n(\gamma, a) \;=\; 0 \qquad \forall a \in \complement\Omega\,; \tag{1}$$

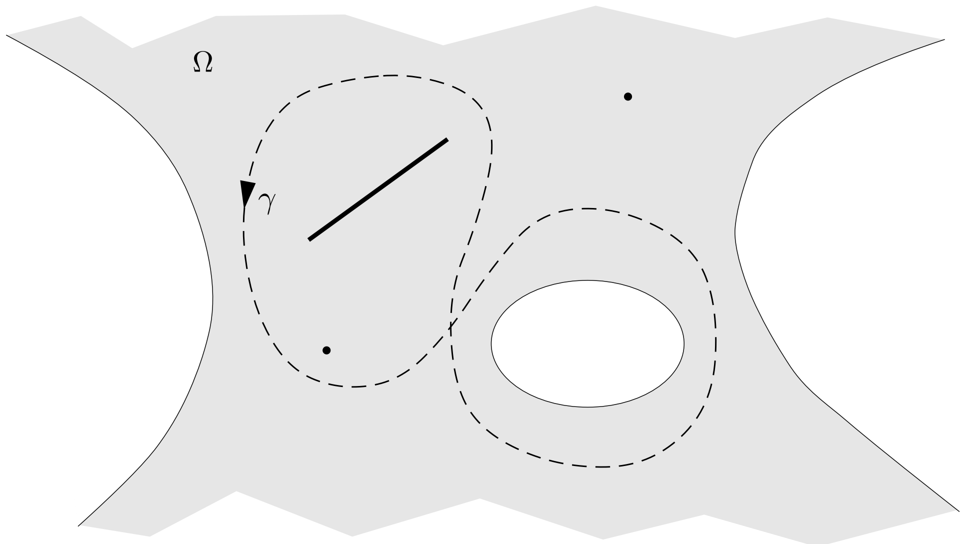

Fig. 4.1.1

anschaulich ausgedrückt: wenn γ um kein Loch von Ω herumgeht. Die Gesamtheit aller modulo Ω nullhomologen Zyklen bezeichnen wir mit $\mathcal{Z}_0(\Omega)$.

Sind a und a' zwei Punkte in der gleichen Komponente von $\complement\Omega$, so gilt $n(\gamma, a) = n(\gamma, a')$. Ist C eine unbeschränkte Komponente von $\complement\Omega$ und wird $a \in C$ hinreichend weit aussen gewählt, so ist $n(\gamma, a) = 0$. Hieraus lässt sich der folgende Schluss ziehen: Um zu prüfen, ob γ modulo Ω nullhomolog ist, genügt es, den Test (1) für je einen Punkt a in jedem Loch von Ω durchzuführen.

Wir beweisen gleich die **allgemeine Integralformel**:

(4.1) *Es seien Ω ein beliebiges Gebiet, $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ eine analytische Funktion, $\gamma \in \mathcal{Z}_0(\Omega)$ ein nullhomologer Zyklus und $a \in \Omega$ ein beliebiger Punkt $\notin \operatorname{sp}(\gamma)$. Dann gilt*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - a}\,d\zeta \;=\; n(\gamma, a)\, f(a)\ .$$

⌜ Betrachte für festes $\zeta \in \Omega$ die Hilfsfunktion

$$F_\zeta(z) \;:=\; \begin{cases} \dfrac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} & (z \neq \zeta) \\ f'(\zeta) & (z = \zeta) \end{cases}\ . \qquad (2)$$

Auf Grund von Satz **(3.12)** ist F_ζ auf ganz Ω analytisch. Wir bilden nun die weitere Funktion

$$h(z) := \begin{cases} \displaystyle\int_\gamma F_\zeta(z)\,d\zeta & (z \in \Omega) \\ \displaystyle\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta & \big(n(\gamma, z) = 0\big) \end{cases} , \tag{3}$$

wobei wir uns zunächst davon überzeugen müssen, dass die beiden angegebenen Ausdrücke im Zusammenfall $(z \in \Omega) \wedge \big(n(\gamma, z) = 0\big)$ denselben Wert haben.

Liegt dieser Fall vor, so gilt

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{\zeta - z}\,d\zeta = 2\pi i\, f(z)\, n(\gamma, z) = 0$$

und folglich nach Definition von F_ζ:

$$\int_\gamma F_\zeta(z)\,d\zeta = \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta \ .$$

Die Funktion h ist durch (3) nicht nur für Punkte $z \in \Omega$ erklärt, sondern in Wirklichkeit für alle $z \in \mathbb{C}$! Ist nämlich $z \in \complement\Omega$, so gilt nach Voraussetzung über γ die Bedingung $n(\gamma, z) = 0$; in einer ganzen Umgebung eines derartigen Punktes z ist daher die untere Alternative von (3) anwendbar.

Alles in allem ergibt sich mit Hilfe der Leibnizschen Regel über das Differenzieren unter dem Integralzeichen: Die Funktion h ist ganz-analytisch. Für alle hinreichend grossen $|z|$ ist die untere Alternative von (3) anwendbar; man entnimmt ihr $\lim_{z\to\infty} h(z) = 0$. Mit Hilfe des Satzes von Liouville schliesst man hieraus auf $h(z) \equiv 0$.

Liegt der Punkt $z := a \in \Omega$ nicht auf $\mathrm{sp}(\gamma)$, so dürfen wir den F_ζ definierenden Ausdruck während der Integration auseinandernehmen und erhalten

$$\begin{aligned} 0 = h(a) = \int_\gamma F_\zeta(a)\,d\zeta &= \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - a}\,d\zeta - \int_\gamma \frac{f(a)}{\zeta - a}\,d\zeta \\ &= \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - a}\,d\zeta - 2\pi i\, n(\gamma, a)\, f(a) \ . \end{aligned}$$

$\lrcorner$

Es sei G ein beliebiges Gebiet und $\mathrm{rd}\, G$ die Menge seiner Randpunke. Gibt es einen Zyklus γ, der bezüglich allen $z \in G$ die Umlaufszahl $n(\gamma, z) = 1$ hat und bezüglich allen $z \in \complement(G \cup \operatorname{rd} G)$ die Umlaufszahl $n(\gamma, z) = 0$, so heisst γ der **Randzyklus** von G und wird mit ∂G bezeichnet. Die Spur von ∂G ist dann gerade die Randmenge von G, und das Gebiet G liegt überall, wo es an ∂G anstösst, *zur Linken* von ∂G. Nicht jedes Gebiet hat einen Randzyklus. Die Fig. 4.1.2 zeigt einige Gebiete, die einen Randzyklus besitzen und einige, die keinen besitzen; letztere sind mit einem $\times$ gekennzeichnet.

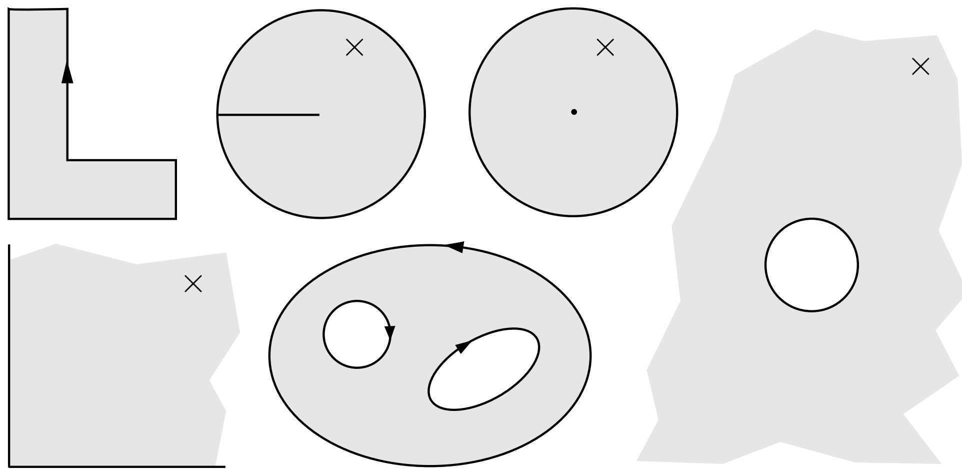

Fig. 4.1.2

Aus der allgemeinen Integralformel ergibt sich nun sofort die folgende Verallgemeinerung von Satz **(3.8)** über die Darstellung einer Funktion durch ihre Randwerte:

(4.2) *Die Funktion f sei analytisch in dem beliebigen Gebiet Ω, und es sei G ein Gebiet mit Randzyklus ∂G, das samt Rand in Ω enthalten ist. Dann gilt*

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{f(z)}{z-a}\, dz \qquad (a \in G)\ .$$

⌜ Der Zyklus ∂G (Fig. 4.1.3) ist nullhomolog modulo Ω: Ein Punkt $z \in \complement\Omega$ liegt erst recht ganz ausserhalb G; folglich ist $n(\partial G, z) = 0$. Anderseits hat ∂G um jeden Punkt $a \in G$ die Umlaufszahl 1. Die Behauptung ergibt sich daher unmittelbar aus **(4.1)**. ⌟

