

# 6

## Fourier-Transformation

### 6.1 Faltung

Dieses Kapitel handelt von **Zeitsignalen** — gemeint sind Funktionen

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \quad t \mapsto f(t), \quad (1)$$

die im allgemeinen noch gewissen technischen Zusatzbedingungen (Differenzierbarkeit, Abklingverhalten usw.) genügen. Derartige Zeitsignale sollen hier ebenso in ihre harmonischen Anteile zerlegt werden, wie wir das im vorangehenden Kapitel mit periodischen Funktionen gemacht haben.

Bevor wir damit beginnen, gilt es, auf eine zweite Art der Produktbildung, zusätzlich zum “gewöhnlichen” Produkt zweier Funktionen, aufmerksam zu machen, die immer dann zur Verfügung steht, wenn der zugrundeliegende Definitionsbereich translationssymmetrisch ist. Es geht um die sogenannte *Faltung*.

Die Faltung ist uns zum ersten Mal im Zusammenhang mit der Multiplikation von Potenzreihen begegnet. Zur Erinnerung: Gilt

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k, \quad g(z) = \sum_{l=0}^{\infty} b_l z^l \quad (|z| < \rho),$$

so besitzt die Produktfunktion  $f \cdot g$  ebenfalls eine konvergente Potenzreihenentwicklung um 0:

$$f(z)g(z) = \sum_{r=0}^{\infty} c_r z^r \quad (|z| < \rho),$$

und zwar berechnen sich deren Koeffizienten  $c_r$  nach der folgenden Formel:

$$c_r = \sum_{k+l=r} a_k b_l = \sum_{l=0}^r a_{r-l} b_l \quad (r \geq 0). \quad (2)$$

Um  $c_r$  zu erhalten, hat man also alle möglichen Produkte  $a_k b_l$  zu berechnen, die sich unter der Bedingung  $k+l=r$  bilden lassen, und diese Produkte aufzuaddieren. Das so definierte "Produkt"  $c := (c_r)_{r \geq 0}$  der zwei Folgen  $a := (a_k)_{k \geq 0}$  und  $b := (b_l)_{l \geq 0}$  ist eben das **Faltungsprodukt** dieser zwei Folgen; man schreibt dafür  $a * b$ .

Zu einem ähnlichen Resultat kommt man, wenn zwei im gleichen Kreisring konvergente Laurent-Entwicklungen distributiv ausmultipliziert werden. Im allgemeinen sind dann die  $c_r$  nicht mehr endliche Summen wie in (2), sondern man hat

$$c_r = \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_{r-l} b_l \quad (r \in \mathbb{Z}), \quad (3)$$

wobei die Konvergenz garantiert ist.

Nun also die Zeitsignale. Für den Rest dieses Kapitels treffen wir die folgende Vereinbarung: Das Zeichen  $\int$  ohne Angabe von Integrationsgrenzen bezeichnet immer das über die ganze reelle Achse erstreckte Integral:

$$\int f(t) dt := \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt := \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(t) dt.$$

Wir wollen ein Zeitsignal (1) **integabel** nennen, wenn das Integral

$$\int |f(t)| dt$$

existiert, d.h. endlich ist. Sind  $f$  und  $g$  zwei integrable Zeitsignale, so ist ihr **Faltungsprodukt**  $f * g$  wie folgt definiert (vgl. (3)):

$$f * g(x) := \int f(x-t)g(t) dt = \int f(t)g(x-t) dt \quad (x \in \mathbb{R}). \quad (5)$$

Das Faltungsprodukt  $f * g$  ist wieder ein Zeitsignal, und man kann zeigen, dass es von selbst integabel ist. Mehr noch: Die Funktion  $f * g$  ist mindestens so "schön" (stetig, differenzierbar, usw.) wie die "schönere" der beiden Funktionen  $f$  und  $g$ .

Die durch (5) erklärte Produktoperation hat ähnliche algebraische Eigenschaften wie das "gewöhnliche" Produkt  $f \cdot g$ ; wir überlassen deren Verifikation dem Leser:

$$\begin{aligned} f * g &= g * f, & (f * g) * h &= f * (g * h), \\ (\alpha f_1 + \beta f_2) * g &= \alpha f_1 * g + \beta f_2 * g & (\alpha, \beta \in \mathbb{C}), \\ (T_h f) * g &= T_h(f * g) & (h \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

Wenn wir gerade dabei sind: In Kapitel 8 werden wir *Einschwingvorgänge*, abgekürzt: *Evaus*, betrachten; das sind Funktionen (1), die für negative  $t$  identisch verschwinden. Sind  $f$  und  $g$  zwei Evaus, so sind in (5) beide Integranden sowohl für  $t < 0$  wie für  $t > x$  identisch 0. Ist  $x < 0$ , so sind also diese Integranden überhaupt identisch 0. Hieraus folgt: Das Faltungsprodukt  $f * g$  von zwei Evaus  $f$  und  $g$  ist ohne weitere Bedingungen betreffend das Verhalten von  $f$  und  $g$  für  $t \rightarrow \infty$  definiert durch

$$f * g(x) := \int_0^x f(x-t)g(t) dt = \int_0^x f(t)g(x-t) dt \quad (x \geq 0) \quad (6)$$

und durch  $f(x) \equiv 0$  für  $x < 0$ , ist also selbst wieder ein Evau.

① Ist  $A$  eine beliebige Teilmenge eines vereinbarten Grundraums  $X$ , so bezeichnet man die **charakteristische Funktion** dieser Teilmenge mit  $1_A$ :

$$1_A(x) := \begin{cases} 1 & (x \in A) \\ 0 & (x \in \mathbb{C}A) \end{cases}.$$

Die Rechtecksfunktion

$$1_{[0,1]}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad 1_{[0,1]}(t) := \begin{cases} 1 & (0 \leq t \leq 1) \\ 0 & (\text{sonst}) \end{cases},$$

ist integrabel, lässt sich aber auch als Evau ansehen. Ist  $f$  ein beliebiges Zeitsignal, so ergibt sich mit (5) für gegebenes  $x$ :

$$1_{[0,1]} * f(x) = \int 1_{[0,1]}(x-t)f(t) dt = \int_{x-1}^x f(t) dt; \quad (7)$$

denn im  $t$ -Intervall  $[x-1, x]$  ist  $1_{[0,1]}(x-t) \equiv 1$ , und für alle andern  $t$  ist  $1_{[0,1]}(x-t) = 0$ . Die Formel (7) lässt sich folgendermassen interpretieren: Der Operator

$$1_{[0,1]} * : \quad f \mapsto 1_{[0,1]} * f$$

ersetzt das Zeitsignal  $f$  durch den rollenden Mittelwert von  $f$  “über die letzte Sekunde”. Dieser Mittelwert verändert sich träger als das  $f$  selbst.

