

5

Fourier-Reihen

Fourier-Theorie handelt von Funktionen $f: X \rightarrow \mathbb{C}$, deren Definitionsbereich X translationssymmetrisch ist. In diesem Buch werden drei Typen behandelt:

- Periodische Funktionen $f: \mathbb{R}/2\pi \rightarrow \mathbb{C}$;
- Zeitsignale $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$;
- (periodische) diskrete Datensätze; gemeint sind Funktionen

$$y: \mathbb{Z}/N \rightarrow \mathbb{C}, \quad k \mapsto y_k.$$

Grundfunktionen der Theorie sind jene Funktionen, die die Translationssymmetrie von X gewissermassen verinnerlicht haben. Bezeichnet man für einen Moment die Translation von Funktionsgraphen “um h nach rechts” mit T_h :

$$f \mapsto T_h f, \quad T_h f(x) := f(x - h),$$

so stellt man folgendes fest: Unter allen Funktionen haben die Exponentialfunktionen

$$\mathbf{e}_\omega: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \quad x \mapsto e^{i\omega x} \quad (\omega \in \mathbb{R})$$

die besondere Eigenschaft, dass sie sich unter Translationen T_h mit einem konstanten Faktor multiplizieren (und ausserdem den konstanten Betrag 1 haben):

$$e^{i\omega(x-h)} \equiv e^{-i\omega h} e^{i\omega x} \quad (x \in \mathbb{R}), \quad \text{d.h.} \quad T_h \mathbf{e}_\omega = e^{-i\omega h} \mathbf{e}_\omega.$$

Da das Differenzieren auf einen Vergleich von $T_{-h}f$ mit f für $h \rightarrow 0$ hinausläuft, multiplizieren sich diese Funktionen auch unter dem Ableitungsoperator $D: f \mapsto f'$ mit einer Konstanten: Bekanntlich gilt

$$\frac{d}{dx} e^{i\omega x} = i\omega e^{i\omega x}, \quad \text{d.h.} \quad D\mathbf{e}_\omega = i\omega \mathbf{e}_\omega.$$

Ist $X = \mathbb{R}/2\pi$, so können wir nicht jedes $\omega \in \mathbb{R}$ gebrauchen, da die Grundfunktionen selbst natürlich auch 2π -periodisch sein müssen. Aus der Bedingung $e^{i\omega(x+2\pi)} \equiv e^{i\omega x}$ folgt für ω die Bedingung $e^{2\pi i\omega} = 1$, d.h. $\omega \in \mathbb{Z}$. Die Grundfunktionen dieses Kapitels sind demnach die Funktionen

$$\mathbf{e}_k: t \mapsto e^{ikt} \quad (k \in \mathbb{Z}), \quad (1)$$

wobei wir wahlweise \mathbb{R} oder $\mathbb{R}/2\pi$ als Definitionsbereich ansehen können.

Das zentrale Problem ist in allen drei der oben angeführten Bereiche dasselbe: eine "beliebige" Funktion $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ als Linearkombination der jeweiligen Grundfunktionen darzustellen. Dass das in allen drei Fällen geht, ist eigentlich ein Wunder: Man musste ja damit rechnen, dass mit Hilfe der \mathbf{e}_ω nur die "harmonischen Anteile" eines gegebenen f dargestellt werden können und dann immer noch ein "unharmonischer Rest" übrigbleibt. In Wirklichkeit hängt alles zusammen: Die sogenannte *abstrakte harmonische Analysis* ermöglicht, den Inhalt der Kapitel 5–7 (und mehr) unter einem einheitlichen Gesichtspunkt darzustellen.

5.1 Definitionen

Eine endliche Linearkombination

$$\sum_{k=-N}^N c_k e^{ikt} \quad \text{bzw.} \quad \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^N (a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)) \quad (2)$$

der Funktionen (1) heisst ein **trigonometrisches Polynom** vom **Grad** $\leq N$, und eine formale Reihe

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt} \quad \text{bzw.} \quad \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)) \quad (3)$$

heisst eine **trigonometrische Reihe**. In diesem Kapitel geht es darum, beliebige (gegebene oder gesuchte) 2π -periodische Funktionen

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \quad f(t + 2\pi) \equiv f(t),$$

durch trigonometrische Polynome zu approximieren bzw. durch eine trigonometrische Reihe tatsächlich **darzustellen**. Hiermit ist folgendes gemeint: Für fast alle $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt} := \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=-N}^N c_k e^{ikt}. \quad (4)$$

Das “fast” bezieht sich auf den folgenden Sachverhalt: Wir möchten auch Funktionen mit Sprungstellen (vielleicht sogar mit logarithmischen Spitzen) in dieser Weise darstellen. In derartigen Ausnahmepunkten ist die korrekte Wiedergabe des Funktionswerts nicht gewährleistet. Wir werden uns das weiter unten im einzelnen ansehen.

In (2) und (3) wurde sowohl eine komplexe wie eine reelle Schreibweise der “Fourier-Objekte” angeboten. Damit hat es folgende Bewandnis: Für theoretische Betrachtungen ist die komplexe Schreibweise unbedingt vorzuziehen. In konkreten Beispielen jedoch geht es meistens um reellwertige Funktionen, häufig noch mit Symmetrien (gerade, ungerade, u.a.), und da erweist sich die reelle Schreibweise als vorteilhafter, da sie die in f vorhandenen Symmetrien reproduziert: Ist f reellwertig, so sind auch alle a_k und alle b_k reell; ist f gerade, so treten nur Cosinusterme auf, und ist f ungerade, so treten nur Sinusterme auf (s.u.).

Um die c_k ($k \in \mathbb{Z}$) und die a_k, b_k ($k \in \mathbb{N}$) ineinander umzurechnen, betrachten wir ein festes $k > 0$. Aus $e^{i\tau} = \cos \tau + i \sin \tau$ folgt

$$c_k e^{ikt} + c_{-k} e^{-ikt} \equiv a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)$$

mit

$$a_k = c_k + c_{-k}, \quad b_k = i(c_k - c_{-k}) \quad (k > 0), \quad (5)$$

und hieraus ergibt sich umgekehrt

$$c_k = \frac{1}{2}(a_k - ib_k), \quad c_{-k} = \frac{1}{2}(a_k + ib_k) \quad (k > 0). \quad (6)$$

Ferner erweist es sich als zweckmässig, $a_0 := 2c_0$ und $b_0 := 0$ zu setzen; damit treffen (5) und (6) auch noch für $k = 0$ zu.

Dass sich jede ‐vernünftige‐ Funktion $f: \mathbb{R}/2\pi \rightarrow \mathbb{C}$ in der Form (4) darstellen lässt, ist ein fundamentaler Existenzsatz, der nicht leicht zu beweisen ist; davon unten mehr. Überraschend einfach ist es jedoch, Formeln für die Koeffizienten c_k bzw. a_k, b_k einer derartigen Darstellung anzugeben.

