

8

Laplace-Transformation

8.1 Basics

Die Fourier-Transformation in allen ihren Formen (Kapitel 5–7) ist ein mächtiges analytisches Werkzeug unter anderem in den folgenden Bereichen:

- Partielle Differentialgleichungen: allgemeine Theorie, analytische Darstellung der Lösungen von bestimmten PDEs.
- Signaltechnik: Analyse von periodischen und aperiodischen Zeitsignalen, deren Filterung, Verdichtung, Speicherung, usw., und natürlich die zugehörige Theorie.
- Bildverarbeitung: instantane Verarbeitung und Visualisierung von riesigen Datenmengen dank FFT, zum Beispiel in der Strukturchemie oder der Computer-Tomographie.

Die Objekte der Fourier-Analyse sind also auf dem theoretischen Feld abstrakte Funktionen f oder gedachte Lösungen u , und in der Praxis ein- oder mehrdimensionale Datensätze, die mit Hilfe des Computers auf vielfältige Weise bearbeitet werden.

Während die Fourier-Transformierte \hat{f} eines Zeitsignals f physikalisch relevante und intuitiv interpretierbare Information über f ausdrückt, ist die Laplace-Transformation, abgekürzt: **LT**,

$$\mathcal{L} : f \mapsto \mathcal{L}f$$

eine recht formale Angelegenheit, und niemand würde zum Beispiel den Graphen von $\mathcal{L}f$ ansehen wollen. Es sind denn auch die *formalen* Eigenschaften von \mathcal{L} , die diese Transformation für den Ingenieur so interessant machen, in erster Linie der Faltungssatz. Da die Formel für $\mathcal{L}f$ “bis auf einen Faktor i im Exponenten” gleich aussieht wie die Formel für \widehat{f} , sind auch die formalen Rechenregeln ähnlich wie bei der Fourier-Transformation. Der entscheidende Unterschied ist der, dass nun die Signale für $t \rightarrow \infty$ nicht abklingen müssen, sondern sogar exponentiell anwachsen dürfen. Zum Ausgleich wird verlangt, dass links von $t = 0$ nichts stattfindet.

Der hauptsächliche Anwendungsbereich der Laplace-Transformation ist die Input-Output-Analyse von konkret gegebenen “linearen” und “zeitinvarianten” Systemen. Das einfachste Beispiel hierfür sind lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten und einem Anregungsterm $K(t)$: Die Anfangsbedingungen und $K(t)$ konstituieren zusammen den Input; gefragt wird nach dem für $t \geq 0$ resultierenden Output $t \mapsto y(t)$. Der Leser erinnert sich vielleicht an das Federpendel

$$m\ddot{y} + b\dot{y} + fy = K \cos(\omega t), \quad y(0) = y_0, \quad \dot{y}(0) = v_0. \quad (1)$$

In der praktischen Anwendung der Laplace-Transformation geht es nicht um numerische Daten, sondern um die rechnerische Manipulation von Funktionstermen, die entweder gegeben sind oder in LT-Katalogen aufgesucht werden müssen.

Die Objekte dieses Kapitels sind, wie schon früher bemerkt, **Einschwing-** oder **Einschaltvorgänge**, kurz: **Evaus**. Hierunter verstehen wir Funktionen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ mit den folgenden drei Eigenschaften:

- (a) $f(t) \equiv 0 \quad (t < 0)$;
- (b) es gibt ein $\alpha \in \mathbb{R}$ und ein $C > 0$ mit

$$|f(t)| \leq Ce^{\alpha t} \quad (t \in \mathbb{R}); \quad (2)$$

- (c) f ist stetig bis auf isolierte Sprungstellen t_j ($j \geq 0$), wobei je die einseitigen Grenzwerte $f(t_j-)$ und $f(t_j+)$ existieren. Insbesondere existiert $f(0+)$.

Die Gesamtheit dieser Funktionen bezeichnen wir mit E . Das Infimum aller α 's, für die eine Abschätzung der Form (2) gilt, heisst **Wachstumskonstante** von f und wird mit α_f bezeichnet. Wir vereinbaren noch das folgende: Ist t_j eine Sprungstelle von $f \in E$, so wird der Funktionswert $f(t_j)$ nicht benutzt.

Es wird nun eine komplexe Hilfsvariable $s = x + iy$ eingeführt. Die **Laplace-Transformierte** $\mathcal{L}f$ eines Evas $f \in E$ ist eine Funktion der Variablen s und ist zunächst einmal in einer rechten Halbebene definiert:

$$\mathcal{L}f(s) := \int_0^\infty f(t)e^{-st} dt \quad (\operatorname{Re} s > \alpha_f). \quad (3)$$