Wir verwenden nun die angegebene Interpretation von  $1_{[0,1]}*$ , um das Faltungsprodukt  $1_{[0,1]} * 1_{[0,1]}$  zu bestimmen. Es geht also um den Mittelwert von  $1_{[0,1]}$  auf dem Intervall  $[x-1, x]$  für die verschiedenen  $x \in \mathbb{R}$ . Der Figur 6.1.1 entnimmt man, dass sich dieser Mittelwert wie folgt in Formeln beschreiben lässt:

$$1_{[0,1]} * 1_{[0,1]}(x) = \begin{cases} x & (0 \leq x \leq 1) \\ 2 - x & (1 \leq x \leq 2) \\ 0 & (\text{sonst}) \end{cases} .$$

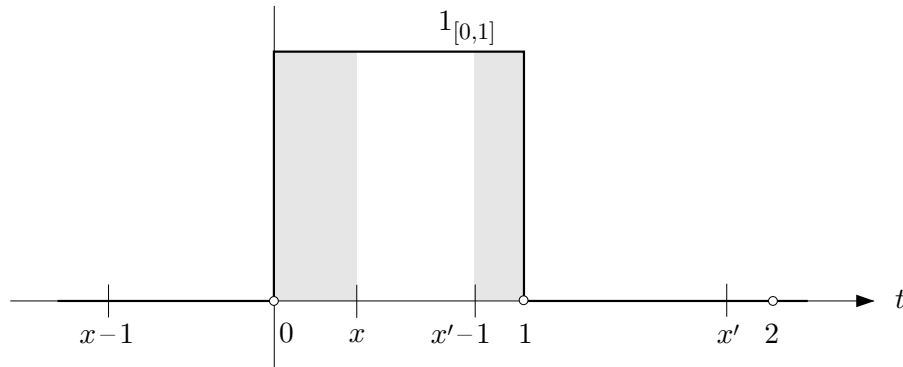


Fig. 6.1.1

Die resultierende Funktion (Fig. 6.1.2) ist also stetig und stückweise linear. Die weitere Rechnung würde zeigen, dass  $1_{[0,1]} * 1_{[0,1]} * 1_{[0,1]}$  nur im Intervall  $[0, 3]$  von 0 verschieden ist. Der resultierende Graph ist in Fig. 6.1.2 ebenfalls eingezeichnet und besteht aus Parabelbögen, die mit stetiger Tangente ineinander übergehen. So fortfahrend erhält man eine Folge  $(B_n)_{n \geq 0}$  von immer glatteren und stückweise polynomialen Funktionen. Diese Funktionen sind unter dem Namen **B-Splines** bekannt und spielen eine interessante Rolle in der numerischen Mathematik. ○

Das Faltungsprodukt handelt an sich von zwei gleichberechtigten Faktoren. In unseren Anwendungen wird es aber meist so sein, dass der erste Faktor ( $=: \Phi$ ) eine fest gewählte verschiebbare Sonde darstellt, mit deren Hilfe an beliebigen Zeitsignalen  $f$  Messungen, Regularisierungen, Filterungen usw. vorgenommen werden. Der Funktionswert  $\Phi * f(x)$  ist der resultierende Messwert, wenn sich die Sonde an der Stelle  $x$  befindet. Ein erstes Beispiel dieser Art haben wir mit  $\Phi := 1_{[0,1]}$  bereits kennengelernt.

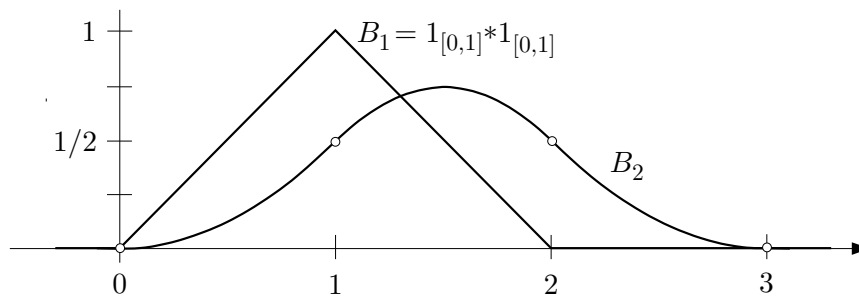


Fig. 6.1.2

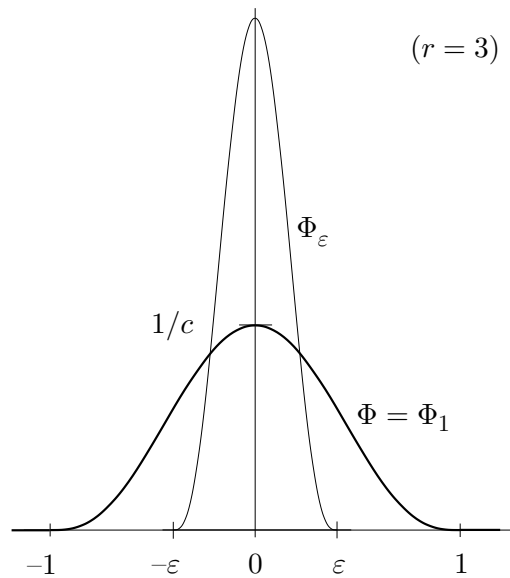


Fig. 6.1.3

② Es sei  $r \gg 1$  gegeben und  $c := \int_{-1}^1 (1-t^2)^r dt$ . Die “Buckelfunktion”

$$\Phi(t) := \begin{cases} \frac{1}{c}(1-t^2)^r & (-1 \leq t \leq 1) \\ 0 & (\text{sonst}) \end{cases} \quad (8)$$

(Fig. 6.1.3) ist gerade, auf der ganzen reellen Achse stetig und  $(r-1)$ -mal stetig differenzierbar. Ferner ist  $\Phi$  ausserhalb des Intervalls  $[-1, 1]$  identisch 0, und es gilt  $\int \Phi(t) dt = 1$ . Mit Hilfe dieses  $\Phi$  bilden wir nun die Funktionen

$$\Phi_\varepsilon(t) := \frac{1}{\varepsilon} \Phi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right), \quad \varepsilon > 0,$$

die dieselben Eigenschaften haben wie das Standardmodell (8), nun aber auf das Intervall  $[-\varepsilon, \varepsilon]$  bezogen; insbesondere gilt

$$\int \Phi_\varepsilon(t) dt = 1 \quad (\varepsilon > 0). \quad (9)$$

Es sei nun  $f$  ein beliebiges Zeitsignal. Dann stellt der Faltungswert

$$\Phi_\varepsilon * f(x) := \int \Phi_\varepsilon(x-t)f(t) dt = \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \Phi_\varepsilon(x-t)f(t) dt \quad (10)$$

ein gewogenes Mittel der  $f$ -Werte über das Intervall  $[x-\varepsilon, x+\varepsilon]$  dar. Mit Hilfe von (9) folgt leicht, dass in allen Stetigkeitspunkten von  $f$  das folgende zutrifft:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Phi_\varepsilon * f(x) = f(x). \quad (11)$$