(5.1) *In der Darstellung*

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt} \quad \text{bzw.} \quad f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt))$$

einer Funktion $f: \mathbb{R}/2\pi \rightarrow \mathbb{C}$ sind die Koeffizienten c_k bzw. a_k, b_k durch folgende Formeln gegeben:

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt & (k \in \mathbb{Z}), \\ a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(kt) dt & (k \geq 0), \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(kt) dt & (k \geq 1). \end{aligned} \tag{7}$$

Dabei darf auch über ein anderes Intervall der Länge 2π integriert werden.

Der Zusatz am Schluss ist ziemlich klar; er beruht darauf, dass wir den ‐Kreis‐ $\mathbb{R}/2\pi$ an einer beliebigen Stelle aufschneiden können, um ein passendes Integrationsintervall zu erhalten. Auf diesen Punkt werden wir im weiteren nicht jedesmal hinweisen.

Für den Beweis von (5.1) benötigen wir ein Instrument, das wir aus der Geometrie bzw. aus der linearen Algebra entlehnen, nämlich ein Skalarprodukt für 2π -periodische Funktionen. Sind f und g zwei derartige Funktionen, so ist ihr **Skalarprodukt**, eine komplexe Zahl, definiert durch

$$\langle f, g \rangle := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \overline{g(t)} dt$$

und entsprechend die **Norm** $\|f\| \geq 0$ von f (auch 2-Norm genannt) durch

$$\|f\|^2 = \langle f, f \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt .$$

Dieses Skalarprodukt besitzt die aus der linearen Algebra bekannten Eigenschaften (Bilinearität, Schwarzsche Ungleichung, usw.); wir verzichten darauf, sie im einzelnen aufzuführen. Gilt $\langle f, g \rangle = 0$, so heissen f und g zueinander **orthogonal**. Für unsere Grundfunktionen bestehen die folgenden **Orthogonalitätsrelationen**:

(5.2) (a) Für die Funktionen $\mathbf{e}_k : t \mapsto e^{ikt}$ gilt

$$\langle \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_l \rangle = \delta_{kl} := \begin{cases} 1 & (k = l) \\ 0 & (k \neq l) \end{cases} .$$

(b)

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kt) \cos(lt) dt = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kt) \sin(lt) dt = \pi \delta_{kl} \quad ((k, l) \neq (0, 0)) ,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kt) \sin(lt) dt = 0 \quad \forall k, \forall l .$$

□ Wir beweisen nur (a):

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_l \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ikt} \overline{e^{ilt}} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(k-l)t} dt \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi = 1 & (k = l) \\ \frac{1}{2\pi} \frac{1}{i(k-l)} e^{i(k-l)t} \Big|_0^{2\pi} = 0 & (k \neq l) \end{cases} \end{aligned}$$

□

Damit kommen wir zum Beweis der Koeffizientenformeln (5.1). Es genügt, über die c_k zu argumentieren; die Formeln für die a_k und die b_k ergeben sich dann unmittelbar aus (5).

□ Wir schreiben die Darstellung $f(t) = \sum_k c_k e^{ikt}$ in der Form

$$f = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \mathbf{e}_k$$

und multiplizieren auf beiden Seiten skalar mit \mathbf{e}_n , $n \in \mathbb{Z}$ beliebig. Es ergibt sich

$$\langle f, \mathbf{e}_n \rangle = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \langle \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_n \rangle = c_n , \quad (8)$$

denn alle Skalarprodukte $\langle \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_n \rangle$ mit $k \neq n$ sind 0, und $\langle \mathbf{e}_n, \mathbf{e}_n \rangle = 1$. Lesen wir (8) von rechts nach links, so erhalten wir nach Definition des Skalarprodukts

$$c_n = \langle f, \mathbf{e}_n \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt,$$

wie behauptet. ┘

Wir sind nun einen Schritt weiter: Ist eine beliebige 2π -periodische Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ gegeben, so definieren die Formeln (7) einen Koeffizientenvektor $(c_k \mid k \in \mathbb{Z})$. Mit den c_k lässt sich jedenfalls die formale Reihe $\sum_k c_k e^{ikt}$ bilden. Diese Reihe heisst **Fourier-Reihe** von f und ist der einzig mögliche Kandidat für eine Darstellung (4). Um auszudrücken, dass die c_k mit Hilfe von (7) aus f erhalten wurden, schreibt man gelegentlich

$$f(t) \rightsquigarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt}. \quad (9)$$

Wir hoffen natürlich, dass der \rightsquigarrow unter möglichst schwachen Voraussetzungen durch $=$ ersetzt werden kann. Bevor wir dazu kommen, noch drei Ergänzungen:

1. Man kann den Koeffizientenvektor $(c_k \mid k \in \mathbb{Z})$ als Funktion

$$\widehat{f}: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}, \quad k \mapsto \widehat{f}(k) := \langle f, \mathbf{e}_k \rangle$$

auffassen; diese Funktion wird **Fourier-Transformierte** der Ausgangsfunktion f genannt. Die Schreibweise \widehat{f} ist manchmal praktischer, da sie die Herkunft von f ausweist, was bei den c_k nicht der Fall ist.

2. Durch Inspektion der Koeffizientenformeln (5.1) bestätigt man ohne weiteres die folgenden Rechenregeln, die z.T. schon weiter oben erwähnt worden sind:

(5.3) (a) Die Fourier-Transformation $f \mapsto \widehat{f}$ ist linear:

$$(f + g)^\wedge = \widehat{f} + \widehat{g}, \quad (\lambda f)^\wedge = \lambda \widehat{f} \quad (\lambda \in \mathbb{C}).$$

(b) Ist f reellwertig, so gilt

$$c_{-k} = \overline{c_k} \quad (k \in \mathbb{Z}) \quad \text{bzw.} \quad a_k \in \mathbb{R}, b_k \in \mathbb{R} \quad (k \geq 0).$$

(c) Ist f eine gerade Funktion, so sind alle b_k gleich 0, und es gilt

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(t) \cos(kt) dt \quad (k \geq 0) .$$

(d) Ist f eine ungerade Funktion, so sind alle a_k gleich 0, und es gilt

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(t) \sin(kt) dt \quad (k \geq 0) .$$

3. Ist die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ periodisch mit einer gewissen Periode $T > 0$ (anstelle von 2π), so sieht ihre Fourier-Reihe folgendermassen aus:

$$f(t) \rightsquigarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{2k\pi it/T}$$

bzw.

$$f(t) \rightsquigarrow \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{2k\pi t}{T} + b_k \sin \frac{2k\pi t}{T} \right) .$$

Die Koeffizientenformeln (5.2) gehen über in

$$(5.3) \quad (e) \quad c_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-2k\pi it/T} dt ,$$

$$(f) \quad a_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos \frac{2k\pi t}{T} dt , \quad b_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin \frac{2k\pi t}{T} dt .$$