(8.1) Ist $f \in E$, so ist $\mathcal{L}f$ in der rechten Halbebene $P := \{s \mid \operatorname{Re} s > \alpha_f\}$ wohldefiniert und eine komplex-analytische Funktion der Variablen s ; ferner gilt

$$\lim_{\operatorname{Re} s \rightarrow \infty} \mathcal{L}f(s) = 0. \quad (4)$$

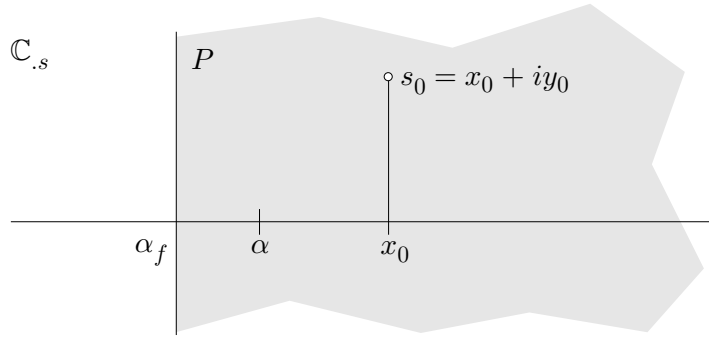


Fig. 8.1.1

┌ Betrachte ein $s_0 = x_0 + iy_0 \in P$ (Fig. 8.1.1). Wegen $x_0 > \alpha_f$ gibt es ein $\alpha < x_0$ und ein C , so dass (2) gilt, und hieraus folgt

$$|f(t)e^{-s_0 t}| = |f(t)|e^{-x_0 t} \leq C e^{(\alpha - x_0)t}.$$

Wegen $\alpha - x_0 < 0$ klingt hiernach der Integrand $f(t)e^{-s_0 t}$ mit $t \rightarrow \infty$ exponentiell ab, und die Existenz von $\mathcal{L}f(s_0)$ ist garantiert, ja mehr noch: Man hat

$$|\mathcal{L}f(s_0)| \leq \int_0^\infty C e^{(\alpha - x_0)t} dt = \frac{C}{x_0 - \alpha},$$

und hieraus folgt (4).

Mit der nötigen Vorsicht darf man $\mathcal{L}f$, so weit definiert, unter dem Integralzeichen nach s differenzieren; es ergibt sich

$$(\mathcal{L}f)'(s) = - \int_0^\infty t f(t) e^{-st} dt \quad (\operatorname{Re} s > \alpha_f). \quad \lrcorner$$

Wie bereits angedeutet, geht es hier in erster Linie um die Transformation von konkreten Funktionstermen wie $\sin(\omega t)$, $t^2 e^{-t/2}$, \sqrt{t} , 1 , \dots . Derartige Terme werden zu Evas gemacht, indem man sie kurzer Hand für $t < 0$ undefiniert und dort $\equiv 0$ setzt. Weiter: Ist $f(t)$ ein gewisser Funktionsterm und $F(s)$ der Funktionsterm, der $\mathcal{L}f$ repräsentiert, so drücken wir das mit Hilfe des sogenannten **Doetsch-Symbols** folgendermassen aus:

$$f(t) \circ\bullet F(s) . \quad (5)$$

Eine derartige Beziehung zwischen bestimmten Funktionstermen wird gelegentlich als **Korrespondenz** bezeichnet. Die **Originalfunktion** $f(t)$ lebt im **Zeitbereich**, die **Bildfunktion** $F(s)$ im **Bildbereich**.

Anmerkung: Die typographischen Konventionen bezüglich der LT sind in der Literatur nicht einheitlich. Wir halten uns an (5).

① In diesem Sinn besagt zum Beispiel die Formel

$$\cos(\omega t) \circ\bullet \frac{s}{s^2 + \omega^2} \quad (6)$$

folgendes: Das Evas

$$f(t) := \begin{cases} \cos(\omega t) & (t > 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases}$$

besitzt die Laplace-Transformierte

$$\mathcal{L}f(s) = \frac{s}{s^2 + \omega^2} \quad (\operatorname{Re} s > 0) . \quad (7)$$

Zunächst einmal ist

$$|f(t)| \leq e^{\alpha t} \quad (t \in \mathbb{R})$$

für beliebiges $\alpha > 0$ und kein $\alpha < 0$. Somit ist $\alpha_f = 0$, und $\mathcal{L}f$ ist in der Halbebene $\operatorname{Re} s > 0$ analytisch. Man sieht übrigens, dass das angegebene $\mathcal{L}f$ an den Stellen $\pm i\omega$ je einen einfachen Pol hat, und hieraus ergibt sich, dass $\mathcal{L}f$ nicht in eine grössere Halbebene analytisch fortgesetzt werden kann.

Um nun (6) bzw. (7) zu beweisen, genügt es nach **(3.17)**, *reelle* $s > 0$ zu betrachten. Wir stellen daher folgende Rechnung an:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \cos(\omega t) e^{-st} dt &= \operatorname{Re} \int_0^\infty e^{(-s+i\omega)t} dt = \operatorname{Re} \left. \frac{e^{(-s+i\omega)t}}{-s+i\omega} \right|_{t=0}^\infty \\ &= \operatorname{Re} \frac{1}{s-i\omega} = \frac{s}{s^2 + \omega^2} . \end{aligned} \quad \bigcirc$$

② Die Funktion

$$H(t) := \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ 1 & (t > 0) \end{cases}$$

heisst **Heavisidesche Sprungfunktion**. Ihre Laplace-Transformierte berechnet sich zu

$$\mathcal{L}H(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} dt = \frac{1}{s} \quad (\operatorname{Re} s > 0). \quad (8)$$