Nun lässt sich aber das erste Integral (10)  $(r-1)$ -mal unter dem Integralzeichen nach  $x$  differenzieren, und das bedeutet, dass die Funktionen  $\Phi_\varepsilon * f$  zur Klasse  $C^{r-1}$  gehören, auch wenn die Ausgangsfunktion  $f$  Sprungstellen oder **Knackpunkte** (Sprungstellen von gewissen Ableitungen) aufweist, siehe die Fig. 6.1.4. Wir sehen: Die Funktionen  $\Phi_\varepsilon * f$  sind **Regularisierungen** von  $f$ , die mit  $\varepsilon \rightarrow 0$  in allen Punkten  $x$ , wo das sinnvoller Weise erwartet werden kann, gegen  $f(x)$  konvergieren.  $\bigcirc$

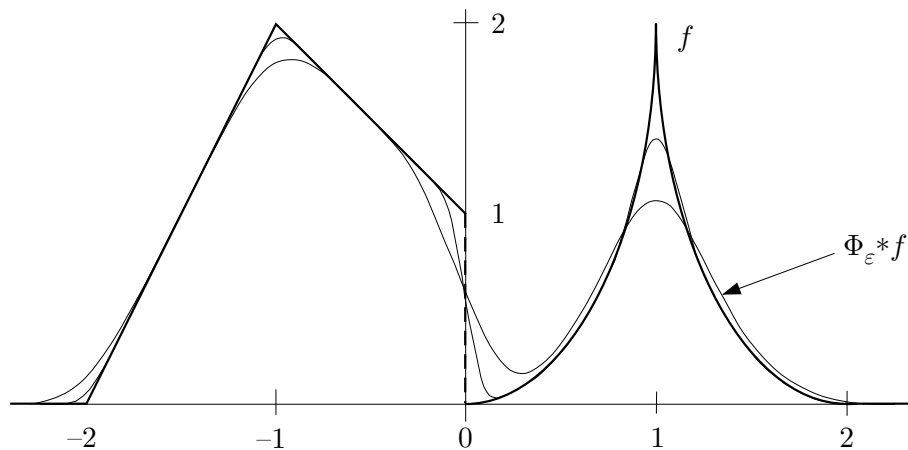


Fig. 6.1.4

③ Wir zeigen, dass auch das Ableiten als (Limes einer) Faltungsoperation aufgefasst werden kann. Hierzu definieren wir die verschiebbaren Sonden

$$\Psi_\varepsilon(t) := \Phi'_\varepsilon(t) \quad (t \in \mathbb{R})$$

(Fig. 6.1.5), wobei  $\Phi$  eine Buckelfunktion der im vorangehenden Beispiel betrachteten Art darstellt.  $\Psi_\varepsilon$  ist wie  $\Phi_\varepsilon$  ausserhalb des Intervalls  $[-\varepsilon, \varepsilon]$  identisch 0.

Wir betrachten jetzt ein beliebiges Zeitsignal  $f$  und berechnen für gegebenes  $x \in \mathbb{R}$  den Faltungswert

$$\Psi_\varepsilon * f(x) = \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \Psi_\varepsilon(x-t)f(t) dt,$$

vgl. (10). Dieser Faltungswert ist ebenfalls eine gewichtete Summe von  $f$ -Werten im Intervall  $[x-\varepsilon, x+\varepsilon]$ ; das Gewicht ist aber *negativ* für  $t < x$  und *positiv* für  $t > x$ . Um zu sehen, was in Wirklichkeit passiert, nehmen wir  $f \in C^1$  an und führen die folgende Rechnung durch:

$$\Psi_\varepsilon * f(x) = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \underbrace{\Phi'_\varepsilon(t)}_{\uparrow} \underbrace{f(x-t)}_{\downarrow} dt = \Phi_\varepsilon(t)f(x-t) \Big|_{-\varepsilon}^{\varepsilon} + \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \Phi_\varepsilon(t)f'(x-t) dt.$$

Da hier der ausintegrierte Teil verschwindet, ergibt sich

$$\Psi_\varepsilon * f(x) = \Phi_\varepsilon * f'(x) \quad (x \in \mathbb{R});$$

in anderen Worten: Die Faltungsoperation  $\Psi_\varepsilon *$  berechnet näherungsweise die Ableitung von  $f$ , und im Limes gilt natürlich wegen (11) und  $f \in C^1$ :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Psi_\varepsilon * f(x) = f'(x) \quad (x \in \mathbb{R}). \quad \bigcirc$$

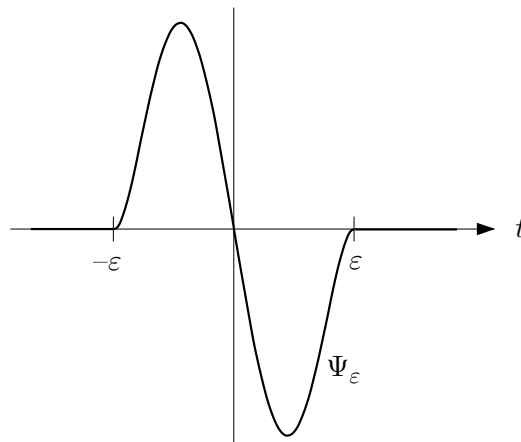


Fig. 6.1.5

## 6.2 FT: Definition und Grundeigenschaften

Für den Rest dieses Kapitels wird angenommen, dass alle betrachteten Zeitsignale

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \quad t \mapsto f(t)$$

von vorneherein integrierbar sind:

$$\int |f(t)| dt < \infty. \quad (1)$$

Die Fourier-Theorie derartiger Zeitsignale beruht darauf, dass zusätzlich zur intuitiv einleuchtenden Zeitvariablen  $t$  eine weitere reelle Variable  $\omega$  ins Spiel gebracht wird. Diese **Frequenzvariable**  $\omega$  steht mit  $t$  in einer geheimnisvollen Dualitätsbeziehung. Auf's einfachste ausgedrückt: Die in einem Zeitsignal  $t \mapsto f(t)$  vorhandene Information lässt sich auch als eine Funktion  $\omega \mapsto \hat{f}(\omega)$  codieren und intuitiv interpretieren, und zwischen diesen beiden Erscheinungsformen von Zeitsignalen bestehen spiegelsymmetrische Wechselbeziehungen. Die Betrachtung und Bearbeitung von Zeitsignalen  $f$  in ihrer dualen Form  $\hat{f}$  nennt man "Argumentieren im **Frequenz-** oder **Fourier-Bereich**".