Es geht nun um den Sachverhalt (4). In den Lehrbüchern über Fourier-Reihen finden sich dazu unzählige Sätze. Wir bringen hier nur einen einzigen, den wir dann auch tatsächlich beweisen werden. Um ihn zu formulieren, führen wir noch die folgende allgemein übliche Bezeichnung ein: Ist eine Funktion $f: \mathbb{R}/2\pi \rightarrow \mathbb{C}$ vereinbart, so bezeichnet s_N die N -te Partialsumme der Fourier-Reihe von f :

$$s_N(t) := \sum_{k=-N}^N c_k e^{ikt} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^N (a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)) ;$$

es handelt sich dabei um ein trigonometrisches Polynom vom Grad $\leq N$. Der angekündigte Satz lautet:

(5.4) Die Funktion $f: \mathbb{R}/2\pi \rightarrow \mathbb{C}$ sei C -lipstetig, das heisst, es gelte

$$|f(t) - f(t')| \leq C |t - t'| \quad \forall t, t'. \quad (10)$$

Dann trifft für alle t die folgende Fehlerabschätzung zu:

$$|f(t) - s_N(t)| \leq \frac{8C}{\sqrt{N}}. \quad (11)$$

Insbesondere gilt $\lim_{N \rightarrow \infty} s_N(t) = f(t)$ für alle t .

Dieser Satz garantiert schon einmal die Konvergenz gegen den erwarteten Wert unter recht schwachen Voraussetzungen. In vielen Fällen ist die Konvergenz wesentlich besser, als (11) vermuten lässt. Allgemein lässt sich folgendes sagen: Je glatter die Funktion f , desto schneller gehen die c_k mit $|k| \rightarrow \infty$ gegen 0, und desto schneller konvergieren die s_N gegen f .

5.2 Beispiele

Trigonometrische Polynome sind natürlich ihre eigenen Fourier-Reihen. Fast dasselbe ist es mit (algebraischen) Polynomen in $\sin t$ und $\cos t$.

Bsp: $\cos^4 t + \sin^4 t, \cos^N t$

Derartige Polynome können mit algebraischen Mitteln, d.h. ohne Integration, auf trigonometrische Polynome im eigentlichen Sinn umgerechnet werden, womit sie bereits nach Fourier entwickelt sind.

Bsp: $\cos^N t = (e^{it} + e^{-it})^N / 2^N = (e^{iNt} + \dots + e^{-iNt}) / 2^N$.

Es sei weiter f eine in der Umgebung von $\partial D \subset \mathbb{C}$ analytische Funktion. Es gibt dann ein $\beta > 0$, so dass f in dem Ringgebiet

$$G := \{z \in \mathbb{C} \mid e^{-\beta} < |z| < e^\beta\}$$

analytisch ist. Ein derartiges f besitzt nach (4.7) eine Laurent-Entwicklung

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k z^k \quad (z \in G)$$

mit gewissen Koeffizienten c_k . In den Punkten $z := e^{it} \in \partial D$ sieht das folgendermassen aus:

$$f(e^{it}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt} .$$

Wir behaupten: Dies ist nichts anderes als die Fourier-Entwicklung der 2π -periodischen Funktion

$$\tilde{f}(t) := f(e^{it}) \quad (t \in \mathbb{R}) .$$

Zum Beweis betrachten wir die Formel 4.3.(5) für die Laurent-Koeffizienten:

$$c_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta^k} \frac{d\zeta}{\zeta} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(e^{it})}{e^{ikt}} \frac{ie^{it} dt}{e^{it}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{f}(t) e^{-ikt} dt .$$

Umgekehrt: Geht eine gegebene 2π -periodische Funktion $t \mapsto \tilde{f}(t)$ durch die formale Substitution $e^{it} := z$ (d.h., durch die ‘‘Verpflanzung’’ von \tilde{f} auf den Einheitskreis) in eine analytische Funktion $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ über, so lassen sich die Fourier-Koeffizienten von \tilde{f} als Laurent-Koeffizienten von f begreifen. Für deren Berechnung stehen dann die Methoden der Komplexen Analysis zur Verfügung, siehe dazu Beispiel 4.5.④.

Bis dahin haben wir immer von periodischen, also auf ganz \mathbb{R} erklärten Funktionen gesprochen. Mit Hilfe von Fourier-Reihen lassen sich aber auch Funktionen darstellen, die nur auf einem endlichen x -Intervall $I := [a, b]$ der Länge $L := b - a$ erklärt sind.

Bsp: $[-\pi, \pi]$, $[0, L]$, $[-a, a]$

Man denkt sich einfach diese Funktionen L -periodisch auf ganz \mathbb{R} fortgesetzt (wobei es an den Endpunkten von I zu Konflikten kommen kann) und berechnet die Fourier-Koeffizienten durch Integration über das Intervall I , wo die Ausgangsfunktion f explizit vorliegt:

$$a_k = \frac{2}{L} \int_a^b f(x) \cos \frac{2k\pi x}{L} dx , \quad b_k = \frac{2}{L} \int_a^b f(x) \sin \frac{2k\pi x}{L} dx .$$

Dann gilt

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{2k\pi x}{L} + b_k \sin \frac{2k\pi x}{L} \right) \quad (a < x < b) .$$

① Wir betrachten für ein fest vorgegebenes $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ die Funktion

$$f(t) := \cos(\alpha t) \quad (-\pi \leq t \leq \pi)$$

(siehe die Fig. 5.2.1). Da f gerade ist, besitzt f eine formale Fourier-Reihe der Form

$$f(t) \rightsquigarrow \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kt)$$

mit

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(\alpha t) \cos(kt) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\cos((\alpha + k)t) + \cos((\alpha - k)t) \right) dt .$$

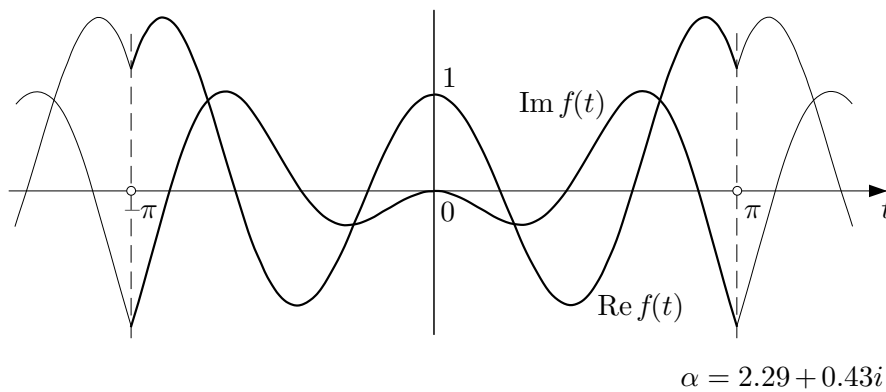


Fig. 5.2.1

Nach Voraussetzung über α sind die dabei auftretenden Nenner $\neq 0$, und es ergibt sich