Gemäss unserer Vereinbarung haben wir demnach die Korrespondenz

$$1 \circ \bullet \frac{1}{s}.$$

Es sei nun allgemeiner $n \geq 0$. Bei der Berechnung von $\mathcal{L}[t^n]$ dürfen wir wiederum $s > 0$ annehmen. Es ergibt sich

$$\mathcal{L}[t^n](s) = \int_0^{\infty} t^n e^{-st} dt = \int_0^{\infty} \left(\frac{\tau}{s}\right)^n e^{-\tau} \frac{d\tau}{s} = \frac{1}{s^{n+1}} \int_0^{\infty} \tau^n e^{-\tau} d\tau.$$

Das letzte Integral hat bekanntlich den Wert $n!$. Folglich bestehen die Korrespondenzen

$$t^n \circ \bullet \frac{n!}{s^{n+1}} \quad (n \in \mathbb{N}). \quad (9)$$

○

③ Die Funktion $f(t) := 1/\sqrt{t}$ ist zwar für $t \rightarrow 0+$ unbeschränkt, besitzt aber trotzdem eine Laplace-Transformierte:

$$\mathcal{L}f(s) = \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-st} dt = \int_0^{\infty} \sqrt{\frac{s}{\tau}} e^{-\tau} \frac{d\tau}{s} = \frac{1}{\sqrt{s}} \int_0^{\infty} \tau^{-1/2} e^{-\tau} d\tau.$$

Das letzte Integral hat den Wert $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$. Damit erhalten wir die Korrespondenz

$$\frac{1}{\sqrt{t}} \circ \bullet \sqrt{\frac{\pi}{s}},$$

wobei \sqrt{s} in der Halbebene $\operatorname{Re} s > 0$ als Hauptwert zu interpretieren ist.

○

④ Es sei $\lambda = \alpha + i\omega$ eine fest gegebene komplexe Zahl. Die Funktion $e^{\lambda t}$ besitzt die Wachstumskonstante α und ist somit in E . Man berechnet

$$\mathcal{L}[e^{\lambda t}](s) = \int_0^{\infty} e^{\lambda t} e^{-st} dt = \frac{1}{\lambda - s} e^{(\lambda-s)t} \Big|_{t=0}^{\infty} = \frac{1}{s - \lambda} \quad (\operatorname{Re} s > \alpha)$$

und erhält damit die Korrespondenz

$$e^{\lambda t} \circ \bullet \frac{1}{s - \lambda} \quad (\lambda \in \mathbb{C}). \quad (10)$$

○

Wozu das alles? Es ist höchste Zeit, den eigentlichen Zweck der Übung zu erläutern. Das Paradigma lässt sich an dem Anfangswertproblem (1) erklären. Gesucht ist dort ein gewisses Evau $t \mapsto y(t)$ ($t \geq 0$). Dieses Evau besitzt eine ebenfalls unbekannte Laplace-Transformierte $Y(s)$. Nun lassen sich die Bedingungen (1) mit Hilfe einfacher Rechenregeln in Bedingungen an $Y(s)$ übersetzen. De facto resultiert eine einzige Bedingung, nämlich eine *lineare Gleichung* der Form

$$a(s)Y(s) = c(s)$$

mit gewissen Funktionstermen $a(s)$ und $c(s)$. Hiernach wäre also $Y(s)$ wohlbestimmt und auch einfach zu berechnen. Um nun zu dem eigentlich gesuchten Evau $t \mapsto y(t)$ zu kommen, benötigt man zwei Dinge:

- (a) Erstens müsste sichergestellt sein, dass $y(t)$ durch seine Laplace-Transformierte $Y(s)$ überhaupt eindeutig bestimmt ist.
- (b) Zweitens braucht es eine "Umkehrformel", die das $Y(s)$ als Input akzeptiert und die zugehörige Originalfunktion $y(t)$ ausgibt.

Im Hinblick auf (a) ist klar, dass der folgende **Satz von Lerch** einen Grundpfeiler der ganzen Theorie darstellt:

(8.2) *Die Laplace-Transformation ist injektiv, das heisst: Sind f und g zwei verschiedene Evas, so sind auch ihre Laplace-Transformierten $\mathcal{L}f$ und $\mathcal{L}g$ verschieden.*

Wir werden diesen Satz in Abschnitt 8.5 beweisen. Dort wird dann auch von der in (b) geforderten Umkehrformel die Rede sein. Mit dieser Formel

ist es so eine Sache; sie läuft “übers Komplexe” und wird eigentlich in der Praxis kaum benützt. Man hält sich vielmehr an einen Vorrat von Standardkorrespondenzen, die nun rückwärts gelesen werden (auch das Doetsch-Symbol lässt sich umkehren: $\bullet \dashrightarrow$!), und macht wiederholten Gebrauch von den Rechenregeln. Es gibt natürlich auch Korrespondenzen-Kataloge; am bekanntesten und umfangreichsten sind die folgenden:

A. Erdélyi: Tables of integral transforms, vol. I; McGraw-Hill, 1954.

F. Oberhettinger & L. Badii: Tables of Laplace transforms; Springer, 1973.

In den meisten mathematischen Handbüchern für Ingenieure finden sich bescheidenere Tabellen dieser Art.

8.2 Rechenregeln und Beispiele

Bevor wir endlich die Laplace-Transformation *in action* vorführen können, benötigen wir noch einige allgemeine Rechenregeln.