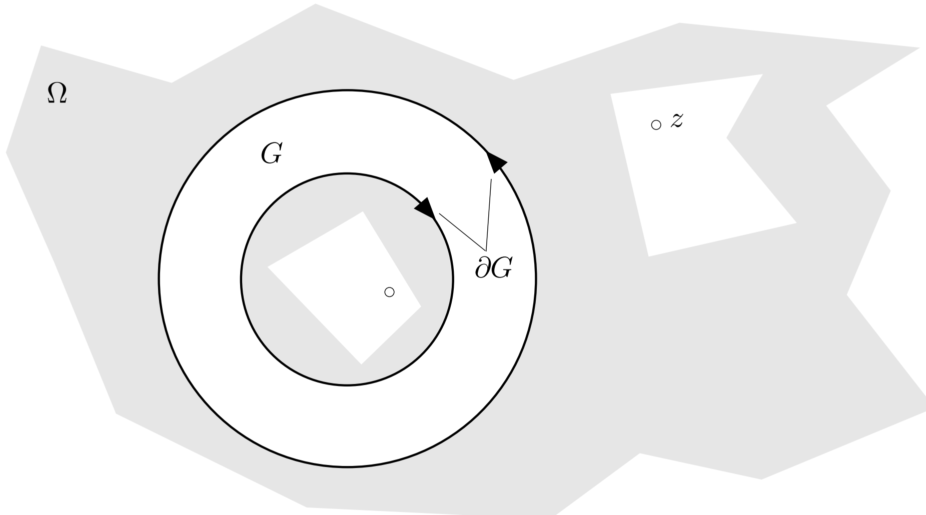

Fig. 4.1.3

4.2 Der allgemeine Satz von Cauchy

Der **allgemeine Satz von Cauchy** ist ein weiteres einfaches Korollar der allgemeinen Integralformel:

(4.3) *Es sei f eine analytische Funktion in dem beliebigen Gebiet Ω. Dann gilt*

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0 \qquad \forall\,\gamma \in \mathcal{Z}_0(\Omega)\ .$$

⌜ Wähle einen Punkt $a \in \Omega \setminus \mathrm{sp}(\gamma)$ und wende Satz **(4.1)** auf die Funktion $g(z) := (z-a)f(z)$ an. Wegen $g(a) = 0$ ergibt sich unmittelbar die Behauptung. ⌟

Das Gebiet Ω heisst **einfach zusammenhängend**, wenn *jeder* Zyklus $\gamma \in \mathcal{Z}(\Omega)$ nullhomolog ist; anschaulich ausgedrückt: wenn es keine Löcher gibt, um die ein Zyklus herumgehen könnte. (Für den Begriff "einfach zusammenhängend" sind noch andere Erklärungen in Gebrauch; sie laufen aber auf dasselbe hinaus.) Da in einem einfach zusammenhängenden Gebiet *alle* Zyklen nullhomolog sind, können wir nun die folgende definitive Version von Satz **(3.6)**, damals war von einem *konvexen* Gebiet die Rede, formulieren:

(4.4) *Die Funktion f sei analytisch in dem einfach zusammenhängenden Gebiet Ω. Dann trifft folgendes zu:*

(a)
$$\int_\gamma f(z)\,dz \;=\; 0 \qquad \forall\,\gamma \in \mathcal{Z}(\Omega)\ .$$

(b) *Es sei $a \in \Omega$ beliebig gewählt. Dann ist die Funktion*

$$F(z) \;:=\; \int_a^z f(\zeta)\,d\zeta$$

eine Stammfunktion von f; dabei darf längs einer beliebigen Kurve γ von a nach z integriert werden.

⌜ Die Behauptung (a) ist schon bewiesen, und aus (a) folgt (b) mit Hilfe des Prinzips **(3.4)**. ⌟

Satz **(4.4)** besitzt vielfältige Anwendungen, zum Beispiel die folgende:

(4.5) *Die Funktion $f\colon\ \Omega \to \mathbb{C}^*$ sei analytisch und $\neq 0$ in dem einfach zusammenhängenden Gebiet Ω. Dann besitzt f auf Ω einen analytischen Logarithmus; das heisst, es gibt ein $H \in \mathcal{O}(\Omega)$ mit*

$$f(z) \;=\; e^{H(z)} \qquad (z \in \Omega)\ . \tag{1}$$

Ferner besitzt f analytische n-te Wurzeln; das heisst, es gibt für jedes $n \geq 2$ ein $g \in \mathcal{O}(\Omega)$ mit

$$f(z) \;=\; \bigl(g(z)\bigr)^n \qquad (z \in \Omega)\ .$$

⌜ Genügt H der Identität (1), so ist $H' = f'/f$. Wir argumentieren daher folgendermassen: Nach Voraussetzung über f ist die Funktion $h := f'/f$ auf Ω analytisch. Auf Grund von **(4.4)**(b) besitzt h eine Stammfunktion $H \in \mathcal{O}(\Omega)$, und durch Addition einer geeigneten Konstante zu H kann man erreichen, dass $e^{H(a)} = f(a)$ gilt für einen Punkt $a \in \Omega$. Da nun die Ableitung der Funktion $z \mapsto f(z)e^{-H(z)}$ identisch verschwindet, folgt (1).

Zu den Wurzeln: Wie man ohne weiteres nachrechnet, leistet die Funktion

$$g(z) \;:=\; \exp\Bigl(\frac{1}{n}H(z)\Bigr) \qquad (z \in \Omega)$$

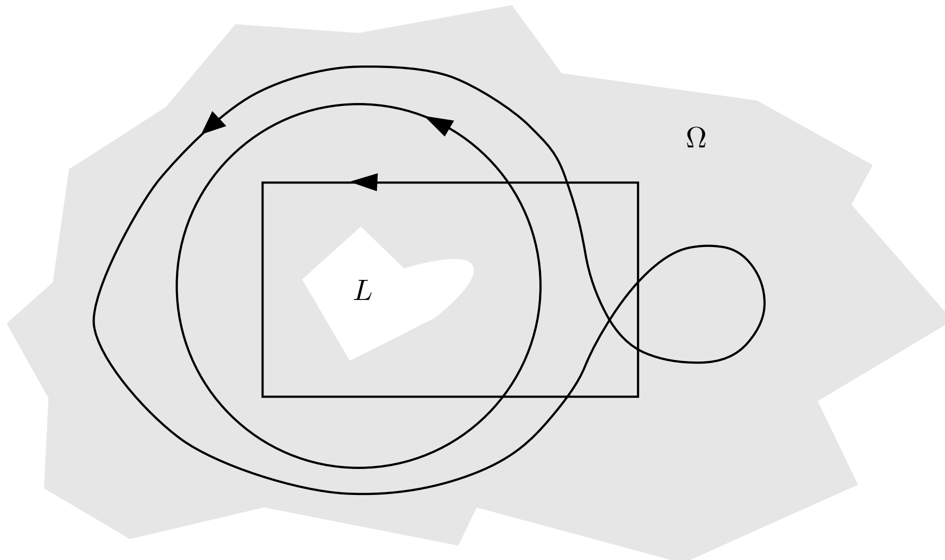

Fig. 4.2.1

das Verlangte. ⌟

Ein Gebiet Ω mit genau einem Loch wird **zweifach zusammenhängend** genannt. Als weitere Anwendung des allgemeinen Satzes von Cauchy **(4.3)** beweisen wir (Fig. 4.2.1):

(4.6) *Die Funktion f sei analytisch in dem zweifach zusammenhängenden Gebiet Ω. Dann besitzt das Integral $\int_\gamma f(z)\,dz$ für alle Zyklen $\gamma \in \mathcal{Z}(\Omega)$, die genau einmal um das Loch herum gehen, denselben Wert.*

⌜ Sind γ_1, γ_2 zwei derartige Zyklen, so besitzt der Zyklus $\gamma := \gamma_1 - \gamma_2$ bezüglich allen Punkten $z \in \complement\Omega$ Umlaufszahl 0; folglich ist dann $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$. ⌟

Ist Ω ein zweifach zusammenhängendes Gebiet, so nennt man jeden Zyklus, der genau einmal (in positivem Sinn) um das Loch herumgeht, einen **erzeugenden Zyklus**.

4.3 Laurent-Entwicklung

Wir betrachten die folgende Situation: Das Gebiet Ω enthalte den Kreisring

$$G := \bigl\{ z \in \mathbb{C} \bigm| a < |z| < b \bigr\} , \qquad 0 < a < b < \infty \tag{1}$$

samt dessen Randzyklus $\partial G = \partial D_b - \partial D_a$. Typischer Weise geht der Kreisring G um ein Loch von Ω herum, siehe die Fig. 4.3.1.

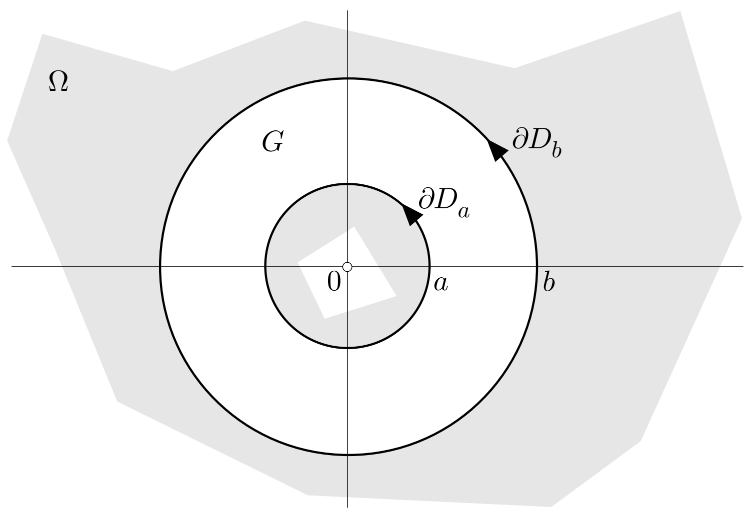

Fig. 4.3.1

Es sei nun eine analytische Funktion $f\colon\ \Omega \to \mathbb{C}$ gegeben. Nach Satz **(4.2)** besitzt f innerhalb G die Integraldarstellung

$$f(z) \;=\; \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_b} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_a} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \ .$$

Die beiden Funktionen

$$g_b(z) := \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_b} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \ , \qquad g_a(z) := -\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_a} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$$

sind analytisch insbesondere für $|z| < b$ bzw. für $|z| > a$, und es gilt

$$f(z) = g_b(z) + g_a(z) \qquad (z \in G) \ . \tag{2}$$

Hiernach lässt sich die betrachtete analytische Funktion f zerlegen in einen Anteil g_b, der für $|z| < b$ analytisch ist und einen Anteil g_a, der für $|z| > a$ analytisch ist. Mit Hilfe des Satzes von Liouville lässt sich übrigens leicht zeigen, dass es nur *eine* derartige Zerlegung geben kann, die (wie die vorliegende) auch noch die Bedingung $\lim_{z\to\infty} g_a(z) = 0$ erfüllt.