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{\sin((\alpha + k)t)}{\alpha + k} \Big|_0^{\pi} + \frac{\sin((\alpha - k)t)}{\alpha - k} \Big|_0^{\pi} \right) \\ &= \frac{(-1)^k}{\pi} \sin(\alpha\pi) \left(\frac{1}{\alpha + k} + \frac{1}{\alpha - k} \right) = \frac{(-1)^k}{\pi} \sin(\alpha\pi) \frac{2\alpha}{\alpha^2 - k^2} . \end{aligned}$$

Nach (5.4) konvergiert die Fourier-Reihe von f gegen f ; wir haben daher

$$\cos(\alpha t) = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi} \left(\frac{1}{\alpha} + 2\alpha \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \cos(kt)}{\alpha^2 - k^2} \right) \quad (-\pi \leq t \leq \pi). \quad (1)$$

Damit wäre das gegebene f auf seinem Definitionsintervall nach Fourier entwickelt.

Wir bleiben noch einen Moment bei diesem Beispiel und setzen in (1) speziell $t := 0$. Nach Division mit $\sin(\alpha\pi) \neq 0$ ergibt sich

$$\frac{1}{\sin(\alpha\pi)} = \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{\alpha} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2\alpha}{\alpha^2 - k^2} \right). \quad (2)$$

Wir betrachten nun den bislang festgehaltenen Parameter α als eine komplexe Variable und schreiben dafür z . Die Formel (2) geht dann über in

$$\frac{1}{\sin(\pi z)} = \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{1}{z-k} + \frac{1}{z+k} \right) \right) \quad (z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}),$$

was wir als eine "Partialbruchzerlegung" der Funktion $\phi(z) := 1/\sin(\pi z)$ auffassen können. Die Zerlegung bringt zum Ausdruck, daß diese Funktion an den Stellen $k \in \mathbb{Z}$ je einen einfachen Pol besitzt.

Erteilen wir in (1) der Variablen t den Wert π , so ergibt sich analog

$$\cot(\alpha\pi) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{\alpha} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\alpha}{\alpha^2 - k^2} \right)$$

bzw.

$$\cot(\pi z) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z-k} + \frac{1}{z+k} \right) \right) \quad (z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z})$$

und damit eine "Partialbruchzerlegung" des Cotangens. ○

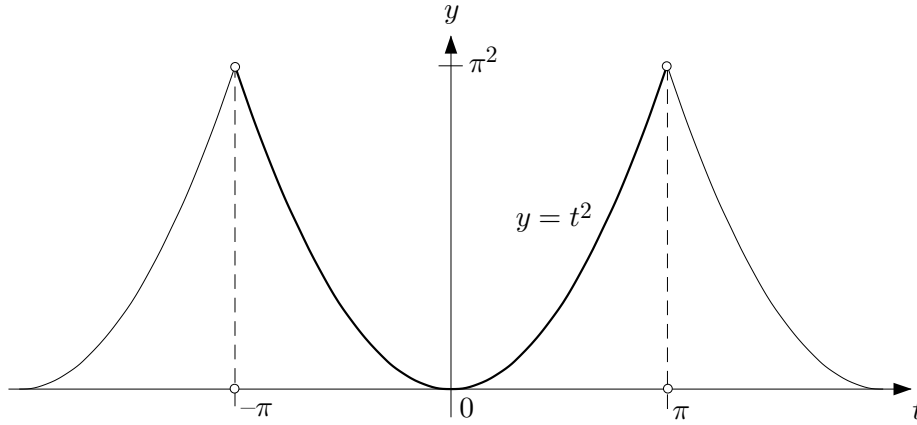


Fig. 5.2.2

② Die 2π -periodische Fortsetzung der Funktion

$$f(t) := t^2 \quad (-\pi \leq t \leq \pi)$$

(siehe die Fig. 5.2.2) ist offensichtlich lipstetig. Somit besitzt f nach (5.4) eine Fourier-Darstellung der Form

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kt) \quad (-\pi \leq t \leq \pi).$$

Dabei ist

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t^2 dt = \frac{2\pi^2}{3},$$

und für $k \geq 1$ gilt

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t^2 \cos(kt) dt = \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{k} t^2 \sin(kt) \Big|_0^{\pi} - \frac{2}{k} \int_0^{\pi} t \sin(kt) dt \right) \\ &= 0 - \frac{4}{k\pi} \left(-\frac{1}{k} t \cos(kt) \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{k} \int_0^{\pi} \cos(kt) dt \right) \\ &= \frac{4(-1)^k}{k^2} + 0. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir die Identität

$$t^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4(-1)^k}{k^2} \cos(kt) \quad (-\pi \leq t \leq \pi). \quad (3)$$

Wir benutzen dieses Resultat, um einen Wert der Riemannschen Zetafunktion

$$\zeta(s) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s} \quad (\operatorname{Re} s > 1)$$

zu berechnen: Setzt man in (3) speziell $t := \pi$, so ergibt sich

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} .$$

Damit ergibt sich für die Summe der reziproken Quadratzahlen der Wert

$$\zeta(2) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} ,$$

den Euler als erster gefunden hat. ○

In technischen Anwendungen treten häufig Funktionen mit Sprungstellen auf, zum Beispiel Rechteckspulse oder auch kompliziertere Signale, die plötzlich ein- bzw. ausgeschaltet werden. Wie steht es da mit der Fourier-Entwicklung? Um die zu erwartenden Phänomene zu ergründen, betrachten wir die einfachste periodische Funktion mit Sprungstellen, die sich denken lässt (Fig. 5.2.3):

$$J(t) := \begin{cases} \frac{\pi - t}{2} & (0 < t < 2\pi) \\ J(t + 2\pi) & (t \in \mathbb{R}) \end{cases}$$

(J für *jump*). Die Sprungstellen befinden sich an den Punkten $2k\pi$; in diesen Punkten lassen wir die Funktion zunächst undefiniert. Auf die Fourier-Koeffizienten hat das keinen Einfluss, da sie durch Integration zustandekommen. Die Funktion J ist ungerade; wir berechnen daher nur ihre Sinuskoeffizienten b_k :

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{2} (\pi - t) \sin(kt) dt = \frac{1}{\pi} \left(-(\pi - t) \frac{\cos(kt)}{k} \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{\cos(kt)}{k} dt \right) \\ &= \frac{1}{k} - \frac{1}{\pi k^2} \sin(kt) \Big|_0^{\pi} = \frac{1}{k} . \end{aligned}$$