(8.3) Die Laplace-Transformation ist komplex-linear:

$$\mathcal{L}(\lambda f + \mu g) = \lambda \mathcal{L}f + \mu \mathcal{L}g \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{C}).$$

① Es ist $\sin(\omega t) = \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2i}$. Aus 8.1.(10) ergibt sich daher die Korrespondenz

$$\sin(\omega t) \dashrightarrow \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{s - i\omega} - \frac{1}{s + i\omega} \right) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}. \quad (1)$$

○

(8.4) Ist $f \in E$, so ergeben sich aus $f(t) \circ\bullet F(s)$ die folgenden weiteren Korrespondenzen:

$$(a) \quad f(t-h) \circ\bullet e^{-hs} F(s) \quad (h > 0),$$

$$(b) \quad f(\alpha t) \circ\bullet \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{s}{\alpha}\right) \quad (\alpha > 0),$$

$$(c) \quad e^{\lambda t} f(t) \circ\bullet F(s-\lambda) \quad (\lambda \in \mathbb{C}).$$

$$(d) \quad tf(t) \circ\bullet -F'(s), \quad t^n f(t) \circ\bullet (-1)^n F^{(n)}(s)$$

$$(e) \quad \frac{f(t)}{t} \circ\bullet \int_s^\infty F(\sigma) d\sigma,$$

$$(f) \quad f'(t) \circ\bullet sF(s) - f(0+),$$

$$(g) \quad \int_0^t f(\tau) d\tau \circ\bullet \frac{F(s)}{s},$$

Dabei wird in (e) vorausgesetzt, dass $f(t)/t$ in E liegt, und in (f), dass f für $t > 0$ stetig ist, sowie natürlich $f' \in E$.

□ Die im folgenden erscheinenden Gleichungen in der Variablen s gelten jeweils für alle s mit hinreichend grossem Realteil.

(a) Wegen $h > 0$ ist $f(t-h) \equiv 0$ für $0 \leq t < h$ und folglich

$$\begin{aligned} \int_0^\infty f(t-h)e^{-st} dt &= \int_h^\infty f(t-h)e^{-st} dt = \int_0^\infty f(t')e^{-s(t'+h)} dt' \\ &= e^{-hs} F(s). \end{aligned}$$

Anmerkung: Für $h < 0$ gibt es keine derartige Formel! Wird nämlich f nach links verschoben, so geht das Anfangsstück von f verloren, und das hat einen unkontrollierbaren Einfluss auf $\mathcal{L}f$.

Den Beweis von (b) und (c) überlassen wir dem Leser.

(d) In der Gleichung

$$\int_0^\infty f(t)e^{-st} dt = F(s)$$

darf man unter dem Integralzeichen nach s differenzieren und erhält

$$\int_0^\infty (-t)f(t)e^{-st} dt = F'(s).$$

(e) Setze zur Abkürzung $\frac{f(t)}{t} =: g(t)$ und $\mathcal{L}g =: G$. Die Regel (d) liefert

$$F(s) = \mathcal{L}f(s) = \mathcal{L}[tg(t)](s) = -G'(s);$$

folglich gilt für beliebige s, s_0 mit hinreichend grossem Realteil die Beziehung

$$G(s) - G(s_0) = \int_s^{s_0} F(\sigma) d\sigma .$$

Wegen 8.1.(4) ergibt sich hieraus mit $\operatorname{Re} s_0 \rightarrow \infty$ die Behauptung. (Damit ist nun auch klar, was mit \int_s^∞ gemeint war.)

(f) Da f für $t > 0$ stetig ist, dürfen wir in der folgenden Rechnung partiell integrieren, auch wenn f' Sprungstellen aufweist:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}f'(s) &= \int_0^\infty \underset{\uparrow}{f'(t)} \underset{\downarrow}{e^{-st}} dt = f(t)e^{-st} \Big|_{t=0+}^\infty + s \int_0^\infty f(t)e^{-st} dt \\ &= sF(s) - f(0+) . \end{aligned}$$

(g) Die Funktion $\int_0^t f(\tau) d\tau =: g(t)$ ist jedenfalls in E , wie man sich leicht überlegt. Es sei also $\mathcal{L}g =: G$. Mit Hilfe der Regel (f) erhält man dann

$$F(s) = \mathcal{L}f(s) = \mathcal{L}g'(s) = sG(s) - g(0+) = sG(s) ,$$

und dies ist äquivalent mit der Behauptung. ┘

Durch Iteration von (8.4)(f) erhält man leicht die folgende Regel für die Laplace-Transformation der höheren Ableitungen eines Evas:

(8.5) *Es sei $n \geq 1$. Sind $f, f', \dots, f^{(n-1)}$ für $t > 0$ stetig und ist $f^{(n)} \in E$, so folgt aus $f(t) \circ \bullet F(s)$ die Korrespondenz*

$$f^{(n)}(t) \circ \bullet s^n F(s) - s^{n-1} f(0+) - s^{n-2} f'(0+) - \dots - f^{(n-1)}(0+) .$$