Es geht aber noch weiter: Wir wenden nun auf g_b und g_a das Lemma **(3.15)** an und erhalten

$$g_b(z) = \sum_{k\geq 0} c_k z^k \quad (|z| < b)\,, \qquad g_a(z) = \sum_{k<0} c_k z^k \quad (|z| > a)\,, \tag{3}$$

wobei die Koeffizienten c_k durch 3.3.(5) gegeben sind:

$$c_k = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta^k}\,\frac{d\zeta}{\zeta} \qquad (k \in \mathbb{Z})\ .$$

Hier wäre für $k \geq 0$ der Radius $r := b$ zu wählen und für $k < 0$ der Radius $r := a$. In Wirklichkeit ergibt sich aus Satz **(4.6)**, dass es auf diese Radien nicht ankommt: Wir können sämtliche c_k durch Integration längs desselben erzeugenden Zyklus, zum Beispiel längs ∂D_r für ein $r \in [\,a, b\,]$, berechnen.

Tragen wir nun die Potenzreihendarstellungen (3) von g_b und g_a in (2) ein, so erhalten wir die **Laurent-Entwicklung** einer in einem Ringgebiet um 0 analytischen Funktion f:

(4.7) *Die Funktion f sei analytisch in einem Gebiet*

$$\Omega \supset \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; a < |z| < b \right\}, \qquad 0 \leq a < b \leq \infty\,,$$

und es sei $a < r < b$. Dann gilt

$$f(z) \;=\; \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\, z^k \qquad (a < |z| < b)\,, \tag{4}$$

wobei die Koeffizienten c_k gegeben sind durch

$$c_k = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta^k}\,\frac{d\zeta}{\zeta} \qquad (k \in \mathbb{Z})\ . \tag{5}$$

⌈ Sind a, b, r und z gegeben, so bestimme man zunächst einen etwas kleineren Kreisring $G := \left\{ z' \;\middle|\; a' < |z'| < b' \right\}$, auf den sich die vorher angestellten Überlegungen anwenden lassen. Wir verzichten auf die Ausführung der Details. ⌟

In der Praxis werden die Koeffizienten c_k einer Laurent-Entwicklung nicht durch Integration, sondern mit Hilfe von algebraischen Methoden oder durch Anpassung von "bekannten" Reihenentwicklungen bestimmt. Wie auch immer man zu den c_k kommt — es sind immer dieselben. Es gilt nämlich der folgende **Eindeutigkeitssatz**:

(4.8) *Gilt* (4) *für gewisse* $c_k \in \mathbb{C}$, *so besitzen diese* c_k *notwendiger Weise den durch* (5) *gegebenen Wert.*

⌜ Es sei $j \in \mathbb{Z}$ beliebig, aber fest. Wir multiplizieren (4) mit z^{-j-1} und integrieren beide Seiten längs ∂D_r. Es ergibt sich

$$\int_{\partial D_r} \frac{f(z)}{z^j}\,\frac{dz}{z} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \int_{\partial D_r} z^{k-j-1}\,dz = 2\pi i\, c_j\ ,$$

denn alle Integrale rechter Hand ausser dem einen mit $k = j$ haben den Wert 0, und dieses eine hat den Wert $2\pi i$. ⌟

Wir betrachten nun einige Beispiele.

① Für alle $z \neq 0$ ist

$$\exp\frac{1}{z} \;=\; 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!}\,\frac{1}{z^2} + \frac{1}{3!}\,\frac{1}{z^3} + \frac{1}{4!}\,\frac{1}{z^4} + \ldots\ ;$$

folglich ist das auch schon die Laurent-Entwicklung der Funktion $z \mapsto e^{1/z}$ im Ursprung. ○

② Die Funktion

$$f(z) \;:=\; \frac{1}{z^2-1}$$

besitzt in den beiden Punkten ± 1 eine Singularität und ist analytisch in den beiden Kreisringen

$$\Omega_1:\ 0 < |z-1| < 2\,, \qquad \Omega_2:\ |z-1| > 2$$

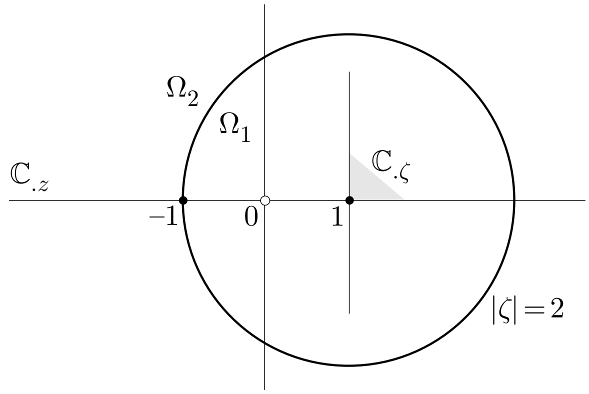

Fig. 4.3.2

(Fig. 4.3.2). Es sollen nun die in den beiden Kreisringen gültigen Laurent-Entwicklungen von f bestimmt werden. Hierzu setzen wir $z := 1 + \zeta$, betrachten also anstelle von f die Funktion

$$g(\zeta) := f(1+\zeta) = \frac{1}{(1+\zeta)^2 - 1} = \frac{1}{\zeta^2 + 2\zeta}$$

in den Kreisringen

$$\Omega_1' : \ 0 < |\zeta| < 2 \,, \qquad \Omega_2' : \ |\zeta| > 2 \ .$$

Partialbruchzerlegung liefert

$$g(\zeta) = \frac{1}{2}\,\frac{1}{\zeta} - \frac{1}{4}\,\frac{1}{1+\zeta/2} \ . \tag{6}$$

Ist $\zeta \in \Omega_1'$, so können wir den zweiten Partialbruch sofort in eine geometrische Reihe entwickeln und erhalten

$$g(\zeta) = \frac{1}{2}\,\frac{1}{\zeta} - \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{\infty}\Bigl(-\frac{\zeta}{2}\Bigr)^k = \frac{1}{2}\,\frac{1}{\zeta} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\zeta - \ldots \qquad (\zeta \in \Omega_1') \ .$$

Für die Ausgangsfunktion f ergibt sich damit

$$f(z) = \frac{1}{2}\,\frac{1}{z-1} - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^{k+2}}\,(z-1)^k \qquad (z \in \Omega_1) \ .$$

Für $\zeta \in \Omega_2'$ schreiben wir den zweiten Partialbruch in (6) etwas um, worauf wir wieder in eine geometrische Reihe entwickeln können:

$$g(\zeta) = \frac{1}{2}\,\frac{1}{\zeta} - \frac{1}{2\zeta}\,\frac{1}{1+2/\zeta} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{\zeta} - \frac{1}{2\zeta}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-2)^k}{\zeta^k} \qquad (\zeta \in \Omega_2')\ .$$

Hier hebt sich der zu $k = 0$ gehörende Term heraus, und es ergibt sich nach Vereinfachung

$$g(\zeta) = \sum_{k=2}^{\infty}(-2)^{k-2}\frac{1}{\zeta^k} = \frac{1}{\zeta^2} - 2\frac{1}{\zeta^3} + \ldots \qquad (\zeta \in \Omega_2')\ .$$

Auf die Ausgangsfunktion f bezogen haben wir daher

$$f(z) = \sum_{k=2}^{\infty}(-2)^{k-2}\,\frac{1}{(z-1)^k} \qquad (z \in \Omega_2)\ .$$

○

③ Wir betrachten die Funktion

$$f(z) := \frac{1}{\sqrt{z^2-1}}\ ,$$

wobei allerdings zunächst geklärt werden muss, was da überhaupt gemeint ist. Der angegebene Ausdruck ist in den Punkten ± 1 nicht definiert und für alle übrigen $z \in \mathbb{C}$ zweiwertig. Rein formal, d.h. ohne Rücksicht auf Mehrdeutigkeiten, können wir schreiben

$$\frac{1}{\sqrt{z^2-1}} = \frac{1}{z}\,\frac{1}{\sqrt{1-1/z^2}}\ .$$

Im Zusammenhang mit der Joukowski-Funktion, Beispiel 2.5.③, haben wir uns überlegt, dass für alle $z \notin [\,-1,1\,]$ der Sachverhalt

$$1 - \frac{1}{z^2} \in \mathbb{C}^{-*}$$

garantiert ist. Als Definitionsgebiet unserer Funktion f wählen wir daher die geschlitzte Ebene

$$\Omega := \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} | -1 \le z \le 1\}$$

und definieren definitiv

$$f(z) := \frac{1}{z}\,\mathrm{pv}\left(1-\frac{1}{z^2}\right)^{-1/2} .$$

Das Gebiet Ω enthält den Kreisring $\Omega'\colon\ |z|>1$, und in diesem Kreisring lässt sich der angegebene Hauptwert in eine Binomialreihe entwickeln. Es ergibt sich

$$f(z) = \frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-1/2}{k}\frac{(-1)^k}{z^{2k}} = \frac{1}{z}+\frac{1}{2}\,\frac{1}{z^3}+\frac{3}{8}\,\frac{1}{z^5}+\ldots \qquad (z\in\Omega') .$$

○

4.4 Isolierte Singularitäten

Es sei a ein gewisser Punkt in dem Gebiet Ω. Im folgenden geht es um Funktionen f, die zunächst einmal nur in dem punktierten Gebiet $\dot{\Omega} := \Omega\setminus\{a\}$ erklärt und analytisch sind. Eine derartige Funktion $f\in\mathcal{O}(\dot{\Omega})$ hat im Punkt a eine **isolierte Singularität**.