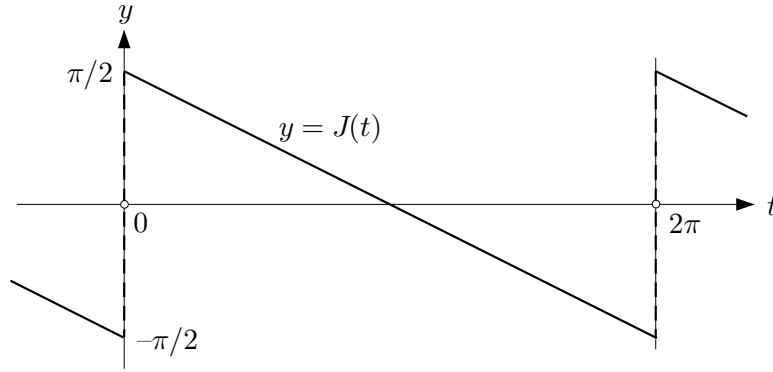


Fig. 5.2.3

Demnach besitzt J die folgende formale Fourier-Entwicklung:

$$J(t) \rightsquigarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kt)}{k} . \quad (4)$$

Wir stellen schon einmal fest, dass die Fourier-Koeffizienten mit $k \rightarrow \infty$ nur sehr langsam abnehmen. Da die harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k$ divergiert, ist die erhaltene Reihe (4) nicht absolut konvergent und für numerisches Arbeiten unbrauchbar. Trotzdem kann man sich fragen, ob sie die Funktion J wenigstens “auf dem Papier” repräsentiert. Das ist nun in der Tat der Fall. Wie wir gleich zeigen werden, gilt nämlich (wir wechseln den Variablennamen)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k\phi)}{k} = \frac{\pi - \phi}{2} \quad (0 < \phi < 2\pi) , \quad (5)$$

und für $\phi = 0$ hat die Reihe natürlich den Wert 0. An der Sprungstelle 0 liegt demnach der folgende Sachverhalt vor:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} s_N(0) = 0 = \frac{J(0+) + J(0-)}{2} . \quad (6)$$

Hätten wir also von Anfang an $J(0) := 0$ definiert (was hiermit nachgeholt sei), so würde in (4) anstelle von \rightsquigarrow für alle t das Gleichheitszeichen gelten.

□ Zum Beweis von (5) betrachten wir die analytische Funktion

$$f(z) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} z^k \quad (|z| < 1) .$$

Es ist $f(0) = 0$ und

$$f'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} z^{k-1} = 1 + z + z^2 + \dots = \frac{1}{1-z}.$$

Hieraus schliessen wir auf

$$f(z) = -\text{Log}(1-z) = \ln \frac{1}{|1-z|} - i \text{Arg}(1-z) \quad (|z| < 1).$$

Wir schreiben nun $z = r e^{i\phi}$ und haben dann

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k\phi)}{k} r^k = \text{Im } f(z) = -\text{Arg}(1 - r e^{i\phi}) \quad (r < 1).$$

Führen wir hier auf beiden Seiten den Grenzübergang $r \rightarrow 1-$ durch, so ergibt sich

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k\phi)}{k} = -\text{Arg}(1 - e^{i\phi}),$$

und ein Blick auf die Fig. 5.2.4 zeigt, dass hier die rechte Seite den behaupteten Wert $(\pi - \phi)/2$ hat. \square

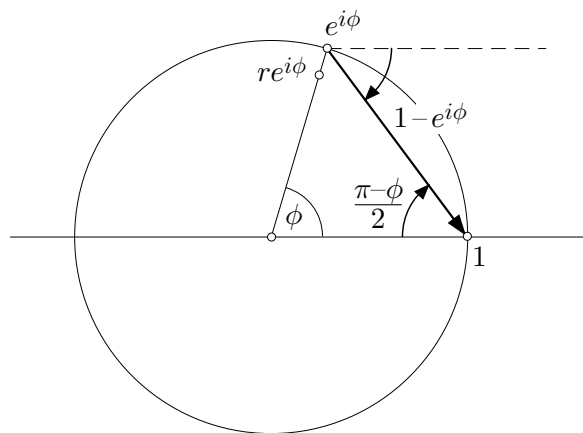


Fig. 5.2.4

Dieses Beispiel scheint sehr speziell. Trotzdem können wir nun einen allgemeinen Satz daraus machen:

(5.5) Die 2π -periodische Funktion f sei stetig differenzierbar bis auf endlich viele Sprungstellen $\tau_1, \dots, \tau_r \in \mathbb{R}/2\pi$, wobei in den Sprungstellen die einseitigen Grenzwerte von f und f' existieren. Dann gilt

$$\lim_{N \rightarrow \infty} s_N(t) = \begin{cases} f(t) & (t \neq \tau_j, 1 \leq j \leq r) \\ \frac{f(\tau_j+) + f(\tau_j-)}{2} & (t = \tau_j) \end{cases} .$$

□ Zur Vereinfachung nehmen wir von vorneherein

$$f(\tau_j) = \frac{f(\tau_j+) + f(\tau_j-)}{2} \quad (1 \leq j \leq r)$$

an und müssen dann zeigen, dass $\lim_{N \rightarrow \infty} s_N(t) = f(t)$ für alle t zutrifft. Es seien

$$p_j := f(\tau_j+) - f(\tau_j-) \quad (1 \leq j \leq r)$$

die Sprunghöhen an den Stellen τ_j . Mit diesen p_j bilden wir nun die Funktion

$$g(t) := f(t) - \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^r p_j J(t - \tau_j) . \quad (7)$$

Die Funktion g ist stetig differenzierbar, ausser vielleicht in den Punkten τ_j . In einem derartigen Punkt gilt

$$\begin{aligned} g(\tau_j+) - g(\tau_j) &= f(\tau_j+) - f(\tau_j) - \frac{1}{\pi} p_j (J(0+) - J(0)) \\ &= f(\tau_j+) - f(\tau_j) - \frac{p_j}{2} = 0 \end{aligned}$$

(nur ein J -Summand liefert einen Beitrag) und analog $g(\tau_j-) - g(\tau_j) = 0$. Hiernach ist g in den Punkten τ_j stetig und folglich auf $\mathbb{R}/2\pi$ stückweise glatt. Damit ist g lipstetig und wird nach **(5.4)** durch seine Fourier-Reihe dargestellt. Wir haben oben gesehen, dass auch J durch seine Fourier-Reihe repräsentiert wird; dasselbe gilt von den Translatierten $t \mapsto J(t - \tau_j)$, und wegen

$$f(t) = g(t) + \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^r p_j J(t - \tau_j)$$

trifft dies schliesslich auch für f zu. □

③ Wir betrachten einen T -periodischen Rechteckspuls der Breite $a < T$ und der ‘‘Gesamtenergie’’ 1:

$$f(t) := \begin{cases} \frac{1}{a} & \left(|t| \leq \frac{a}{2}\right) \\ 0 & \left(\frac{a}{2} < t \leq \frac{T}{2}\right) \\ f(t+T) & (t \in \mathbb{R}) \end{cases} .$$