② Wir beginnen mit einem Rechteckspuls $q := A 1_{[0,h]}$ der Breite $h > 0$ und der Amplitude $A \in \mathbb{C}$ (Fig. 8.2.1). Aus der Darstellung

$$q(t) = A(H(t) - H(t-h)) \quad (t > 0)$$

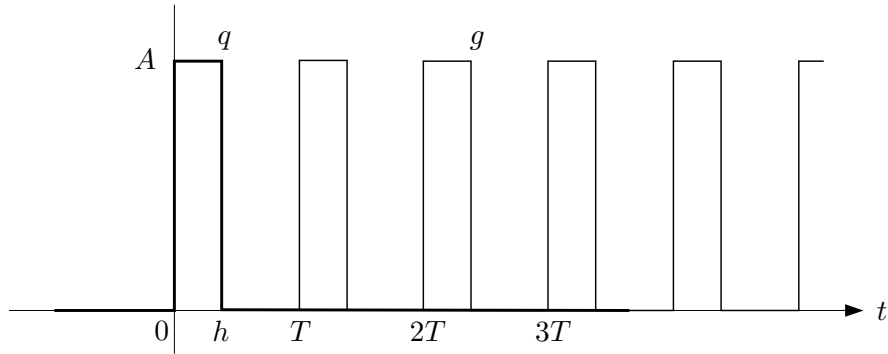


Fig. 8.2.1

folgt mit 8.1.(8) und Regel (8.4)(a):

$$Q(s) = (1 - e^{-hs}) \frac{A}{s}. \quad (2)$$

Anstelle eines einzigen Pulses betrachten wir nun eine bei $t = 0$ beginnende Folge g von derartigen Pulsen; sie sei periodisch mit Periode $T > h$. Hiernach ist

$$g(t) := \sum_{k=0}^{\infty} q(t - kT) \quad (t > 0), \quad (3)$$

wobei diese Reihe für alle t trivialerweise konvergiert. Wenden wir die Regel (8.4)(a) darauf an, so ergibt sich

$$G(s) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-kTs} Q(s) = \frac{1}{1 - e^{-Ts}} Q(s) = \frac{1 - e^{-hs}}{1 - e^{-Ts}} \frac{A}{s}. \quad (4)$$

○

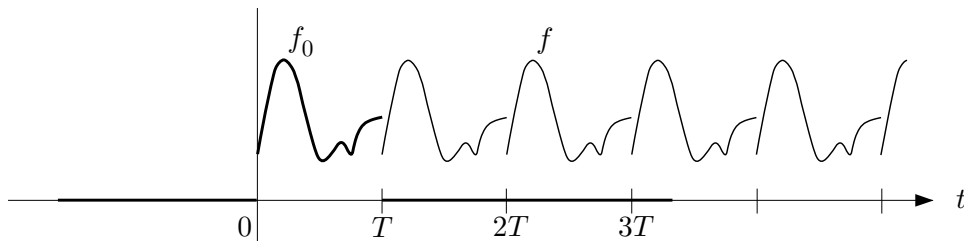


Fig. 8.2.2

③ In Verallgemeinerung des vorangehenden Beispiels betrachten wir nun ein beliebiges **periodisches Evau**. Darunter verstehen wir ein $f \in E$ mit

$$f(t+T) = f(t) \quad (t > 0)$$

für ein gewisses $T > 0$ (Fig. 8.2.2). Ein derartiges f ist vollständig bestimmt durch sein Grundmuster

$$f_0(t) := \begin{cases} f(t) & (0 < t \leq T) \\ 0 & (t > T) \end{cases},$$

und zwar gilt

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f_0(t - kT).$$

Hieraus ergibt sich durch dieselbe Rechnung wie im vorangehenden Beispiel:

$$F(s) = \frac{1}{1 - e^{-Ts}} F_0(s) = \frac{1}{1 - e^{-Ts}} \int_0^T f_0(t) e^{-ts} dt. \quad \bigcirc$$

8.3 Differentialgleichungen

Dieser Abschnitt besteht im wesentlichen aus drei Beispielen.

8.3.1. Wir betrachten als erstes das Federpendel 8.1.(1) und schreiben die Differentialgleichung in der folgenden ausführlicheren Form:

$$m\ddot{y}(t) + b\dot{y}(t) + cy(t) = K \cos(\omega t) \quad (t \geq 0). \quad (1)$$

Die Erfahrung sagt uns, dass die Lösungen höchstens exponentiell mit t anwachsen; mithin ist das gesuchte $y(t)$ ein Evau. Gemäss unseren Rechenregeln und den angegebenen Anfangsbedingungen haben wir daher die Korrespondenzen

$$y(t) \circ\!\!\!\rightarrow Y(s),$$

$$\dot{y}(t) \circ\!\!\!\rightarrow sY(s) - y_0,$$

$$\ddot{y}(t) \circ\!\!\!\rightarrow s^2Y(s) - sy_0 - v_0;$$

ferner nehmen wir 8.1.(6) in Anspruch. Wir wenden nun auf beiden Seiten von (1) die Transformation \mathcal{L} an und erhalten folgende Gleichung für die unbekannte Funktion $Y(s)$:

$$m(s^2 Y(s) - sy_0 - v_0) + b(sY(s) - y_0) + fY(s) = \frac{Ks}{s^2 + \omega^2}.$$

Umordnung liefert

$$(ms^2 + bs + f)Y(s) = \frac{Ks}{s^2 + \omega^2} + (ms + b)y_0 + mv_0. \quad (2)$$

Wir betrachten nun einige Spezialfälle, wobei wir durchwegs $b = 0$ voraussetzen.