Bsp: Die folgenden Funktionsterme weisen im Ursprung eine isolierte Singularität auf:

$$\frac{1}{z}\ ,\qquad \frac{\sin z}{z}\ ,\qquad e^{1/z}\ ,\qquad \frac{1+z}{z^3-z^2}\ ,\qquad \cot z\ ,\qquad \frac{1}{\sin z}-\frac{1}{z}\ .$$

Die Singularitäten der Wurzelfunktionen $\sqrt[n]{\cdot}$ und des Logarithmus im Ursprung fallen nicht unter diesen Begriff, denn diese Funktionen sind nicht in einer punktierten Umgebung von 0 analytisch. Man spricht in diesem Zusammenhang von **Verzweigungspunkten** der genannten Funktionen.

Bsp: Die in Beispiel 4.3.3 betrachtete “Funktion” $z\mapsto 1/\sqrt{z^2-1}$ besitzt an den Stellen ± 1 je einen Verzweigungspunkt.

Es gibt genau *drei* Arten von isolierten Singularitäten analytischer Funktionen. Diese drei Kategorien lassen sich einerseits charakterisieren durch qualitative Eigenschaften von f in der Umgebung des Punktes a und anderseits durch Eigenschaften der Laurent-Entwicklung von f an der Stelle a.

(I) Ist f in einer punktierten Umgebung von a beschränkt, so liegt nach Satz **(3.12)** eine **hebbare Singularität** vor, das heisst, die Funktion f lässt sich analytisch in den Punkt a hinein fortsetzen. Sie besitzt dann eine Taylor-Entwicklung an der Stelle a:

$$f(z) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,(z-a)^k \qquad (|z-a| < \rho)\;,$$

und nach dem Eindeutigkeitssatz **(4.8)** ist das auch schon die Laurent-Entwicklung von f an der Stelle a. Wir sehen: Im Fall einer hebbaren Singularität sind alle Laurent-Koeffizienten c_k mit $k < 0$ gleich 0. Umgekehrt: Sind alle diese Koeffizienten gleich 0, so ist die Singularität offensichtlich hebbar.

(II) Gilt $\lim_{z\to a} f(z) = \infty$, so besitzt f an der Stelle a einen **Pol**. Die Funktion

$$g(z) \;:=\; \begin{cases} \dfrac{1}{f(z)} & (z \neq a) \\ 0 & (z = a) \end{cases}$$

ist nach **(3.12)** in einer vollen Umgebung $U := D_r(a)$ analytisch und jedenfalls $\not\equiv 0$. Es gibt daher ein wohlbestimmtes $n \geq 1$ und eine Funktion $g_1 \in \mathcal{O}(U)$ mit

$$g(z) = (z-a)^n\, g_1(z)\;, \qquad g_1(a) \neq 0$$

(siehe den Beweis von **(3.16)**, insbesondere 3.3.(7)). Wir dürfen dabei annehmen, dass g_1 auf U nirgends verschwindet; folglich ist auch $f_1 := 1/g_1$ in U analytisch, und wir erhalten für die Ausgangsfunktion f die Darstellung

$$f(z) = \frac{1}{(z-a)^n}\, f_1(z) \qquad (0 < |z-a| < r)\;; \tag{1}$$

dabei ist $f_1 \in \mathcal{O}(U)$ und $f_1(a) \neq 0$. Die Zahl $n \geq 1$ heisst **Ordnung** des betrachteten Poles von f. Ist $n = 1$, so spricht man von einem **einfachen Pol**.

Denkt man sich die Funktion f_1 an der Stelle a nach Taylor entwickelt, so ergibt sich aus (1), dass f an der Stelle a eine Laurent-Entwicklung der folgenden Gestalt besitzt:

$$f(z) \;=\; \frac{c_{-n}}{(z-a)^n} + \frac{c_{-n+1}}{(z-a)^{n-1}} + \ldots + \frac{c_{-1}}{z-a} + c_0 + c_1(z-a) + \ldots\;; \tag{2}$$

dabei ist $c_{-n} \neq 0$. Wir sehen: Besitzt die Funktion f an der Stelle a einen Pol der Ordnung n, so ist $c_{-n} \neq 0$, und alle c_k mit $k < -n$ sind gleich 0; insbesondere gibt es nur *endlich viele* Negativterme in der Laurent-Entwicklung von f an der Stelle a. Umgekehrt ist ziemlich klar: Hat die Laurent-Entwicklung von f die Gestalt (2), so liegt an der Stelle a ein Pol der Ordnung n vor.

Die Summe

$$h(z) := \frac{c_{-n}}{(z-a)^n} + \frac{c_{-n+1}}{(z-a)^{n-1}} + \ldots + \frac{c_{-1}}{z-a}$$

der Negativterme in (2) wird **Hauptteil** von f an der Stelle a genannt.

(III) Es bleibt der Fall, wo die Funktion f in jeder (noch so kleinen) punktierten Umgebung von a unbeschränkt ist, aber $\lim_{z \to a} f(z) = \infty$ nicht zutrifft. Nach dem bisher Gesagten ist dies äquivalent mit dem folgenden: In der Laurent-Entwicklung von f an der Stelle a gibt es *unendlich viele* Terme mit $k < 0$ und $c_k \neq 0$. Liegt dieser Fall vor, so nennt man a eine **wesentliche Singularität** der Funktion f.

In der Umgebung einer wesentlichen Singularität verhält sich eine Funktion f in der Tat sehr erratisch. Wir beweisen hierüber den folgenden **Satz von Casorati-Weierstrass**:

(4.9) *Ist f an der Stelle a wesentlich singulär, so kommt $f(z)$ in jeder noch so kleinen punktierten Umgebung $\dot{U}$ von a jedem Wert $w \in \overline{\mathbb{C}}$ beliebig nahe.*

⌈ Dass $w := \infty$ in der behaupteten Art approximiert wird, steht in der Definition. Wir betrachten jetzt eine beliebige Zahl $w_0 \in \mathbb{C}$ und nehmen an, diese Zahl werde in einer gewissen Umgebung $\dot{U}$ nicht approximiert. Es gibt dann ein $\varepsilon > 0$ mit

$$|f(z) - w_0| \geq \varepsilon \qquad (z \in \dot{U}) .$$

Folglich ist die Funktion

$$g(z) := \frac{1}{f(z) - w_0} \qquad (z \in \dot{U})$$

beschränkt und somit nach **(3.12)** in den Punkt a hinein analytisch fortsetzbar. Es gilt also

$$g(z) = (z-a)^n g_1(z), \quad n \geq 0, \quad g_1 \in \mathcal{O}(U), \quad g_1(a) \neq 0$$

und
$$f(z) = w_0 + \frac{1}{g(z)} \qquad (z \in \dot{U}) \ .$$
Hieraus folgert man leicht, dass f an der Stelle a schlimmstenfalls einen Pol besitzt. ⌟

In Wirklichkeit gilt ein wesentlich stärkerer Satz, der berühmte **Satz von Picard**:

(4.10) *Ist f an der Stelle a wesentlich singulär, so nimmt f in jeder noch so kleinen punktierten Umgebung $\dot{U}$ von a jeden Wert $w \in \mathbb{C}$, bis auf höchstens eine Ausnahme, unendlich oft an.*

Der Beweis dieses Satzes ist sehr schwierig. — Wir analysieren nun die am Anfang dieses Abschnitts angegebenen Funktionsterme bezüglich ihres Verhaltens an der Stelle $z = 0$.

① Die Funktion $1/z$ steht schon als Laurent-Entwicklung da und besitzt im Ursprung offensichtlich einen einfachen Pol.

Aus der Taylor-Entwicklung des Sinus ergibt sich sofort
$$\frac{\sin z}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \frac{z^6}{7!} + \ldots \qquad (z \neq 0) \,,$$
und man sieht, dass diese Funktion in den Nullpunkt hinein analytisch fortsetzbar ist und dort den Wert 1 annimmt. Die sogenannte **Sinc-Funktion**
$$\operatorname{sinc}(z) \ := \begin{cases} \dfrac{\sin z}{z} & (z \neq 0) \\ 1 & (z = 0) \end{cases}$$
spielt übrigens eine wichtige Rolle in der Theorie der Signalverarbeitung.

Die Laurent-Entwicklung der Funktion $e^{1/z}$ haben wir schon im vorangehenden Abschnitt, Beispiel ①, bestimmt; sie weist unendlich viele Negativterme auf. Diese Funktion ist also im Ursprung wesentlich singulär. Das ergibt sich übrigens auch aus der simultanen Existenz der beiden verschiedenen Grenzwerte
$$\lim_{x \to 0+} e^{1/x} = \infty \,, \qquad \lim_{x \to 0-} e^{1/x} = 0 \ .$$
Nähert sich z dem Ursprung längs der imaginären Achse, so vollführt $e^{1/z}$ immer schnellere Umläufe auf ∂D. Es gibt einen Picardschen Ausnahmewert,

nämlich 0. Alle Zahlen $w \in \mathbb{C}^*$ treten in jeder Umgebung $\dot{U}(0)$ unendlich oft als Funktionswerte auf.

In einer punktierten Umgebung $\dot{U}$ von 0 gilt

$$f(z) := \frac{1+z}{z^3-z^2} = -\frac{1}{z^2}\,\frac{1+z}{1-z}\ .$$

Da der zweite Faktor rechter Hand in ganz U analytisch ist und an der Stelle $z = 0$ den Wert 1 annimmt, liegt ein Pol der Ordnung 2 vor. Um den Hauptteil h von f an der Stelle 0 zu bestimmen, entwickeln wir den genannten Faktor (auf irgendeine Weise) in eine Potenzreihe und haben dann

$$\frac{1+z}{z^3-z^2} = -\frac{1}{z^2}\,(1+z)(1+z+z^2+\ldots) = -\frac{1}{z^2}(1+2z+?z^2)\ .$$

Der gesuchte Hauptteil lautet also folgendermassen:

$$h(z) = -\frac{1}{z^2} - \frac{2}{z}\ ,$$

was sich ohne Integration herausfinden liess.