Wie angesetzt, ist f eine gerade Funktion. Sie besitzt daher nur Cosinuskoeffizienten a_k , die sich nach (5.3)(f) wie folgt berechnen:

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos \frac{2k\pi t}{T} dt = \frac{2}{aT} \int_{-a/2}^{a/2} \cos \frac{2k\pi t}{T} dt .$$

Es ergibt sich $a_0 = 2/T$ und

$$a_k = \frac{2}{aT} \frac{T}{2k\pi} \sin \frac{2k\pi t}{T} \Big|_{-a/2}^{a/2} = \frac{2}{ak\pi} \sin \frac{ak\pi}{T} = \frac{2}{T} \operatorname{sinc} \frac{ak\pi}{T} \quad (k > 0) .$$

Damit erhalten wir die folgende Fourier-Zerlegung unseres Rechteckspulses:

$$f(t) = \frac{1}{T} + \frac{2}{T} \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{sinc} \frac{ak\pi}{T} \cos \frac{2k\pi t}{T} .$$

Die Fourier-Koeffizienten oszillieren also in eigentümlicher Weise und gehen mit $k \rightarrow \infty$ wie $1/k$ gegen 0. \bigcirc

Wir haben schon darauf hingewiesen, dass die Fourier-Reihe der Sprungfunktion J nur schlecht konvergiert, und zwar für alle t , nicht nur für die t in der Nähe der Sprungstelle. In der Nähe der Sprungstelle tritt aber noch ein besonders unangenehmer Effekt auf, der als **Gibbssches Phänomen** bezeichnet wird. Betrachte hierzu die Fig. 5.2.5, wo wir s_N für $N := 15$ zusammen mit f dargestellt haben. Es zeigt sich, dass s_N den Maximalwert $\frac{\pi}{2}$ von J unmittelbar rechts von 0 um ein gehöriges Stück überschießt. Das ist kein ‘‘numerischer Artefakt’’, und der Effekt verschwindet auch nicht, wenn man zu grösseren Werten von N übergeht. Wir behaupten nämlich: An der Stelle $t_N := \frac{\pi}{N}$ nimmt s_N einen Wert σ_N an mit

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sigma_N = \int_0^{\pi} \operatorname{sinc} t dt \doteq 1.852 .$$

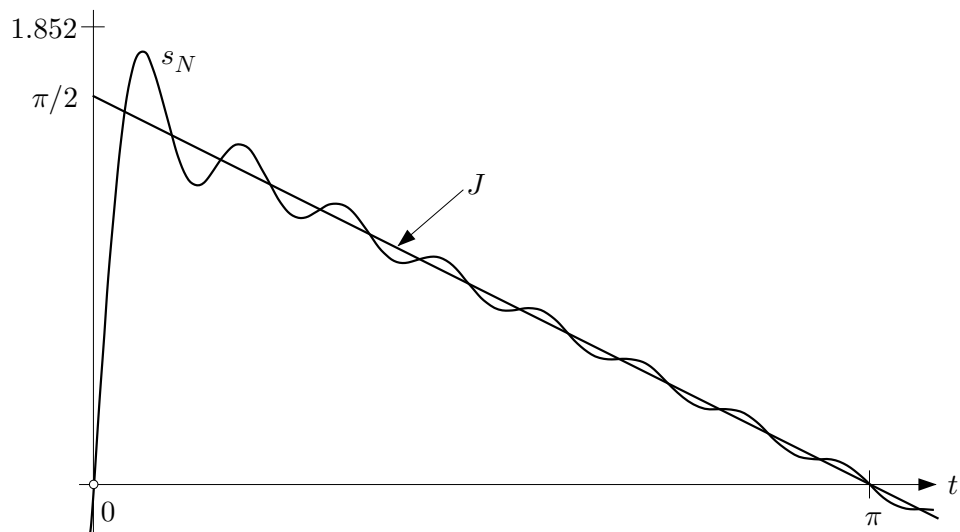


Fig. 5.2.5

□ Für s_N verweisen wir auf (4). Der Wert σ_N lässt sich als Riemannsche Summe für das angeschriebene Integral interpretieren:

$$\sigma_N := s_N(t_N) = \sum_{k=1}^N \frac{\sin(k\pi/N)}{k} = \sum_{k=1}^N \frac{\pi}{N} \frac{\sin(k\pi/N)}{k\pi/N} \doteq \int_0^\pi \operatorname{sinc} t \, dt. \quad \square$$

Es ist klar, dass das Gibbsche Phänomen bei jeder Funktion mit Sprungstellen auftritt, also auch bei dem in Beispiel ③ betrachteten Rechteckspuls.

5.3 Theoretische Ergänzungen

Auf Grund der Orthogonalitätsrelationen (5.2)(a) und des Hauptsatzes (5.4) stellen die Funktionen \mathbf{e}_k ($k \in \mathbb{Z}$) eine Art orthonormierter Basis des Funktionenraums

$$\mathcal{X} := \{f \mid f: \mathbb{R}/2\pi \rightarrow \mathbb{C}\}$$

dar. Dann müsste aber auch ein ‘‘Satz von Pythagoras’’ gelten. Das ist in der Tat der Fall und bildet den Inhalt des folgenden Satzes, genannt **Parsevalsche Formel**:

(5.6) *Es sei f eine 2π -periodische Funktion mit $\|f\|^2 < \infty$, und es seien $(c_k \mid k \in \mathbb{Z})$ die Fourier-Koeffizienten von f . Dann gilt*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = \|f\|^2 := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt .$$

□ Wir beweisen das für lipstetige $f \in \mathcal{X}$, wo uns die Fehlerabschätzung 5.1.(11) zur Verfügung steht. Diese Abschätzung liefert

$$\|s_N - f\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |s_N(t) - f(t)|^2 dt \leq \frac{1}{2\pi} \frac{64C^2}{N} \quad (N \geq 1) .$$

Hieraus folgt mit Hilfe der Dreiecksungleichung

$$\left| \|s_N\| - \|f\| \right| \leq \|s_N - f\| \leq \frac{C'}{\sqrt{N}} \quad (N \geq 1)$$

und somit $\lim_{N \rightarrow \infty} \|s_N\| = \|f\|$ bzw. $\lim_{N \rightarrow \infty} \|s_N\|^2 = \|f\|^2$.

Auf Grund der Orthogonalitätsrelationen **(5.2)**(a) ist aber

$$\|s_N\|^2 = \left\langle \sum_{k=-N}^N c_k \mathbf{e}_k, \sum_{l=-N}^N c_l \mathbf{e}_l \right\rangle = \sum_{k=-N}^N |c_k|^2 . \quad \square$$

Damit verbleibt das Rätsel **(5.4)**. Warum funktioniert das alles? Um hier weiter zu kommen, benötigen wir eine Darstellung von s_N , an der sich der Zusammenhang mit der Ausgangsfunktion f ohne den Umweg über die c_k direkt ablesen lässt.