1. Ist $K = 0$, so geht (2) nach Division mit m über in

$$(s^2 + \omega_0^2)Y(s) = sy_0 + v_0;$$

dabei haben wir noch $\sqrt{f/m} =: \omega_0$ gesetzt. Damit ergibt sich definitiv

$$Y(s) = y_0 \frac{s}{s^2 + \omega_0^2} + v_0 \frac{1}{s^2 + \omega_0^2}.$$

Wir führen nun die Rücktransformation durch: Mit 8.1.(6) und 8.2.(1) (oder durch Aufsuchen in einer Tabelle) erhalten wir

$$y(t) = y_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t),$$

und man verifiziert leicht, dass dieses $y(t)$ alle Bedingungen erfüllt. Beachte, dass wir zur Befriedigung der Anfangsbedingungen kein lineares Gleichungssystem haben aufstellen und lösen müssen.

2. Wir nehmen nun $K \neq 0$ an und zusätzlich $y_0 = 0$, $v_0 = 0$. Aus (2) erhalten wir dann

$$Y(s) = \frac{K}{m} \frac{s}{(s^2 + \omega_0^2)(s^2 + \omega^2)}.$$

Um weiter zu kommen, benötigen wir die Partialbruchzerlegung der rechten Seite. Wir setzen $\omega \neq \omega_0$ voraus und machen den Ansatz

$$\frac{s}{(s^2 + \omega_0^2)(s^2 + \omega^2)} = \frac{As + B}{s^2 + \omega_0^2} + \frac{Cs + D}{s^2 + \omega^2}.$$

Nachdem man A, B, C, D hieraus bestimmt hat, ergibt sich

$$Y(s) = \frac{K}{m} \frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2} \left(\frac{s}{s^2 + \omega_0^2} - \frac{s}{s^2 + \omega^2} \right),$$

und Rücktransformation liefert

$$y(t) = \frac{K}{m} \frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2} (\cos(\omega_0 t) - \cos(\omega t)).$$

Wir beobachten also die Superposition von zwei Schwingungen gleicher Amplitude; die eine hat die Eigen-Kreisfrequenz des Oszillators, die andere die Frequenz der Anregung. — Den Resonanzfall $\omega = \omega_0$ überlassen wir dem Leser.

3. Wir bleiben bei $y_0 = 0, v_0 = 0$, wählen aber als Anregung einen Rechteckspuls der Dauer $\tau > 0$ und der Höhe $K := p/\tau$. Die Grösse p stellt den dabei insgesamt vermittelten mechanischen Impuls dar. Auf Grund von 8.2.(2) ergibt sich dann für $Y(s)$ die Gleichung

$$(s^2 + \omega_0^2) Y(s) = \frac{p}{\tau m} \frac{1 - e^{-\tau s}}{s}$$

bzw.

$$Y(s) = \frac{p}{\tau m} (1 - e^{-\tau s}) \frac{1}{s(s^2 + \omega_0^2)}. \quad (3)$$

Partialbruchzerlegung liefert

$$Y(s) = \frac{p}{\tau m \omega_0^2} (1 - e^{-\tau s}) \left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + \omega_0^2} \right).$$

Dies müssen wir nun rücktransformieren. Die grosse Klammer besitzt als Originalfunktion den Ausdruck $1 - \cos(\omega_0 t) = 2 \sin^2(\omega_0 t/2)$; mit Hilfe der Regel (8.4)(a) ergibt sich daher

$$y(t) = \frac{2p}{\tau m \omega_0^2} \left(\sin^2(\omega_0 t/2) - \sin^2(\omega_0(t - \tau)/2) \right), \quad (4)$$

wobei der zweite Summand in der grossen Klammer für $t < \tau$ gleich 0 zu setzen ist.

Wir wollen nun untersuchen, was im Limes $\tau \rightarrow 0$ passiert. Physikalisch läuft das darauf hinaus, dass zur Zeit $t = 0$ schlagartig der Impuls p auf das

Pendel übertragen wird. Führen wir diesen Grenzübergang an (3) durch, so erhalten wir (zum Beispiel mit der Regel von Bernoulli-de l'Hôpital):

$$Y_0(s) := \frac{p}{m} \frac{1}{s^2 + \omega_0^2};$$

die zugehörige Originalfunktion ist

$$y_0(t) = \frac{p}{m\omega_0} \sin(\omega_0 t). \quad (5)$$

Der analoge Grenzübergang an (4) hätte zu demselben Ergebnis geführt. Man nennt (5) die *Stossantwort* des betrachteten Pendels. Wir werden auf diesen Punkt zurückkommen.

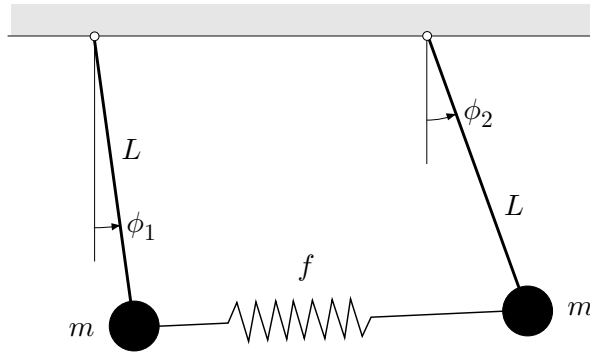


Fig. 8.3.1

8.3.2. Wir betrachten nun ein Doppelpendel und verweisen auf die Fig. 8.3.1, der auch die verwendeten Bezeichnungen zu entnehmen sind. Die beiden Massen schwingen unter dem Einfluss der Schwerkraft und sind durch eine Feder aneinander gekoppelt. Solange die Ausschläge ϕ_1, ϕ_2 klein sind, gelten die folgenden Bewegungsgleichungen:

$$\begin{aligned} mL\ddot{\phi}_1 &= -mg\phi_1 + fL(\phi_2 - \phi_1), \\ mL\ddot{\phi}_2 &= -mg\phi_2 - fL(\phi_2 - \phi_1), \end{aligned}$$

unter g die Gravitationskonstante verstanden. Mit den Abkürzungen

$$\omega := \sqrt{\frac{g}{L}}, \quad \alpha := \sqrt{\frac{f}{m}}$$

geht dies über in

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\phi}_1 + \omega^2 \phi_1 + \alpha^2(\phi_1 - \phi_2) &= 0 \\ \ddot{\phi}_2 + \omega^2 \phi_2 - \alpha^2(\phi_1 - \phi_2) &= 0 \end{aligned} \right\} . \quad (6)$$

Stipuliert man zum Beispiel die Anfangsbedingungen

$$\phi_1(0) = A, \quad \phi_2(0) = 0, \quad \dot{\phi}_1(0) = \dot{\phi}_2(0) = 0,$$

so ist damit der weitere Ablauf

$$t \mapsto \mathbf{y}(t) := (\phi_1(t), \phi_2(t)) \quad (t \geq 0)$$

eindeutig festgelegt.

Dieses Evau $\mathbf{y}(t)$ soll nun mit Hilfe der unseres Laplace-Apparates bestimmt werden. Auf Grund der Rechenregeln haben wir die folgenden Korrespondenzen:

$$\begin{aligned} \phi_1(t) &\circ\text{---}\bullet \Phi_1(s), & \phi_2(t) &\circ\text{---}\bullet \Phi_2(s), \\ \dot{\phi}_1(t) &\circ\text{---}\bullet s\Phi_1(s) - A, & \dot{\phi}_2(t) &\circ\text{---}\bullet s\Phi_2(s), \\ \ddot{\phi}_1(t) &\circ\text{---}\bullet s^2\Phi_1(s) - sA, & \ddot{\phi}_2(t) &\circ\text{---}\bullet s^2\Phi_2(s). \end{aligned}$$

Die Differentialgleichungen (6) gehen damit in ein lineares Gleichungssystem für die beiden Funktionen $\Phi_1(s)$, $\Phi_2(s)$ über:

$$\left. \begin{aligned} s^2\Phi_1 - sA + \omega^2\Phi_1 + \alpha^2(\Phi_1 - \Phi_2) &= 0 \\ s^2\Phi_2 + \omega^2\Phi_2 - \alpha^2(\Phi_1 - \Phi_2) &= 0 \end{aligned} \right\} .$$

Die Auflösung (zum Beispiel mit Mathematica) liefert

$$\begin{aligned} \Phi_1(s) &= \frac{As(s^2 + \omega^2 + \alpha^2)}{(s^2 + \omega^2 + \alpha^2)^2 - \alpha^4} = \frac{A}{2} \left(\frac{s}{s^2 + \omega^2} + \frac{s}{s^2 + \omega^2 + 2\alpha^2} \right) \\ \Phi_2(s) &= \frac{As(s^2 + \omega^2 + \alpha^2)}{(s^2 + \omega^2 + \alpha^2)^2 - \alpha^4} = \frac{A}{2} \left(\frac{s}{s^2 + \omega^2} - \frac{s}{s^2 + \omega^2 + 2\alpha^2} \right) \end{aligned}$$

und die anschließende Rücktransformation

$$\phi_1(t) = \frac{A}{2} (\cos(\omega t) + \cos(\omega' t)), \quad \phi_2(t) = \frac{A}{2} (\cos(\omega t) - \cos(\omega' t)); \quad (7)$$

dabei wurde zur Abkürzung $\sqrt{\omega^2 + 2\alpha^2} =: \omega'$ gesetzt.

Wir nehmen nun an, die Kopplung sei nur sehr schwach. Dann ist $\alpha \ll \omega$, und mit der weiteren Abkürzung

$$\omega_* := \frac{\omega + \omega'}{2} \doteq \omega$$

können wir (7) auf die folgende suggestive Form bringen:

$$\phi_1(t) = A \cos\left(\frac{\alpha^2}{2\omega_*} t\right) \cos(\omega_* t), \quad \phi_2(t) = A \sin\left(\frac{\alpha^2}{2\omega_*} t\right) \sin(\omega_* t).$$

Die beiden Pendel schwingen also grundsätzlich mit der Frequenz ω_* , die um wenig grösser ist als die Eigenfrequenz der ungekoppelten Pendel. Ihre Amplitude ist aber moduliert mit der langsamen Frequenz $\alpha^2/(2\omega_*)$, und zwar findet ein unablässiger Energieaustausch zwischen den beiden Pendeln statt: Wenn das erste Pendel maximal ausschlägt, ruht praktisch das zweite, und umgekehrt.