Es ist

$$\cot z = \frac{\cos z}{\sin z} = \frac{1}{z}\,\frac{\cos z}{\operatorname{sinc}(z)} \qquad (z \in \dot{U})\ .$$

Hier ist der zweite Faktor rechter Hand in ganz U analytisch und nimmt im Ursprung den Wert 1 an; folglich besitzt der Cotangens im Ursprung einen einfachen Pol. Man kann aber noch mehr sagen: Die Taylor-Entwicklung des genannten Faktors hat die Form $1+?z$; der Hauptteil des Cotangens im Ursprung besteht daher aus dem einen Term $1/z$. In anderen Worten: Es gibt eine in ganz U analytische Funktion g mit

$$\cot z = \frac{1}{z} + g(z)\ .$$

Man ahnt es: Die Funktion

$$f(z) \ := \frac{1}{\sin z} - \frac{1}{z} \qquad (z \in \dot{U})$$

ist in den Ursprung hinein analytisch fortsetzbar. Wir wollen gleich den Anfang der Taylor-Entwicklung von f im Ursprung bestimmen. Hierzu schreiben wir

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sin z} &= \frac{1}{z}\,\frac{1}{1-\left(\frac{1}{6}z^2 - \frac{1}{120}z^4+?z^6\right)} \\
&= \frac{1}{z}\left(1+\left(\frac{1}{6}z^2 - \frac{1}{120}z^4+?z^6\right) + \left(\frac{1}{6}z^2 - \frac{1}{120}z^4+?z^6\right)^2+?z^6\right) \\
&= \frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{6}z^2 + \frac{7}{360}z^4+?z^6\right)\ .
\end{aligned}$$

Hiernach besitzt f im Ursprung die folgende Taylor-Entwicklung:

$$f(z) = \frac{1}{6}z + \frac{7}{360}z^3 + ?z^5 \ .$$

○

Besitzen weder f noch g eine wesentliche Singularität an der Stelle a, so besitzt auch ihr Produkt $f \cdot g$ schlimmstenfalls einen Pol bei a. Man erhält die Laurent-Entwicklung $\sum c_k(z-a)^k$ von $f \cdot g$ durch "Ausmultiplizieren" der Laurent-Entwicklungen von f und von g, und zwar lässt sich jedes einzelne c_k wie bei der Multiplikation von Potenzreihen durch endlich viele Operationen berechnen.

② Wir betrachten das Produkt

$$\begin{aligned}\frac{e^z-1}{z^3}\cdot\frac{1}{\sin z} &= \Bigl(\frac{1}{z^2} + \frac{1}{2}\frac{1}{z} + \frac{1}{6} + \frac{z}{24} + ?z^2\Bigr)\Bigl(\frac{1}{z} + \frac{1}{6}z + \frac{7}{360}z^3 + ?z^5\Bigr)\\ &= \frac{1}{z^3} + \frac{1}{2}\frac{1}{z^2} + \Bigl(1\cdot\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\cdot 1\Bigr)\frac{1}{z} + \Bigl(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6} + \frac{1}{24}\cdot 1\Bigr) + ?z\\ &= \frac{1}{z^3} + \frac{1}{2}\frac{1}{z^2} + \frac{1}{3}\frac{1}{z} + \frac{1}{8} + ?z \ .\end{aligned}$$

Es resultiert ein Pol der Ordnung 3; der zugehörige Hauptteil besteht aus den ersten drei Termen rechter Hand.

○

Funktionen $f\colon\ \Omega \to \overline{\mathbb{C}}$, die bis auf isolierte Pole (wo sie den Wert ∞ annehmen) analytisch sind, heissen **meromorph** auf Ω. Summe, Produkt und Quotient von meromorphen Funktionen sind wieder meromorph; in anderen Worten: Die Gesamtheit $\mathcal{M}(\Omega)$ der auf Ω meromorphen Funktionen bildet einen **Funktionenkörper** mit der Funktion $\equiv 0$ als Nullelement und der Funktion $\equiv 1$ als Einselement.

Rationale Funktionen sind meromorph auf ganz $\mathbb{C}$, ja auf ganz $\overline{\mathbb{C}}$, wenn man Pole im Punkt $z = \infty$ sinngemäss definiert; vgl. dazu Beispiel 1.2.②. Für die Zwecke der Integralrechnung haben wir in der Analysis II beliebige rationale Funktionen in ihre *Partialbrüche* zerlegt. Im vorliegenden Zusammenhang lässt sich das folgendermassen interpretieren: Die rationale Funktion

$$R(z) = \frac{p(z)}{q(z)}\ , \qquad \deg(p) < \deg(q)\ ,$$

besitze r verschiedene Pole $z_j \in \mathbb{C}$ der Ordnungen $m_1, \ldots, m_r$. Dann gibt es für jede Polstelle z_j einen Hauptteil

$$h_j(z) := \frac{A_{j,m_j}}{(z-z_j)^{m_j}} + \ldots + \frac{A_{j,1}}{z-z_j} \qquad (1 \le j \le r)\ ,$$

dessen Koeffizienten $A_{j,k}$ mit irgendwelchen Methoden bestimmt werden können. Die Funktion $h_j(z)$ ist an jeder Stelle z_l, $l \neq j$, analytisch. Hieraus folgt: Die Funktion

$$f(z) := R(z) - \sum_{j=1}^{r} h_j(z) \qquad \bigl(z \notin \{z_1, \ldots, z_r\}\bigr)$$

ist in sämtliche z_j hinein analytisch fortsetzbar, mithin eine ganz-analytische Funktion. Überdies gilt $\lim_{z\to\infty} f(z) = 0$, denn dies ist sowohl für $R(z)$ wie für die $h_j(z)$ der Fall. Der Satz von Liouville erlaubt nun den Schluss, dass $f(z) \equiv 0$ ist; das heisst, die Ausgangsfunktion R ist gleich der Summe ihrer Hauptteile.

Dass $R(z)$ eine rationale Funktion war, haben wir eigentlich gar nicht benutzt. Letzten Endes haben wir den folgenden globalen Satz bewiesen:

(4.11) *Eine meromorphe Funktion* $R\colon \mathbb{C} \to \overline{\mathbb{C}}$ *mit* $\lim_{z\to\infty} R(z) = 0$ *ist notwendigerweise eine rationale Funktion.*

Der "richtige" Satz in diesem Zusammenhang lautet natürlich folgendermassen:

(4.11′) *Eine meromorphe Funktion* $R\colon \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ *ist notwendigerweise eine rationale Funktion.*

Zum Schluss dieses Abschnitts noch die folgenden Bemerkungen: Der Leser ist vielleicht geneigt, isolierte Singularitäten für lästige Ausnahmepunkte zu halten, eine rare Spezies. Das ist ein gewaltiger Irrtum. Es handelt sich um die *typischen* Singularitäten von analytischen Funktionen, und zusammen mit Verzweigungspunkten machen sie das aus, was bei "praktisch vorkommenden Funktionen" (Lösungen von Differentialgleichungen usw.) überhaupt auftreten kann. Es ist einfach, eine Funktion zu erfinden, die in den Punkten 1, i, -1 und $-i$ je einen Pol hat; eine Funktion zu konstruieren, die in D analytisch ist, aber an keiner Stelle über ∂D hinaus analytisch fortgesetzt werden kann, erfordert jedoch einigen Scharfsinn. Und noch ein Geheimnis: In den isolierten Singularitäten einer Funktion f (und das gilt nun nicht nur für analytische Funktionen) ist globale Information über f codiert. Diese Information ist in der Regel algebraischer oder kombinatorischer Natur und kann mit algebraischen Methoden extrahiert werden.

4.5 Der Residuensatz

4.5.1. Es sei Ω ein beliebiges Gebiet, und die Funktion $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ sei analytisch bis auf eine Menge S von isolierten Singularitäten. Ist a eine derartige Singularität, so ist die einpunktige Menge $\{a\}$ nichts anderes als ein Loch im wahren Definitionsgebiet $\Omega' := \Omega \setminus S$ von f. Man wird sich fragen, welche Wirkungen dieses Loch bei der Integration von f längs irgendwelcher Zyklen $\gamma \in \mathcal{Z}(\Omega')$ ausüben kann.

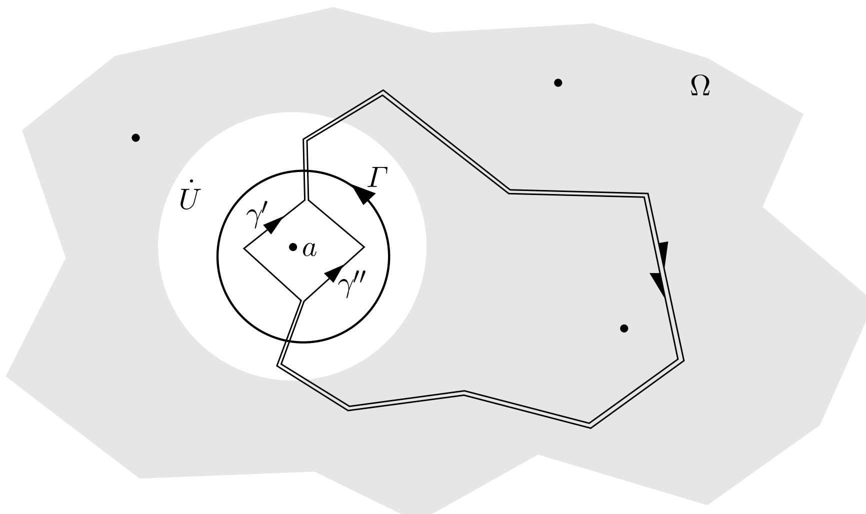

Fig. 4.5.1

Der Figur 4.5.1 entnimmt man folgendes: Wenn sich zwei Zyklen γ' und γ'' nur dadurch unterscheiden, dass der eine links, der andere rechts an a vorbeigeht, so ist die Differenz $\gamma'' - \gamma'$ ein erzeugender Zyklus für das Ringgebiet