Aus 5.1.(7) ergibt sich bei passender Wahl des Integrationsintervalls:

$$\begin{aligned} s_N(x) &= \sum_{k=-N}^N c_k e^{ikx} = \sum_{k=-N}^N \left(\frac{1}{2\pi} \int_{x-\pi}^{x+\pi} f(s) e^{-iks} ds \right) e^{ikx} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{x-\pi}^{x+\pi} f(s) \sum_{k=-N}^N e^{ik(x-s)} ds . \end{aligned}$$

Substituieren wir im letzten Integral $s := x - t$ ($-\pi \leq t \leq \pi$), so geht dies über in

$$s_N(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) \sum_{k=-N}^N e^{ikt} dt .$$

Hier ist der zweite Faktor unter dem Integralzeichen eine universelle, gemeint ist: von f unabhängige Funktion. Diese Funktion

$$D_N(t) := \sum_{k=-N}^N e^{ikt} \quad (N \geq 0)$$

heißt **Dirichletscher Kern** und ist ein trigonometrisches Polynom vom Grad N . Wir notieren also die folgende Integraldarstellung von s_N :

(5.7) *Es sei f eine 2π -periodische Funktion und s_N die N -te Partialsumme der Fourier-Reihe von f . Dann gilt*

$$s_N(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) D_N(t) dt \quad (x \in \mathbb{R})$$

mit

$$D_N(t) = \begin{cases} \frac{\sin((N + \frac{1}{2})t)}{\sin(\frac{1}{2}t)} & (t \notin 2\pi\mathbb{Z}) \\ 2N + 1 & (t \in 2\pi\mathbb{Z}) \end{cases} , \quad (1)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_N(t) dt = 1 . \quad (2)$$

□ Zum Beweis von (1) produzieren wir eine teleskopierende Summe:

$$\begin{aligned} (e^{it/2} - e^{-it/2}) D_N(t) &= \sum_{k=-N}^N (e^{i(k+1/2)t} - e^{i(k-1/2)t}) \\ &= e^{i(N+1/2)t} - e^{i(-N-1/2)t} . \end{aligned}$$

Soviel für $t \notin 2\pi\mathbb{Z}$; der angegebene Spezialwert ist klar. — Die Behauptung (2) folgt unmittelbar aus der Definition von D_N . □

Betrachten wir den Graphen von D_N (Fig. 5.3.1), so können wir **(5.7)** folgendermassen interpretieren: Der Wert $s_N(x)$ ist ein gewogenes Mittel der Funktion f über das Intervall $[x-\pi, x+\pi]$, und letzten Endes haben *sämtliche* von

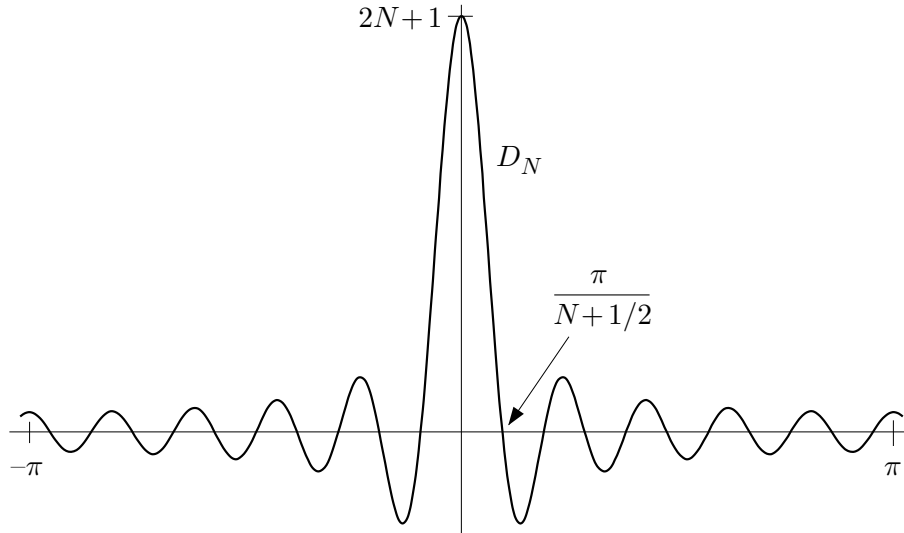


Fig. 5.3.1

f angenommenen Werte einen gewissen Einfluss auf die Zahl $s_N(x)$. Dabei ist allerdings die “Masse” der Gewichtsfunktion D_N um $t = 0$ herum konzentriert, so daß in erster Linie die f -Werte in der unmittelbaren Umgebung von x im Integral zum Zuge kommen. Zum andern bewirkt die rasche Oszillation von D_N , dass die Beiträge aus entfernteren Bereichen rasch alternierend mit positiven und negativen Gewichten versehen werden und sich so nur wenig auswirken. Da nun das Totalgewicht (unter Berücksichtigung der Vorzeichen) gerade 1 ist, scheint damit plausibel, daß für eine “schöne” Funktion f und hinreichend großes N gilt: $s_N(x) \doteq f(x)$.

Zum Schluss dieses Kapitels beweisen wir den Satz (5.4).

□ Um die nachfolgenden Rechnungen etwas zu vereinfachen, ändern wir die Definition von s_N leicht ab: Die äussersten Glieder sollen nur mit dem Gewicht $\frac{1}{2}$ in die Summe aufgenommen werden. Wir argumentieren also über

$$\tilde{s}_N(x) := \frac{1}{2}c_{-N}e^{-iNx} + \sum_{k=-N+1}^{N-1} c_k e^{ikx} + \frac{1}{2}c_N e^{iNx}$$

statt über s_N . Die zugehörige Kernfunktion \tilde{D}_N ist offensichtlich mit D_N verknüpft durch

$$\tilde{D}_N(t) = D_N(t) - \frac{e^{iNt} + e^{-iNt}}{2} = \frac{\sin((N + \frac{1}{2})t)}{\sin(\frac{1}{2}t)} - \cos(Nt),$$

so dass wir als Analogon zu (1) die folgende Formel erhalten:

$$\tilde{D}_N(t) = \begin{cases} \sin(Nt) \cot \frac{t}{2} & (t \notin 2\pi\mathbb{Z}) \\ 2N & (t \in 2\pi\mathbb{Z}) \end{cases}. \quad (3)$$