Die **Fourier-Transformierte**  $\hat{f}$  eines gegebenen Zeitsignals  $f$  ist definiert durch

$$\hat{f}(\omega) := \int f(t) e^{-i\omega t} dt \quad (\omega \in \mathbb{R}); \quad (2)$$

gelegentlich spricht man auch von der **Spektralfunktion**. Hier wird für festes  $\omega$  nach  $t$  integriert, und das Resultat hängt vom gewählten Wert von  $\omega$  ab. Aus (1) folgt wegen  $|e^{i\omega t}| = 1$ , dass  $\hat{f}(\omega)$  für alle  $\omega \in \mathbb{R}$  wohldefiniert ist. Im weiteren ist  $\hat{f}$  von selbst stetig (auch wenn  $f$  Sprungstellen aufweist) und geht mit  $\omega \rightarrow \pm\infty$  gegen 0. Man beachte noch folgendes: Wird  $f$  auf einer Nullmenge abgeändert, so hat das keinen Einfluss auf  $\hat{f}$ .

Anmerkung: Anstelle von (2) sind auch die folgenden Definitionen von  $\hat{f}(\omega)$  in Gebrauch:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int f(t) e^{-i\omega t} dt, \quad \int f(t) e^{-2\pi i \omega t} dt.$$

Der zugehörige Formelapparat sieht dann etwas anders aus, aber der Gehalt der Theorie bleibt natürlich derselbe.



Bevor wir zu Rechenregeln und Beispielen kommen, wollen wir versuchen zu interpretieren, was in (2) überhaupt ausgerechnet wird. Man muss sich die Funktionen  $\mathbf{e}_\omega: t \mapsto e^{i\omega t}$  als eine Art “Abfragemuster” vorstellen. Bei der Berechnung des Integrals (2) stellt sich heraus, ob das Zeitsignal  $f$  während eines respektablen Zeitintervalls  $I \subset \mathbb{R}$  mit ähnlicher Frequenz schwingt wie dieses Muster: In  $t$ -Bereichen, wo  $f$  wesentlich schneller schwingt als  $\mathbf{e}_\omega$ , gibt es kaum einen Beitrag ans Integral, da  $\mathbf{e}_\omega$  im Verhältnis zu  $f$  praktisch konstant ist, so dass sich die alternierenden Buckel von  $f$  laufend herausheben, und in Zonen der  $t$ -Achse, wo sich  $f$  wesentlich langsamer ändert als  $\mathbf{e}_\omega$ , tritt derselbe Effekt ein, wobei nun die Rollen von  $f$  und  $\mathbf{e}_\omega$  gegenüber vorher vertauscht sind. Schwingt jedoch  $f$  in dem Intervall  $I$  ungefähr mit der Frequenz  $\omega$ :

$$f(t) \doteq C e^{i\omega t} \quad (t \in I),$$

so hat das Produkt  $f(t)e^{-i\omega t}$  längs  $I$  mehr oder weniger konstantes Argument, und während der Integration über  $I$  hebt sich kaum etwas heraus. Alles zusammengenommen ergibt sich, dass  $|\widehat{f}(\omega)|$  unter diesen Umständen gross ausfallen wird. Auf Grund dieser Überlegungen kann man also folgendes sagen: Der Betrag  $|\widehat{f}(\omega)|$  gibt an, mit welcher “Gesamtenergie” die Frequenz  $\omega$  in dem Zeitsignal  $f$  vertreten ist. Zu welchem Zeitpunkt die “Note”  $\omega$  gespielt wurde, lässt sich allerdings dem Wert  $\widehat{f}(\omega)$  nicht unmittelbar entnehmen: Die letztere Information ist auf eine undurchsichtige Weise in der Funktion  $\widehat{f}$  abgelegt. Es ist überhaupt so, dass die Fourier-Transformation ein Zeitsignal als “Gesamtobjekt” betrachtet. In jedem einzelnen Wert  $\widehat{f}(\omega)$  steckt Information über  $f$  aus dem ganzen Bereich  $-\infty < t < \infty$ . Viele praktisch vorkommende Signale sind ja ausserhalb eines endlichen  $t$ -Intervalls identisch 0. Der Fourier-Transformation ist das schnuppe: Sie betrachtet auch ein derartiges Signal als Musik, die von von  $t = -\infty$  bis  $t = +\infty$  läuft.

① Wir beginnen mit der Rechtecksfunktion

$$f(t) := 1_{[-a,a]}(t), \quad a > 0 \text{ fest.}$$

Die für  $\omega \neq 0$  durchgeführte Rechnung liefert

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{-a}^a e^{-i\omega t} dt = \int_{-a}^a \cos(\omega t) dt = \frac{1}{\omega} \sin(\omega t) \Big|_{t=-a}^{t=a} = \frac{2}{\omega} \sin(a\omega).$$

Da  $\widehat{f}$  durchwegs stetig ist, erhalten wir damit definitiv

$$\widehat{f}(\omega) = 2a \operatorname{sinc}(a\omega) \quad (\omega \in \mathbb{R})$$

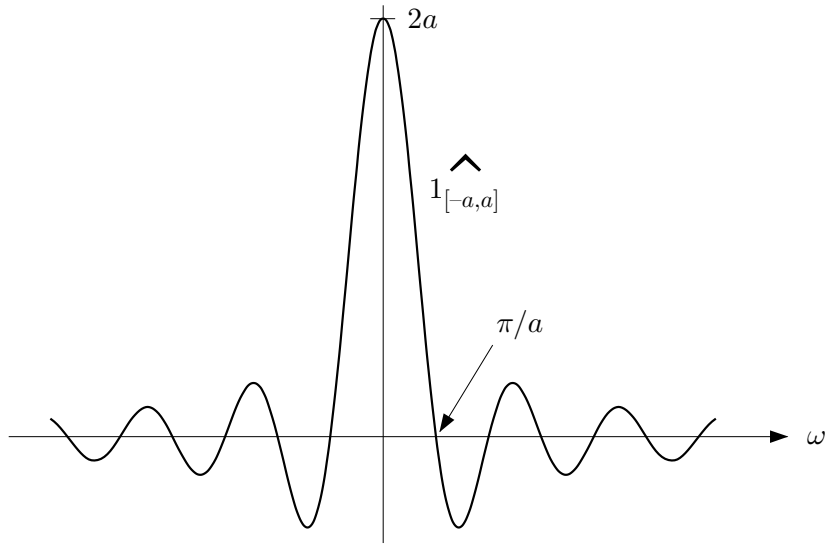


Fig. 6.2.1

(Fig. 6.2.1). Während also das Ausgangssignal  $f$  kompakten Träger hat, ist  $\hat{f}$  über die ganze  $\omega$ -Achse ausgebreitet, und  $\hat{f}(\omega)$  geht für  $\omega \rightarrow \pm\infty$  so langsam gegen 0, dass  $\hat{f}$  nicht einmal integrierbar ist. Letzteres ist eine Folge der beiden Sprungstellen von  $f$ . Bei der Fourier-Entwicklung von periodischen Funktionen mit Sprungstellen haben wir ja eine ähnliche Erfahrung gemacht.