$$\dot{U} := \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; 0 < |z-a| < r \right\} ,$$

wobei r so klein gewählt sei, dass $\dot{U}$ keinen weiteren Punkt von S enthält. Die beiden Integrale $\int_{\gamma''} f(z)\,dz$ und $\int_{\gamma'} f(z)\,dz$ unterscheiden sich daher um den Wert

$$Q := \int_\Gamma f(z)\,dz ,$$

wobei Γ nach **(4.6)** irgendein erzeugender Zyklus des Ringgebiets $\dot{U}$ sein kann. Dieses Q ist nun das *Residuum* von f an der Stelle a (für die genaue Definition s.u.). Ist zufälliger Weise $Q = 0$, so hat die betrachtete Singularität keine Auswirkungen auf den Wert von irgendwelchen Integralen

$$\int_\gamma f(z)\,dz\,, \qquad \gamma \in \mathcal{Z}(\Omega')\ .$$

Wir definieren nunmehr definitiv: Unter den beschriebenen Umständen nennt man die Grösse

$$\operatorname{res}\bigl(f \bigm| a\bigr) \ := \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(z)\,dz \tag{1}$$

das **Residuum** von f an der Stelle a. Das Residuum ist auch dann definiert, wenn f im Punkt a regulär ist; in diesem Fall ist natürlich $\operatorname{res}\bigl(f \bigm| a\bigr) = 0$.

Der Hauptwitz ist nun der, dass der Wert eines Residuums gar nicht durch Integration, sondern auf algebraische Weise bestimmt wird. Hierzu betrachten wir die Laurent-Entwicklung von f an der Stelle a:

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(z-a)^k \qquad (z \in \dot{U})\,;$$

ihre Koeffizienten sind nach **(4.7)** gegeben durch

$$c_k = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{k+1}}\,d\zeta\ .$$

Vergleicht man dies mit (1), so ergibt sich sofort:

(4.12) *Das Residuum* $\operatorname{res}\bigl(f \bigm| a\bigr)$ *ist gleich dem Koeffizienten* c_{-1}*, das heisst: gleich dem Koeffizienten bei* $\dfrac{1}{z-a}$ *in der Laurent-Entwicklung von* f *an der Stelle* a*.*

Die Berechnung von c_{-1} ist besonders einfach, wenn f an der Stelle a einen einfachen Pol besitzt. Wir beweisen darüber:

(4.13) (a) *Besitzt f an der Stelle a einen einfachen Pol, so gilt*

$$\operatorname{res}\bigl(f \bigm| a\bigr) = \lim_{z\to a}(z-a)f(z)\ .$$

(b) *Ist*

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}\ , \qquad p,\, q \in \mathcal{O}(\Omega)\ ,$$

und besitzt $q(\cdot)$ im Punkt $a \in \Omega$ eine einfache Nullstelle, so ist

$$\operatorname{res}\bigl(f \bigm| a\bigr) = \frac{p(a)}{q'(a)}\ .$$

⌜ Es sei weiterhin $U := D_r(a)$. Unter den angegeben Voraussetzungen gibt es eine Funktion $g \in \mathcal{O}(U)$ mit

$$f(z) = \frac{c_{-1}}{z-a} + g(z) \qquad (z \in \dot{U})\ ,$$

und hieraus folgt $\lim_{z\to a}(z-a)f(z) = c_{-1} = \operatorname{res}\bigl(f \bigm| a\bigr)$. Nun zu (b): Wegen $q(a) = 0,\ q'(a) \neq 0$ haben wir

$$(z-a)f(z) = p(z)\,\frac{z-a}{q(z)-q(a)}\ \to\ \frac{p(a)}{q'(a)} \qquad (z \to a)\ ,$$

womit (b) auf (a) zurückgeführt ist. ⌟

Besitzt f an der Stelle a einen Pol höherer Ordnung, so bleibt in der Regel nichts anderes übrig, als den ganzen zugehörigen Hauptteil zu berechnen, wobei dann c_{-1} als letzter Koeffizient herausspringt. Liegt sogar eine wesentliche Singularität vor, so ist guter Rat teuer.

Bevor wir nun das Ausrechnen von Residuen an Beispielen üben, wollen wir endlich beschreiben, wozu man sie brauchen kann. Dieser eigentliche Zweck wird geliefert durch den folgenden **allgemeinen Residuensatz** (Fig. 4.5.2):

(4.14) *Die Funktion $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ sei analytisch bis auf isolierte Singularitäten, und es sei G ein Gebiet mit Randzyklus ∂G, das samt Rand in Ω enthalten ist, wobei ∂G die Singularitätenmenge S nicht trifft. Dann gilt*

$$\int_{\partial G} f(z)\,dz \;=\; 2\pi i \sum_{a\in G} \operatorname{res}\bigl(f \bigm| a\bigr)\ . \tag{2}$$

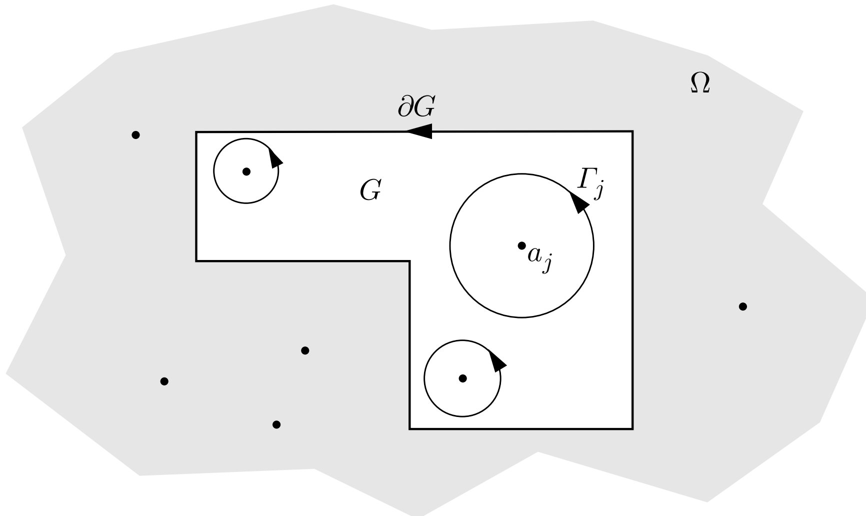

Fig. 4.5.2

Im Anwendungsfall steht hier auf der linken Seite ein Integral, das man ausrechnen möchte und das sich mit den üblichen Methoden (Stammfunktionen, Substitutionen usw.) nur mühsam oder eventuell gar nicht traktieren lässt. Auf der rechten Seite von (2) steht eine endliche Summe von Residuen, die sich einzeln mit algebraischen Mitteln (Partialbruchzerlegung, Regel von Bernoulli-de l'Hôpital usw.) berechnen lassen. So bildet denn Satz **(4.14)** die Grundlage eines eigentlichen **Residuenkalküls**.

⌜ Es sei wiederum $\Omega' := \Omega \setminus S$ das wahre Definitionsgebiet von f. Die Menge $K := G \cup \partial G$ ist kompakt, somit liegen nur endlich viele Singularitäten $a_1, \ldots, a_N$ auf K, und die liegen dann alle in G. Wir schlagen um jedes dieser a_j einen kleinen Kreisweg Γ_j, der ganz in Ω' liegt und keine weitere Singularität in seinem Innern enthält. Nun kommt der entscheidende Punkt:

Der Zyklus $\gamma := \partial G - \sum_{j=1}^N \Gamma_j$ *ist nullhomolog modulo* Ω'.

⌜ Ein Punkt $z \in \complement\Omega'$ liegt in $\complement\Omega$ oder in S. Ist $z \in \complement\Omega$ oder eine Singularität ausserhalb G, so ist $n(\partial G, z) = 0$, und auch alle $n(\Gamma_j\,, z)$ sind 0. Ist $z = a_j$ eine Singularität im Innern von G, so ist $n(\partial G, z) = 1$ und $n(\Gamma_j\,, z) = 1$, und alle $n(\Gamma_l\,, z)$ mit $l \neq j$ sind 0. Alles in allem ergibt sich, dass $n(\gamma, z) = 0$ ist für alle $z \in \complement\Omega'$. ⌟

Aus dem allgemeinen Satz von Cauchy **(4.3)** ergibt sich nunmehr

$$\int_{\partial G} f(z)\,dz = \sum_{j=1}^{N} \int_{\Gamma_j} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{N} \operatorname{res}\big(f \bigm| a_j\big)\ ,$$

was zu beweisen war. ┘

4.5.2. Es sei

$$R(x) := \frac{p(x)}{q(x)}\ , \qquad \deg(q) - \deg(p) \geq 2\ , \qquad q(x) \neq 0 \quad (x \in \mathbb{R}) \tag{3}$$

eine rationale Funktion. Unter den angegebenen Umständen hat das uneigentliche Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\,dx := \lim_{r\to\infty} \int_{-r}^{r} R(x)\,dx$$

einen wohlbestimmten endlichen Wert. Dieser Wert soll nun mit Hilfe des Residuenkalküls berechnet werden; das einfachste Beispiel hierzu ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx\ . \tag{4}$$

Wir errichten über der Strecke $[-r, r\,] \subset \mathbb{C}$ einen Halbkreis G mit begrenzendem Bogen γ_r (Fig. 4.5.3), wobei wir r von Anfang an so gross wählen, dass alle in der oberen Halbebene H liegenden Pole von R im Innern dieses Halbkreises liegen. Nach dem Residuensatz ist dann

$$\int_{-r}^{r} R(x)\,dx + \int_{\gamma_r} R(z)\,dz = \int_{\partial G} R(z)\,dz = 2\pi i \sum_{a\in H} \operatorname{res}\big(R \bigm| a\big)\ . \tag{5}$$