Wir schreiten nun zu weiteren Vereinfachungen: Die Darstellung (5.7) zeigt, dass es genügt, 5.1.(11) für $t = 0$ zu beweisen; dabei dürfen wir nach Subtraktion einer Konstanten $f(0) = 0$ annehmen. Endlich wollen wir anstelle der Lipschitzbedingung 5.1.(10) von vorneherein

$$|f'(t)| \leq C \quad (t \in \mathbb{R})$$

voraussetzen. Die Behauptung lautet dann

$$|\tilde{s}_N(0)| \leq \frac{8C}{\sqrt{N}} \quad (N \geq 1). \quad (4)$$

Die Funktion \tilde{D}_N (Fig. 5.3.2) hat für grosse N saftige Ausschläge nach oben und unten, besitzt aber wesentlich zahmere Stammfunktionen. Dies werden wir in unserem Beweis auf geschickte Art ausnützen. Dabei werden wir wiederholt von dem folgenden einfachen Lemma Gebrauch machen:

(5.8) *Besitzt die Funktion g auf dem Intervall $[a, b]$ eine Stammfunktion vom Betrag $\leq M$, so gilt*

$$\left| \int_a^b f(t)g(t) dt \right| \leq M \left(|f(a)| + |f(b)| + \int_a^b |f'(t)| dt \right).$$

□ Dies folgt unmittelbar aus der Formel für die partielle Integration. □

Nach (5.7) ist

$$\tilde{s}_N(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \tilde{D}_N(t) dt$$

Wir zerlegen hier die rechte Seite in zwei Teile (vgl. die heuristischen Betrachtungen weiter oben):

$$\tilde{s}_N(0) = \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\delta}^{\delta} f(t) \tilde{D}_N(t) dt + \int_{\delta}^{2\pi-\delta} f(t) \tilde{D}_N(t) dt \right) =: \frac{1}{2\pi} (I_1 + I_2),$$

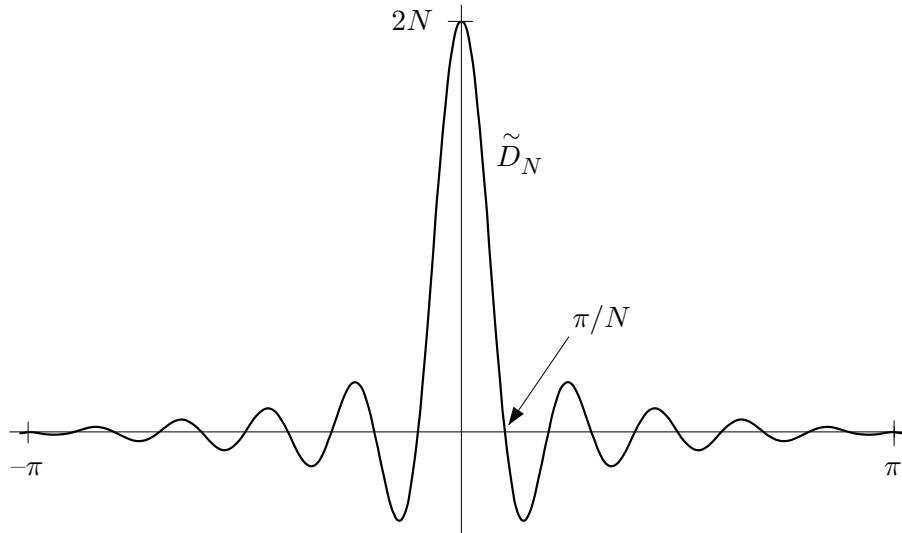


Fig. 5.3.2

wobei wir uns die Wahl von $\delta > 0$ noch vorbehalten ($\delta := 1/\sqrt{N}$ wird sich als optimal herausstellen).

Betrachtet man die alternierenden Buckel der Figur 5.3.2, so kommt man zu dem folgenden Schluss: Für $-\delta \leq x \leq \delta$ gilt auf Grund von (3):

$$\begin{aligned} \left| \int_0^x \tilde{D}_N(t) dt \right| &\leq \int_0^{\pi/N} \sin(Nt) \cot \frac{t}{2} dt = \frac{1}{N} \int_0^{\pi} \sin t' \cot \frac{t'}{2N} dt' \\ &\leq 2 \int_0^{\pi} \frac{\sin t'}{t'} \leq 2\pi; \end{aligned}$$

dabei haben wir

$$\cot \phi < \frac{1}{\phi} \quad \left(0 < \phi < \frac{\pi}{2} \right) \quad (5)$$

benutzt. Somit besitzt \tilde{D}_N auf dem Intervall $[-\delta, \delta]$ eine Stammfunktion vom Betrag $\leq 2\pi$. Mit Hilfe unseres Lemmas (5.8) können wir daher I_1 wie folgt abschätzen:

$$|I_1| \leq 2\pi \left(|f(-\delta)| + |f(\delta)| + \int_{-\delta}^{\delta} |f'(t)| dt \right) \leq 2\pi (|f(-\delta)| + |f(\delta)| + 2C\delta),$$

und wegen $f(0) = 0$ ergibt sich hieraus

$$|I_1| \leq 2\pi \cdot 4C\delta. \quad (6)$$

Für I_2 überlegen wir folgendermassen: Die Funktion $t \mapsto \sin(Nt)$ besitzt eine Stammfunktion vom Betrag $\leq 1/N$. Mit Hilfe unseres Lemmas schliessen wir daher auf

$$\left| \int_{\pi}^x \tilde{D}_N(t) dt \right| = \left| \int_{\pi}^x \cot \frac{t}{2} \sin(Nt) dt \right| \leq \frac{1}{N} \left(\left| \cot \frac{x}{2} \right| + \int_{\pi}^x \left| \frac{d}{dt} \cot \frac{t}{2} \right| dt \right).$$

Da $t \mapsto \cot(t/2)$ zwischen 0 und 2π monoton fällt, hat das letzte Integral den Wert $|\cot(x/2) - \cot(\pi/2)| = |\cot(x/2)|$, und es folgt mit (5):

$$\left| \int_{\pi}^x \tilde{D}_N(t) dt \right| \leq \frac{2}{N} \cot \frac{\delta}{2} \leq \frac{4}{N\delta} \quad (\delta \leq x \leq 2\pi - \delta).$$

Hiernach besitzt \tilde{D}_N auf dem Intervall $[\delta, 2\pi - \delta]$ eine Stammfunktion vom Betrag $\leq \frac{4}{N\delta}$. Wir können daher unser Lemma ein drittes Mal anwenden für die Abschätzung

$$|I_2| \leq \frac{4}{N\delta} \left(|f(-\delta)| + |f(\delta)| + \int_{\delta}^{2\pi-\delta} |f'(t)| dt \right) \leq \frac{4}{N\delta} \cdot 2\pi C. \quad (7)$$

Tragen wir nun (6) und (7) zusammen, so ergibt sich schliesslich

$$|\tilde{s}_N(0)| \leq \frac{1}{2\pi} (|I_1| + |I_2|) \leq 4C\delta + \frac{4C}{N\delta},$$

und mit $\delta := 1/\sqrt{N}$ folgt hieraus die Behauptung (4). ┘