○

② Wir betrachten die Funktion

$$f(t) := \frac{1}{a^2 + t^2}, \quad a > 0 \text{ fest.} \quad (3)$$

Gemäss dem Resultat von Beispiel 4.5③ ist

$$\hat{f}(\omega) = \frac{\pi}{a} e^{-a|\omega|}. \quad (4)$$

Die Fourier-Transformierte von  $f$  ist in der Tat stetig, hat allerdings im Ursprung einen Knackpunkt; ferner klingt sie für  $\omega \rightarrow \pm\infty$  exponentiell ab. Dieses Verhalten von  $\hat{f}$  ist das FT-Spiegelbild der folgenden Eigenschaften von  $f$ : Das Zeitsignal  $f$  geht mit  $t \rightarrow \pm\infty$  relativ langsam gegen 0. Andererseits ist  $f$  beliebig oft differenzierbar und lässt sich sogar zu einer in dem Streifen  $|\operatorname{Im} t| < a$  analytischen Funktion der komplexen Variablen  $t$  fortsetzen.

Wir berechnen nun rein formal die Fourier-Transformierte des in (4) erhaltenen Ausdrucks

$$g(\omega) := \frac{\pi}{a} e^{-a|\omega|}$$

als Funktion einer weiteren Variablen  $\tau$ . Aus Symmetriegründen ergibt sich nacheinander

$$\begin{aligned} \widehat{g}(\tau) &= \frac{\pi}{a} \int e^{-a|\omega|} e^{-i\tau\omega} d\omega = \frac{2\pi}{a} \int_0^\infty e^{-a\omega} \cos(\tau\omega) d\omega \\ &= \frac{2\pi}{a} \operatorname{Re} \int_0^\infty e^{(-a+i\tau)\omega} d\omega = \frac{2\pi}{a} \operatorname{Re} \frac{1}{-a+i\tau} e^{(-a+i\tau)\omega} \Big|_{\omega=0}^{\omega=\infty} \\ &= \frac{2\pi}{a} \operatorname{Re} \frac{1}{a-i\tau} = \frac{2\pi}{a^2 + \tau^2}. \end{aligned}$$

Zweimalige Fourier-Transformation des Zeitsignals (3) hat also die Ausgangsfunktion  $f$  bis auf einen Faktor  $2\pi$  zurückgeliefert.  $\bigcirc$

③ Die Fourier-Transformierte der Normalverteilung

$$f(t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}$$

ist eigentlich schon in Beispiel 3.2② berechnet worden: Da  $f$  gerade ist, ergibt sich aus 3.2.(5) sofort

$$\widehat{f}(\omega) = e^{-\omega^2/2};$$

in Worten: Die Normalverteilung wird durch die Fourier-Transformation bis auf einen Faktor  $\sqrt{2\pi}$  reproduziert. Auch in diesem Beispiel stellt man fest, dass zweimalige Fourier-Transformation die Ausgangsfunktion bis auf einen Faktor  $2\pi$  zurückliefert.  $\bigcirc$

Die Funktionen in den Beispielen ② und ③ waren *gerade*; infolgedessen kam nicht heraus, dass die korrekte Umkehrformel folgendermassen aussieht:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int \widehat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega; \quad (4)$$

das Minuszeichen im Exponenten ist also (wie bei der entsprechenden Formel für Fourier-Reihen) verschwunden. Auf (4) werden wir im folgenden Abschnitt ausführlich eingehen.

Es folgt eine Liste der wichtigsten Rechenregeln; dabei wird vorausgesetzt, dass  $f$  integabel ist. Damit (e) einen Sinn hat, muss natürlich auch  $f'$  integabel sein, analog in (f) die Funktion  $t \mapsto tf(t)$ . Die abschliessende Aussage (g) ist der sogenannte **Faltungssatz**.

$$(6.1) \quad (a) \quad (\alpha f + \beta g)^\wedge = \alpha \hat{f} + \beta \hat{g} \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{C}),$$

$$(b) \quad g(t) := f(t - h), \quad h \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \hat{g}(\omega) = e^{-ih\omega} \hat{f}(\omega),$$

$$(c) \quad g(t) := f\left(\frac{t}{a}\right), \quad a > 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{g}(\omega) = a \hat{f}(a\omega),$$

$$(d) \quad g(t) := e^{i\omega_0 t} f(t), \quad \omega_0 \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \hat{g}(\omega) = \hat{f}(\omega - \omega_0),$$

$$(e) \quad g(t) := f'(t) \quad \Rightarrow \quad \hat{g}(\omega) = i\omega \hat{f}(\omega)$$

$$(f) \quad g(t) := t f(t) \quad \Rightarrow \quad \hat{g}(\omega) = i \frac{d}{d\omega} \hat{f}(\omega).$$

$$(g) \quad g(t) := f_1 * f_2(t) \quad \Rightarrow \quad \hat{g}(\omega) = \hat{f}_1(\omega) \cdot \hat{f}_2(\omega).$$

□ Die Verifikation der Aussagen (a)–(d) überlassen wir dem Leser.

(e) Sind  $f$  und  $f'$  integabel, so gilt notwendiger Weise  $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} f(t) = 0$ , und wir erhalten mit partieller Integration:

$$\begin{aligned} \hat{g}(\omega) &= \int \underset{\uparrow}{f'(t)} e^{-i\omega t} dt = \underset{\downarrow}{f(t)} e^{i\omega t} \Big|_{t=-\infty}^{t=\infty} - (-i\omega) \int f(t) e^{-i\omega t} dt \\ &= i\omega \int f(t) e^{-i\omega t} dt. \end{aligned}$$

(f) Unter den angegebenen Voraussetzungen darf man in der Formel

$$\hat{f}(\omega) = \int f(t) e^{-i\omega t} dt$$

unter dem Integralzeichen nach  $\omega$  differenzieren und erhält

$$\frac{d}{d\omega} \hat{f}(\omega) = \int (-it) f(t) e^{-i\omega t} dt = -i \hat{g}(\omega).$$

Der Beweis des Faltungssatzes (g) ergibt sich durch Vertauschung der Integrationsreihenfolge in einem Doppelintegral und Anwendung von (b):

$$\begin{aligned}
 \widehat{g}(\omega) &= \int \left( \int f_1(t) f_2(x-t) dt \right) e^{-i\omega x} dx \\
 &= \int \left( f_1(t) \int f_2(x-t) e^{-i\omega x} dx \right) dt \\
 &= \int f_1(t) e^{-i\omega t} \widehat{f}_2(\omega) dt = \widehat{f}_1(\omega) \widehat{f}_2(\omega) . \quad \lrcorner
 \end{aligned}$$

## 6.3 Die Umkehrformel

Die zwei Beispiele ② und ③ des vorangehenden Abschnitts lassen es allgemein als möglich erscheinen, aus der Fourier-Transformierten  $\widehat{f}$  eines Zeitsignals das Ausgangssignal  $f$  zurückzugewinnen. Wie bereits bemerkt, hat die willkürliche Umdefinition von  $f$  auf einer Nullmenge der  $t$ -Achse keinen Einfluss auf  $\widehat{f}$ . Wie soll man da bei der Inversion  $\widehat{f} \mapsto f$  an jeder Stelle  $t$  den zufällig ausgewählten Wert  $f(t)$  erwischen? Nun: Die Umkehrformel liefert eine Funktion  $f^\#$ , deren Wert  $f^\#(t)$  für fast alle  $t$  mit  $f(t)$  übereinstimmt, und in allen Punkten  $t$ , wo sowohl  $f$  wie  $f^\#$  stetig sind, gilt notwendiger Weise  $f^\#(t) = f(t)$ .