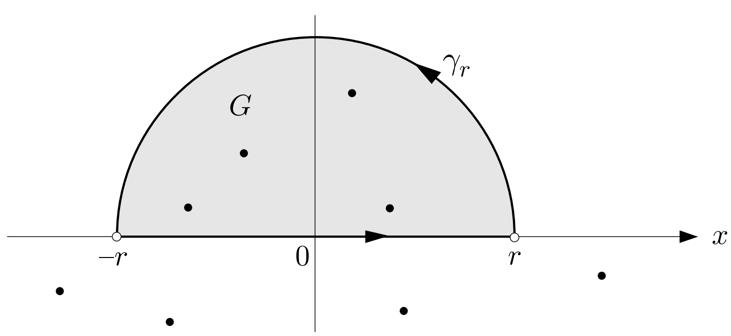

Fig. 4.5.3

Was nun das Integral längs γ_r betrifft, so argumentieren wir folgendermassen: Für grosse $|z| = r$ gilt wegen $\deg(q) - \deg(p) \geq 2$ eine Abschätzung der Form

$$|R(z)| \leq \frac{M}{|z|^2} = \frac{M}{r^2} \tag{6}$$

mit einem geeigneten M; anderseits hat γ_r die Länge πr. Nach **(3.1)**(d) folgt hieraus

$$\left| \int_{\gamma_r} R(z)\, dz \right| \leq \frac{M\pi}{r} \qquad (r \gg 1)$$

und somit

$$\lim_{r\to\infty} \int_{\gamma_r} R(z)\, dz = 0 \ .$$

Da die rechte Seite von (5) von r nicht abhängt, haben wir damit folgendes bewiesen:

(4.15) *Unter den Bedingungen* (3) *gilt*

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\, dx = 2\pi i \sum_{a\in H} \operatorname{res}\bigl(R \bigm| a\bigr) \,, \qquad H := \{z \,|\, \operatorname{Im} z > 0\} \ .$$

① Wir beginnen mit (4). Die Funktion $R(z) := 1/(1+z^2)$ hat genau einen Pol in der oberen Halbebene, nämlich einen einfachen Pol an der Stelle i. Nach **(4.13)**(b) berechnet sich das zugehörige Residuum zu

$$\operatorname{res}\bigl(R \bigm| i\bigr) = \left.\frac{1}{2z}\right|_{z:=i} = \frac{-i}{2} \,,$$

und **(4.15)** liefert nunmehr

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx = 2\pi i \cdot \frac{-i}{2} = \pi \ . \tag{7}$$

○

② Das Integral

$$I := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+x+1)^2}\, dx$$

erfordert mehr Aufwand. Die rationale Funktion

$$R(z) := \frac{1}{(z^2+z+1)^2}$$

besitzt je einen Pol der Ordnung 2 an den beiden Stellen

$$\omega := -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3} = e^{2\pi i/3}\,, \qquad \bar\omega := -\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\sqrt{3} = e^{-2\pi i/3}$$

und folglich die Partialbruchzerlegung

$$R(z) = \frac{A}{(z-\omega)^2} + \frac{B}{z-\omega} + \frac{\bar A}{(z-\bar\omega)^2} + \frac{\bar B}{z-\bar\omega}\ .$$

Hiervon benötigen wir an sich nur den Koeffizienten bei $\dfrac{1}{z-\omega}$, also das B. Trotzdem müssen wir nun ein Gleichungssystem mit vier Unbekannten auflösen; es ergibt sich

$$B = -\frac{2}{3\sqrt{3}}\, i\ .$$

Auf Grund von **(4.15)** erhalten wir daher

$$I = 2\pi i\, B = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}\ ;$$

Mathematica hätte dafür 0.6 Sekunden benötigt. ○

4.5.3. Im Zusammenhang mit der Fourier-Transformation (Kapitel 6) werden Integrale der folgenden Form interessant:

$$I(\omega)\ :=\ \int_{-\infty}^{\infty} R(x)\, e^{i\omega x}\, dx\ .$$

Hier ist $R(x)$ eine rationale Funktion der Form (3) und ω reell. Eine Stammfunktion des Integranden ist nirgends in Sicht; der Residuenkalkül rettet uns aber: Ist $\omega \geq 0$, so gilt

$$\left|e^{i\omega z}\right| = \left|e^{i\omega(x+iy)}\right| = e^{-\omega y} \leq 1 \qquad (\operatorname{Im} z \geq 0)\,,$$

und hieraus folgt, vgl. (6):

$$\left|R(z)\,e^{i\omega z}\right| \le |R(z)| \le \frac{M}{r^2} \qquad \bigl(|z| = r\,,\ \operatorname{Im} z \ge 0\bigr)\ .$$

Wie in **4.5.2** schliesst man hieraus auf

$$\lim_{r\to\infty} \int_{\gamma_r} R(z)\,e^{i\omega z}\,dz = 0\,,$$

und es ergibt sich wie dort das folgende Endresultat:

(4.16) *Unter den Bedingungen* (3) *und* $\omega \ge 0$ *gilt*

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\,e^{i\omega x}\,dx = 2\pi i \sum_{a\in H} \operatorname{res}\bigl(R(z)e^{i\omega z} \bigm| a\bigr)\,, \qquad H := \{z \mid \operatorname{Im} z > 0\}\ .$$

③ Wir betrachten speziell das Integral

$$I(\omega)\ :=\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega x}}{a^2+x^2}\,dx\,, \qquad a > 0\ .$$

Die Funktion

$$f(z) := \frac{e^{i\omega z}}{a^2+z^2}$$

besitzt in der oberen Halbebene einen einfachen Pol an der Stelle $z := ia$; Satz **(4.16)** und die Regel **(4.13)**(b) liefern daher

$$I(\omega) = 2\pi i\ \operatorname{res}\bigl(f \bigm| ia\bigr) = 2\pi i\,\frac{e^{i\omega\cdot ia}}{2ia} = \frac{\pi}{a}\,e^{-a\omega} \qquad (\omega \ge 0)\ .$$

Wir müssen uns noch von der Voraussetzung $\omega \ge 0$ befreien. Wegen $e^{i\omega x} = \cos\omega x + i\sin\omega x$ ist $I(\omega)$ von vorneherein ein *gerade* Funktion von ω. Damit erhalten wir definitiv

$$I(\omega)\ =\ \frac{\pi}{a}\,e^{-a|\omega|} \qquad (\omega \in \mathbb{R})\,;$$

der Spezialfall (7) ist hierin enthalten. ○

4.5.4. Integrale der Form

$$I := \int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)\, dt$$

kommen relativ häufig vor. Hier ist $f(t) := R(\cos t, \sin t)$ ein rationaler Ausdruck in $\cos t$ und $\sin t$, und es wird über eine Vollperiode integriert. Dabei nehmen wir natürlich an, dass $f(t)$ für alle reellen t wohldefiniert ist.

Der Trick besteht nun darin, das gegebene Integral in ein komplexes Linienintegral längs ∂D zu verwandeln. Dabei wird die übliche Darstellung

$$\partial D: \quad t \mapsto z(t) = e^{it} \qquad (0 \le t \le 2\pi)$$

zugrundegelegt; zu dieser Darstellung gehört das Differential

$$dz = \dot z(t)\, dt = i\, e^{it}\, dt\ .$$

Wir können nun folgendermassen argumentieren:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} R\Bigl(\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}, \frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}\Bigr)\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} R\Bigl(\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}, \frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}\Bigr)\, \frac{1}{ie^{it}}\; ie^{it}\, dt \\ &= \frac{1}{i}\int_{\partial D} \frac{1}{z}\, R\Bigl(\frac{z+1/z}{2}, \frac{z-1/z}{2i}\Bigr)\, dz = \frac{1}{i}\int_{\partial D} \tilde R(z)\, dz\ . \end{aligned}$$

Hier ist die durch Verrechnung entstandene Funktion

$$\tilde R(z) := \frac{1}{z} R\Bigl(\frac{z+1/z}{2}, \frac{z-1/z}{2i}\Bigr) \tag{8}$$

eine rationale Funktion von z, die auf ∂D keine Pole besitzt $\bigl($sonst wäre $f(t)$ für gewisse reelle t undefiniert$\bigr)$. Nach dem Residuensatz **(4.14)** gilt somit

$$\int_{\partial D} \tilde R(z)\, dz = 2\pi i \sum_{a\in D} \operatorname{res}\bigl(\tilde R \mid a\bigr)\ .$$

Alles in allem haben wir damit folgendes bewiesen:

(4.17) *Unter den angegebenen Voraussetzungen über die Funktion $R(\cdot,\cdot)$ gilt*

$$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)\, dt \;=\; 2\pi \sum_{a\in D} \operatorname{res}\left(\tilde R(z) \mid a\right) ,$$

wobei $\tilde R(z)$ durch (8) *definiert ist.*

④ Die gerade 2π-periodische Funktion

$$f(t) \;:=\; \frac{2\cos t - 1}{5 - 4\cos t} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

lässt wie folgt in eine Fourier-Reihe (siehe Kapitel 5) entwickeln : Es gilt

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kt) \qquad (t \in \mathbb{R}) , \tag{9}$$

wobei die Koeffizienten a_k gegeben sind durch

$$a_k \;:=\; \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(kt)\, dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{2\cos t - 1}{5 - 4\cos t}\, e^{ikt}\, dt \ .$$

Diese a_k sollen nun berechnet werden.

Auf Grund von (8) ist im vorliegenden Fall

$$\tilde R_k(z) = \frac{1}{z}\,\frac{(z + 1/z) - 1}{5 - 2(z + 1/z)}\, z^k = -\frac{z^2 - z + 1}{2z^2 - 5z + 2}\, z^{k-1} \qquad (k \ge 0) \ . \tag{10}$$

Der Nenner besitzt die beiden einfachen Nullstellen 2 und $\frac{1}{2}$, wovon nur $\frac{1}{2}$ in D liegt. Mit Hilfe der Regel **(4.13)**(b) berechnet man

$$\operatorname{res}\left(\tilde R_k \mid \tfrac{1}{2}\right) = -\left.\frac{(z^2 - z + 1)z^{k-1}}{4z - 5}\right|_{z:=1/2} = \frac{1}{2^{k+1}} \qquad (k \ge 0) \ .$$

Im Fall $k = 0$ liegt auch im Ursprung ein einfacher Pol vor. An (10) ist unmittelbar abzulesen, dass $\tilde R_0$ dort das Residuum $-\frac{1}{2}$ besitzt, das sich mit $\operatorname{res}\left(\tilde R_0 \mid \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$ gerade heraushebt.

Mit Hilfe von **(4.17)** erhalten wir nun

$$a_k = \frac{1}{\pi}\, 2\pi \operatorname{res}\bigl(\tilde{R}_k \bigm| \tfrac{1}{2}\bigr) = \frac{1}{2^k} \qquad (k \geq 1)$$

und $a_0 = 0$. Im Hinblick auf (9) haben wir demnach die Darstellung

$$\frac{2\cos t - 1}{5 - 4\cos t} = \frac{1}{2}\cos t + \frac{1}{4}\cos(2t) + \frac{1}{8}\cos(3t) + \ldots \qquad (t \in \mathbb{R})\ .$$

○

⑤ Das Integral

$$I \ := \int_0^{2\pi} \frac{1}{\cos^4 t + \sin^4 t}\, dt$$

mit Hilfe von Substitutionen usw. zu berechnen, wäre eine Herkulesarbeit. Mit Hilfe des Residuenkalküls geht es folgendermassen: Als erstes bildet man gemäss (8) die Funktion

$$\tilde{R}(z) \ = \ \frac{1}{z}\,\frac{16}{(z+1/z)^4 + (z-1/z)^4} = \frac{8z^3}{z^8 + 6z^4 + 1} =: \frac{p(z)}{q(z)}$$

und hat als nächstes die in D liegenden Pole von $\tilde{R}$ zu bestimmen. Die Gleichung $q(z) = 0$ geht mit der Substitution $z^4 := w$ über in die quadratische Gleichung $w^2 + 6w + 1 = 0$; diese besitzt die beiden Lösungen

$$w_\pm := -3 \pm \sqrt{8}\ .$$

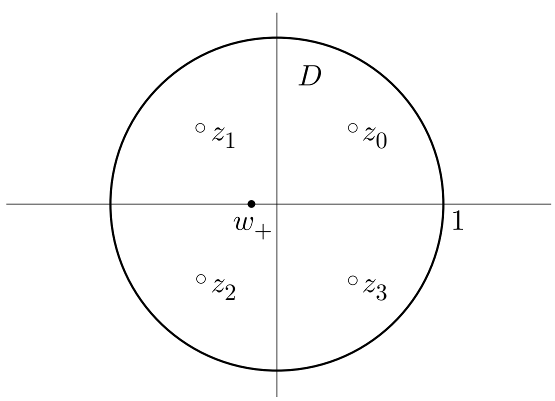

Fig. 4.5.4

Hiervon liegt nur w_+ in D. Die Funktion $\tilde{R}$ besitzt daher in D genau vier einfache Pole z_k, nämlich die vier Wurzeln der Gleichung $z^4 = w_+$, siehe die Fig. 4.5.4. Das Residuum von $\tilde{R}$ in einem z_k berechnen wir wieder mit der Regel **(4.13)**(b):

$$\operatorname{res}\big(\tilde{R} \mid z_k\big) = \frac{p(z_k)}{q'(z_k)} = \frac{8z_k^3}{8z_k^7 + 24z_k^3} = \frac{1}{z_k^4 + 3} = \frac{1}{w_+ + 3} = \frac{1}{\sqrt{8}} \ .$$

Damit ergibt sich

$$I = 2\pi \sum_{k=0}^{3} \operatorname{res}\big(\tilde{R} \mid z_k\big) = 2\pi \cdot 4 \cdot \frac{1}{\sqrt{8}} = \sqrt{8}\,\pi \ .$$

$\bigcirc$

4.5.5 Es sei $-1 < \lambda < 1$. Das Integral

$$I := \int_0^\infty \frac{t^\lambda}{1+t^2}\,dt$$

ist an der unteren Grenze vielleicht, anderen oberen Grenze sicher uneigentlich, aber für die zugelassenen Werte von λ an beiden Enden konvergent. Zur Berechnung von I betrachten wir das Gebiet $G \subset \mathbb{C}^{-*}$ der Fig. 4.5.5 sowie auf $\mathbb{C}^{-*}$ die Funktion

$$f(z) := \frac{\exp(\lambda \operatorname{Log} z)}{1+z^2}$$

mit den beiden einfachen Polen $\pm i$. Dabei haben wir natürlich den Limes $R \to \infty$, $r \to 0+$, $\delta \to 0$ im Auge.

Auf Grund des Residuensatzes gilt

$$\int_{\partial G} f(z)\,dz = 2\pi i \,\big(\operatorname{res}\big(f \mid i\big) + \operatorname{res}\big(f \mid -i\big)\big) = 2\pi i \left(\frac{e^{\lambda i\pi/2}}{2i} + \frac{e^{-\lambda i\pi/2}}{-2i}\right)$$

und folglich

$$\int_{\partial G} f(z)\,dz = 2\pi i \,\sin\frac{\lambda\pi}{2} \ . \tag{11}$$

Das Integral über ∂G ist die Summe der vier Teilintegrale

$$I_k := \int_{\gamma_k} f(z)\,dz \ .$$

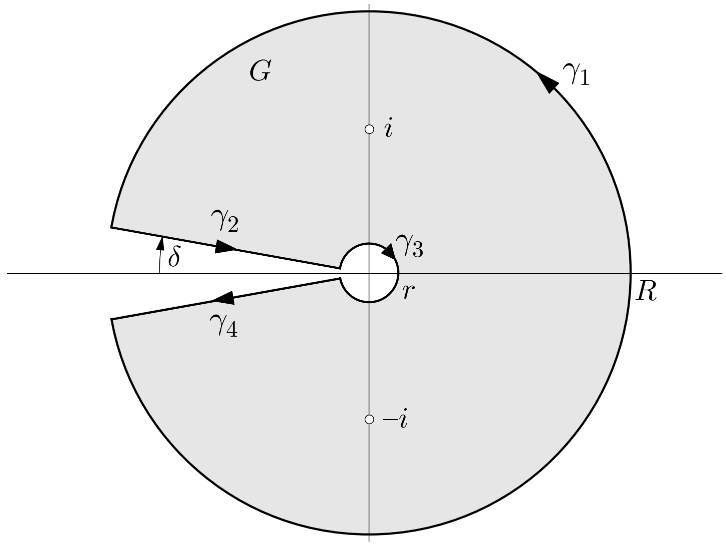

Fig. 4.5.5

Ist $|z| = R$, so gilt $\bigl|\exp(\lambda \operatorname{Log} z)\bigr| = R^\lambda$. Auf γ_1 haben wir daher

$$|f(z)| \leq C \frac{R^\lambda}{R^2}$$

für ein geeignetes C, und es folgt

$$|I_1| \leq C \frac{R^\lambda}{R^2} \cdot 2\pi R = C' R^{\lambda - 1} \doteq 0 \qquad (R \to \infty)\ . \tag{12}$$

Ganz ähnlich schliesst man bezüglich I_3: Auf γ_3 gilt für ein anderes C die Abschätzung $|f(z)| \leq C r^\lambda$; folglich ist auch

$$|I_3| \leq C r^\lambda \cdot 2\pi r = C' r^{1+\lambda} \doteq 0 \qquad (r \to 0+)\ . \tag{13}$$

Für $-\gamma_2$ verwenden wir die Parameterdarstellung

$$-\gamma_2: \quad t \mapsto z(t) := e^{i(\pi - \delta)}\, t \qquad (r \leq t \leq R)$$

und erhalten

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{\gamma_2} \frac{\exp(\lambda \operatorname{Log} z)}{1 + z^2}\, dz = -\int_r^R \frac{\exp\bigl(\lambda(\ln t + i(\pi - \delta))\bigr)}{1 + e^{-2i\delta} t^2}\, e^{i(\pi-\delta)}\, dt \\ &\doteq e^{i\lambda\pi} \int_0^\infty \frac{t^\lambda}{1 + t^2}\, dt = e^{i\lambda\pi} I\ , \end{aligned}$$

wobei $\doteq$ sinngemäss zu interpretieren ist. Auf analoge Weise ergibt sich

$$I_4 \doteq -e^{-i\lambda\pi} I \ .$$

Zusammen mit (12) und (13) erhalten wir daher insgesamt

$$\int_{\partial G} f(z)\, dz \doteq 2i \, \sin(\lambda\pi) I \ .$$

Die Konfrontation mit (11) liefert nunmehr die Gleichung

$$2i \, \sin(\lambda\pi)\, I = 2\pi i \, \sin\frac{\lambda\pi}{2} \ ,$$

und damit sind wir fertig: Es ergibt sich definitiv

$$\int_0^\infty \frac{t^\lambda}{1+t^2}\, dt \ = \ \frac{\pi}{2\cos(\lambda\pi/2)} \qquad (-1 < \lambda < 1)\ ,$$

in Übereinstimmung mit Gradshteyn/Ryzhik 3.241.2.

4.5.6. Zahlreiche weitere Beispiele findet man in Chapter VI des immer wieder nachgedruckten Klassikers

E.T. Whittaker & G.N. Watson: A course of modern analysis;
Cambridge University Press, 1902.