Hier also die angekündigte Umkehrformel:

**(6.2)** *Das Zeitsignal  $f$  sowie seine Fourier-Transformierte  $\widehat{f}$  seien integrabel. Dann gilt*

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int \widehat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (1)$$

*in allen Stetigkeitspunkten von  $f$ .*

Von diesem Satz gibt es verschiedene Versionen, je nach den über  $f$  und  $\widehat{f}$  gemachten Voraussetzungen; die Kernaussage ist aber immer dieselbe. Mit der nötigen Vorsicht lässt sich die Formel (1) z.B. auch in Fällen anwenden, wo das Zeitsignal  $f$  Sprungstellen aufweist.

Der intuitive Gehalt von (1) kommt am besten heraus, wenn wir die Variable  $t$  unterdrücken:

$$f = \frac{1}{2\pi} \int d\omega \widehat{f}(\omega) \mathbf{e}_\omega .$$

In dieser Schreibweise erscheint das Zeitsignal  $f$  als Superposition von reinen Schwingungen  $\mathbf{e}_\omega$  beliebiger Frequenzen  $\omega \in \mathbb{R}$ , und für jedes  $\omega$  stellt  $\widehat{f}(\omega)$  die komplexe Amplitude dar, mit der die Frequenz  $\omega$  im Gesamtsignal  $f$  vertreten ist.

Zum Beweis von **(6.2)** führen wir eine Hilfsfunktion  $\phi$  in die Rechnung ein, die wir am Schluss passend wählen. Im übrigen geht es wieder um die Vertauschung der Integrationsreihenfolge in einem Doppelintegral.

□ Die Hilfsfunktion  $\phi$  sei integrierbar. Dann gilt

$$\begin{aligned} \int \widehat{f}(\omega) \phi(\omega) d\omega &= \int \left( \int f(t) e^{-i\omega t} dt \right) \phi(\omega) d\omega \\ &= \int f(t) \left( \int \phi(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \right) dt \\ &= \int f(t) \widehat{\phi}(t) dt . \end{aligned} \quad (2)$$

Wählen wir speziell

$$\phi(\omega) := e^{-(\omega/a)^2/2}, \quad a > 0 ,$$

so liefert Beispiel 6.2.③ und Regel **(6.1)(c)** die Fourier-Transformierte

$$\widehat{\phi}(t) = \sqrt{2\pi} a e^{-a^2 t^2/2} .$$

Das wird nun in (2) eingesetzt; es ergibt sich

$$\int \widehat{f}(\omega) e^{-(\omega/a)^2/2} d\omega = \sqrt{2\pi} \int f(t) e^{-a^2 t^2/2} a dt = \sqrt{2\pi} \int f\left(\frac{\tau}{a}\right) e^{-\tau^2/2} d\tau .$$

Jetzt führen wir unter den Integralzeichen den Grenzübergang  $a \rightarrow \infty$  durch und erhalten, falls  $f$  an der Stelle  $t = 0$  stetig ist:

$$\int \widehat{f}(\omega) d\omega = \sqrt{2\pi} \int f(0) e^{-\tau^2/2} d\tau = 2\pi f(0) .$$

Damit ist die behauptete Formel für  $t = 0$  bewiesen. Wendet man diesen Spezialfall auf die Funktion  $g(t) := f(t + t_0)$  an, so ergibt sich mit Hilfe der Rechenregel (6.1)(b) die Behauptung im allgemeinen Fall; wir überlassen die Details dem Leser.  $\square$

Da die benötigten Hilfsmittel gerade dastehen, behandeln wir noch die **Formel von Parseval-Plancherel**:

(6.3) *Unter den Voraussetzungen des vorangehenden Satzes gilt*

$$\int |\widehat{f}(\omega)|^2 d\omega = 2\pi \int |f(t)|^2 dt$$

und allgemeiner

$$\int \widehat{f}(\omega) \overline{\widehat{g}(\omega)} d\omega = 2\pi \int f(t) \overline{g(t)} dt . \quad (3)$$

Dieser Satz lässt sich folgendermassen interpretieren: Durch die Festsetzung

$$\langle f, g \rangle := \int f(t) \overline{g(t)} dt$$

wird im Funktionenraum der Zeitsignale ein komplexes Skalarprodukt mit zugehöriger Norm

$$\|f\| := \sqrt{\langle f, f \rangle} = \left( \int |f(t)|^2 dt \right)^{1/2}$$

erklärt. Unter der Fouriertransformation multipliziert sich das Skalarprodukt von zwei Zeitsignalen mit  $2\pi$ , die Norm eines Zeitsignals mit  $\sqrt{2\pi}$ . Definiert man die Fourier-Transformation, wie in der theoretischen Physik üblich, durch

$$\widehat{f}(\omega) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int f(t) e^{-i\omega t} dt ,$$

so stellt sie sogar eine Isometrie des betrachteten Funktionenraums dar.

$\square$  Setzt man in (2) speziell

$$\phi(\omega) := \overline{\widehat{g}(\omega)} ,$$

so resultiert gerade (3), denn  $\widehat{\phi}(t)$  berechnet sich auf Grund der Umkehrformel (1) folgendermassen:

$$\widehat{\phi}(t) = \int \overline{\widehat{g}(\omega)} e^{-i\omega t} d\omega = \overline{\int \widehat{g}(\omega) e^{i\omega t} dt} = 2\pi \overline{g(t)} . \quad \square$$

## 6.4 Bandbegrenzte Signale

Das folgende ist eine Anwendung der Fourier-Analyse auf ein Problem der Kommunikationstheorie.

Ein Zeitsignal  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  kann analog bearbeitet (verstärkt, gefiltert, übertragen, gespeichert, usw.) werden oder aber in digitalisierter Form, etwa auf einer CD oder in der PCM-Telephonie. Man erhält eine digitalisierte, kurz: *diskrete* Version des Signals, indem man eine **Gitterweite**  $T > 0$  wählt und den Datensatz

$$\mathbf{y} := (y_k)_{k \in \mathbb{Z}}, \quad y_k := f(kT) \quad (k \in \mathbb{Z}),$$

bildet. Dieser Datensatz ist in unserem Modell eine zweiseitig unendliche Folge  $(\dots, y_{-2}, y_{-1}, y_0, y_1, y_2, \dots)$  von komplexen Zahlen. Wird  $f$  in Echtzeit bearbeitet, so ist  $\mathbf{y}$  auch für alle praktischen Zwecke unendlich lang; in anderen Fällen, zum Beispiel in der Bildbearbeitung, hat man aber in Wirklichkeit nur einen Datensatz von  $N$  Einträgen bzw. im zweidimensionalen Fall von  $N \times N$  Einträgen, die zu  $N \times N$  Pixeln gehören.

“Am andern Ende” soll das Signal  $f$  aus den gespeicherten oder übermittelten Daten  $y_k$  als Analogsignal möglichst genau rekonstruiert werden. Exakte Werte haben wir nur in den Punkten  $kT$ ; in den Zwischenräumen kann man sich das  $f$  noch beliebig ausdenken.

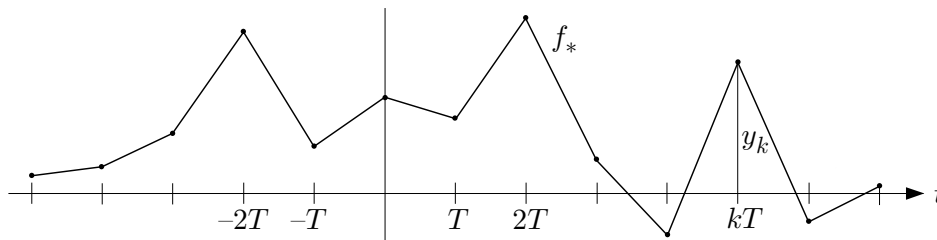


Fig. 6.4.1

Ein naheliegender Ansatz ist lineare Interpolation (Fig. 6.4.1), noch besser eine Interpolation mit Polynomen höheren Grades, die an den Knoten  $kT$  möglichst glatt aneinander anschließen (sog. *Spline-Interpolation*). Die so erhaltene Funktion  $f_*$  besitzt Knackpunkte, die aller Wahrscheinlichkeit nach im Ausgangssignal  $f$  nicht vorhanden waren. Diese Knackpunkte haben



aber zur Folge, dass die Fourier-Transformierte  $\hat{f}_*(\omega)$  mit  $|\omega| \rightarrow \infty$  nur sehr langsam abklingt, zum Beispiel nur wie  $1/\omega^2$  statt exponentiell wie bei einem “sehr schönen” Signal. In anderen Worten: Durch das gewählte Interpolationsverfahren haben wir unerwünschte und beim Hören störende hochfrequente Anteile in unser Signal eingeschmuggelt.

Wir benötigen also ein besseres Interpolationsprinzip. Dabei wird man von vorneherein verlangen, dass es linear in  $\mathbf{y}$  ist (d.h. der Summe von zwei Datensätzen entspricht die Summe der interpolierenden Funktionen), ferner translationsinvariant bezüglich Verschiebung um Vielfache von  $T$ . Unter diesen Umständen ist alles bestimmt, wenn wir uns auf die Interpolation des speziellen Datensatzes  $\mathbf{y} := \delta_0$ . (Kronecker-Delta) geeinigt haben. “Lineare Interpolation” im oben beschriebenen Sinn bedeutet, dass  $\delta_0$  interpoliert wird wie in Fig. 6.4.2 gezeigt. Eine ganz andere, “analytische”, Interpolationsfunktion für den diskreten Deltastoss ist gegeben durch die Funktion

$$s(t) := \operatorname{sinc} \frac{\pi t}{T} = \operatorname{sinc}(\Omega t),$$

wobei wir

$$\frac{\pi}{T} =: \Omega$$

gesetzt haben. Die Funktion  $s(\cdot)$  ist in Fig. 6.4.2 ebenfalls dargestellt. Ein allgemeiner Datensatz  $\mathbf{y}$  wäre hiernach zu interpolieren durch die Funktion

$$y(t) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} y_k s(t - kT) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y_k \operatorname{sinc}(\Omega(t - kT)).$$

Bezogen auf ein Zeitsignal  $f$  definieren wir daher die Funktion

$$Sf(t) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT) \operatorname{sinc}(\Omega(t - kT))$$

als **Shannon-Interpolierende** der Funktion  $f$ , zu Ehren des Kommunikationstheoretikers Claude Shannon (1916–2001).

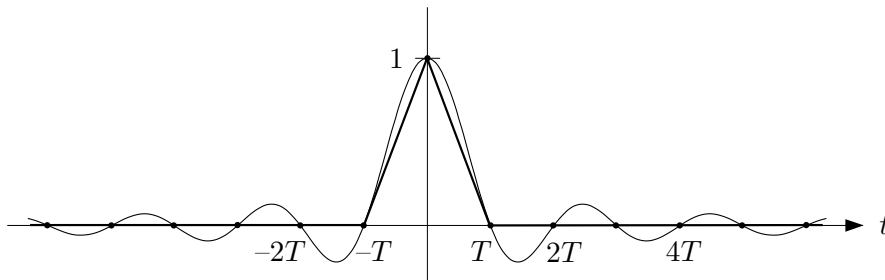


Fig. 6.4.2

Welches ist nun die besondere Eigenschaft von  $Sf$ ? Um dies zu ergründen, wollen wir die Fourier-Transformierte von  $Sf$  betrachten. Wir benötigen also die Fourier-Transformierte der sinc-Funktion. Die liesse sich mit den Methoden der komplexen Analysis berechnen; wir schliessen aber lieber folgendermassen: Gemäss dem Resultat von Beispiel 6.2.① ist die (gerade) Funktion  $s(\cdot)$  die Fourier-Transformierte der Funktion

$$q(\omega) := \begin{cases} \frac{1}{2\Omega} & (-\Omega < \omega < \Omega) \\ 0 & (|\omega| > \Omega) \end{cases} .$$

Nach der Umkehrformel (6.2) muss die Fourier-Transformation von  $s(\cdot)$  die Funktion  $q$  bis auf einen Faktor  $2\pi$  zurückliefern. Wir erhalten daher

$$\widehat{s}(\omega) = \begin{cases} \frac{\pi}{\Omega} & (-\Omega < \omega < \Omega) \\ 0 & (|\omega| > \Omega) \end{cases} ,$$

wobei wir  $\widehat{s}(\pm\Omega)$  unbestimmt lassen. Mit Hilfe der Rechenregel (6.1)(b) ergibt sich daher der folgende Ausdruck für die Fourier-Transformierte der Shannon-Interpolierenden:

$$\widehat{Sf}(\omega) = \begin{cases} T \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT) e^{-ikT\omega} & (-\Omega < \omega < \Omega) \\ 0 & (|\omega| > \Omega) \end{cases} . \quad (1)$$

Ein Zeitsignal  $g$ , dessen Fourier-Transformierte  $\widehat{g}(\omega)$  für  $|\omega| > \Omega$  verschwindet, nennt man  **$\Omega$ -bandbegrenzt**. Wir stellen fest, dass die Shannon-Interpolierende  $Sf$  genau diese Eigenschaft besitzt; in anderen Worten: Durch die Interpolation wurden keine überflüssigen hochfrequenten Anteile in die Funktion eingebracht. Man kann aber noch mehr sagen, und das ist der Inhalt des berühmten **Abtast-Theorems** (*sampling theorem*) von Shannon:

(6.4) *Das Zeitsignal  $f$  sei  $\Omega$ -bandbegrenzt, und es sei  $T = \pi/\Omega$ . Dann wird  $f$  durch die Shannon-Interpolation mit Gitterweite  $T$  (oder kleiner) exakt reproduziert; in anderen Worten, es gilt*

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT) \operatorname{sinc}(\Omega(t - kT)) \quad (t \in \mathbb{R}) .$$

□ Zum Beweis vergleichen wir  $\hat{f}$  mit  $\widehat{Sf}$ ; dabei dürfen wir der Einfachheit halber  $T = 1$ ,  $\Omega = \pi$  annehmen. Die Formel (1) geht dann über in

$$\widehat{Sf}(\omega) = \begin{cases} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(-k)e^{ik\omega} & (-\pi < \omega < \pi) \\ 0 & (|\omega| > \pi) \end{cases}. \quad (2)$$

Wir betrachten nun die  $2\pi$ -periodische Funktion

$$\Phi(\omega) := \sum_{l=-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega + 2\pi l) \quad (\omega \in \mathbb{R})$$

und behaupten: Die in (2) erscheinende Summe ist nichts anderes als die Entwicklung von  $\Phi$  in eine Fourier-Reihe. Die Fourier-Koeffizienten  $c_k$  von  $\Phi$  berechnen sich nämlich wie folgt:

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi(\omega) e^{-ik\omega} d\omega = \frac{1}{2\pi} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \hat{f}(\omega + 2\pi l) e^{-ik(\omega + 2\pi l)} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int \hat{f}(\omega) e^{-ik\omega} d\omega = f(-k); \end{aligned}$$

dabei haben wir noch benutzt, dass  $e^{-2\pi ikl} = 1$  ist. Wir dürfen daher (2) ersetzen durch

$$\widehat{Sf}(\omega) = \begin{cases} \Phi(\omega) & (-\pi < \omega < \pi) \\ 0 & (|\omega| > \pi) \end{cases}$$

oder ausgeschrieben:

$$\widehat{Sf}(\omega) = \begin{cases} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega + 2\pi l) & (-\pi < \omega < \pi) \\ 0 & (|\omega| > \pi) \end{cases}. \quad (3)$$

Bis jetzt wurde noch gar nicht benutzt, dass das Zeitsignal  $f$  bandbegrenzt ist. Gilt  $\hat{f}(\omega) \equiv 0$  für  $|\omega| > \pi$ , so liefert nur der zu  $l = 0$  gehörende Term einen Beitrag an die Summe in (3), und es folgt  $\widehat{Sf}(\omega) \equiv \hat{f}(\omega)$ , wie behauptet. □

Ist  $f$  in Wirklichkeit nicht  $\Omega$ -bandbegrenzt, so kann  $Sf$  das Zeitsignal unmöglich exakt reproduzieren, denn  $Sf$  enthält keine Anteile mit Frequenzen ausserhalb  $[-\Omega, \Omega]$ . Um zu sehen, was in Wirklichkeit passiert, betrachten wir die Grösse

$$\widehat{Sf}(\omega) - \widehat{f}(\omega) = \begin{cases} \sum_{l \neq 0} \widehat{f}(\omega + 2\pi l) & (-\pi < \omega < \pi) \\ -\widehat{f}(\omega) & (|\omega| > \pi) \end{cases}. \quad (4)$$

Hier ist die zweite Zeile unproblematisch: In  $Sf$  fehlen eben die hochfrequenten Anteile von  $f$ . Aus der oberen Zeile von (4) geht aber hervor, dass sich diese hochfrequenten Anteile in  $Sf$  trotzdem bemerkbar machen, nur eben *frequenzverschoben*. Dieser Effekt wird als **Aliasing** bezeichnet und ist tatsächlich ungemein störend. Er ist zum Beispiel schuld daran, wenn sich rasch drehende Räder in alten Filmen rückwärts zu drehen scheinen. Das hat nichts mit dem gewählten Interpolationsverfahren zu tun, sondern damit, dass der Datenvektor  $\mathbf{y} = (f(kT) \mid k \in \mathbb{Z})$  nicht mehr und nicht weniger als die Funktion  $\Phi$  des obigen Beweises repräsentiert, oder, profaner ausgedrückt: dass die Signale  $\mathbf{e}_\omega$  und  $\mathbf{e}_{\omega+2\Omega}$  auf dem Abtastgitter  $(kT \mid k \in \mathbb{Z})$  dieselbe Datenspur zurücklassen (Fig. 6.4.3): Wegen  $\Omega T = \pi$  gilt

$$e^{i\omega kT} = e^{i(\omega+2\Omega)kT} \quad \forall k, \forall l.$$

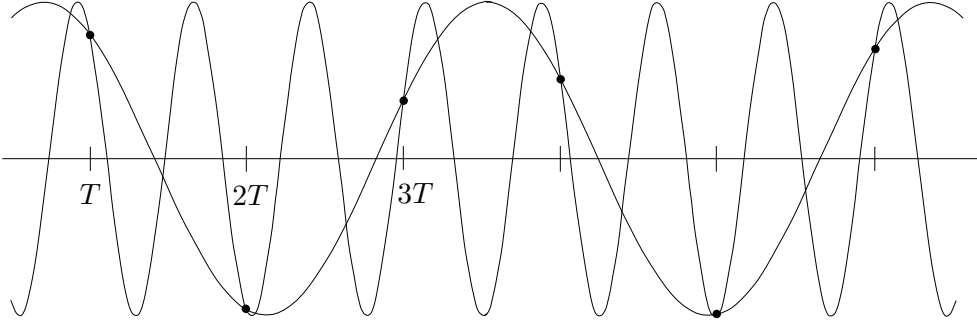


Fig. 6.4.3

Gegen das Aliasing sind verschiedene Medizinen erdonnen worden. Die einfachste ist die, das Ausgangssignal  $f$  vor dem Abtasten einen sogenannten **Tiefpassfilter** durchlaufen zu lassen, der alle Frequenzanteile ausserhalb des Intervalls  $[-\Omega, \Omega]$  annihiliert.