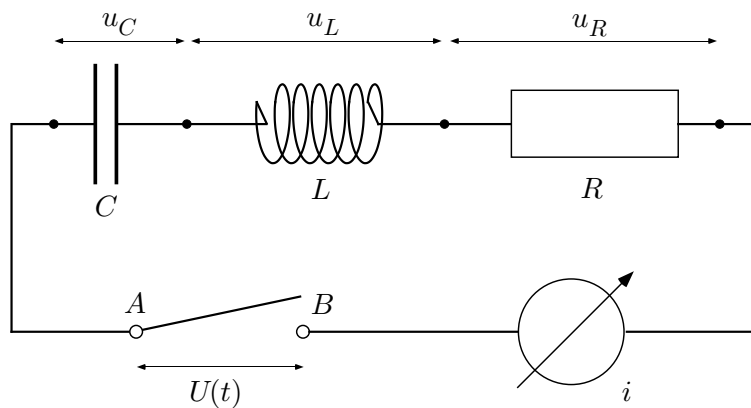


Fig. 8.3.2

8.3.3. Wir betrachten den in Fig. 8.3.2 dargestellten elektrischen Schwingkreis. Jedes “Element” dieses Schwingkreises wird durch eine konstituierende Gleichung und eine positive Konstante (L , R , C) charakterisiert:

Element	konstituierende Gleichung
Induktivität L	$u_L = L \frac{di}{dt}$
Widerstand R	$u_R = R i$
Kapazität C	$u_C = \frac{1}{C} \left(q_0 + \int_0^t i(\tau) d\tau \right)$

Dabei bezeichnen u_C , u_L , u_R die über den betreffenden Elementen gemessenen Spannungen, q_0 die zur Zeit $t = 0$ auf C sitzende Ladung und i den in dem Stromkreis fließenden Strom. Wird der Schalter über den Klemmen A und B geschlossen, so gilt nach dem zweiten Kirchhoffschen Gesetz:

$$u_L + u_R + u_C = 0;$$

allgemein: Wird an die Klemmen A und B eine willkürlich modulierte Fremdspannung $u(t)$ angelegt, so gilt

$$u_L + u_R + u_C = u(t) .$$

Auf Grund der konstituierenden Gleichungen der einzelnen Elemente erhalten wir damit die folgende konstituierende Gleichung unseres Schwingkreises:

$$L \frac{di}{dt} + R i + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau = u(t) - \frac{q_0}{C} . \quad (8)$$

Hier wird die angelegte Spannung $u(t)$ als Input betrachtet; der resultierende Strom $i(t)$ ist der Output. Wir unterwerfen nun die Gleichung (8) der Laplace-Transformation. Nach den Rechenregeln (8.4) ergibt sich

$$L(sI(s) - I(0+)) + RI(s) + \frac{1}{C} \frac{I(s)}{s} = U(s) - \frac{q_0}{C} \frac{1}{s}$$

und folglich

$$\left(Ls + R + \frac{1}{C} \frac{1}{s} \right) I(s) = U(s) - \frac{q_0}{C} \frac{1}{s} + Li(0+) .$$

Für das Weitere nehmen wir $q_0 = 0$, $i(0+) = 0$ an; die letzte Gleichung geht damit über in eine Beziehung der Form

$$I(s) = G(s)U(s) . \quad (9)$$

Der auf der rechten Seite erschienene Multiplikator

$$G(s) := \frac{1}{Ls + R + \frac{1}{C} \frac{1}{s}}$$

heißt **Übertragungsfunktion** des hier betrachteten Systems. Die Gleichung (9) besagt demnach folgendes: Im Bildraum erhält man den Output durch Multiplikation des Inputs mit der Übertragungsfunktion.

Wir legen nun an den Klemmen A und B eine harmonisch modulierte Spannung der Frequenz $\omega_0 > 0$ an:

$$u(t) := u_0 \cos(\omega_0 t) . \quad (10)$$

Damit erhält (9) die spezielle Gestalt

$$I(s) = u_0 \frac{s^2}{(Ls^2 + Rs + 1/C)(s^2 + \omega_0^2)} .$$

Für die Rücktransformation müssen wir hier die rechte Seite in Partialbrüche zerlegen:

$$I(s) = u_0 \left(\frac{A}{s - i\omega_0} + \frac{\bar{A}}{s + i\omega_0} + \frac{B_1}{s - s_1} + \frac{B_2}{s - s_2} \right) ,$$

wobei

$$s_{1,2} := \frac{-R \pm \sqrt{R^2 - 4L/C}}{2L}$$

die beiden Pole der Übertragungsfunktion darstellen. Diese beiden Pole besitzen *negativen Realteil*. Nun haben wir ja die Korrespondenz

$$\frac{B_k}{s - s_k} \bullet \circ B_k e^{s_k t} ,$$

und das bedeutet, dass diese Terme im Zeitbereich exponentiell abklingen; sie sollen uns daher nicht weiter interessieren. Damit verbleibt die Bestimmung der Konstanten $A = \text{res}(I(s)/u_0 \mid i\omega_0)$. Mit Hilfe der Regel (4.13)(b) ergibt sich

$$A = \frac{s^2}{Ls^2 + Rs + 1/C} \Big|_{s=i\omega_0} \frac{1}{2i\omega_0} = \frac{1}{2 \left(Li\omega_0 + R + \frac{1}{C} \frac{1}{i\omega_0} \right)} .$$

Aus Symmetriegründen sieht daher die stationäre periodische Antwort des Systems auf die Anregung (10) im Zeitbereich folgendermassen aus:

$$i(t) = u_0 \operatorname{Re} \frac{e^{i\omega_0 t}}{\left(Li\omega_0 + R + \frac{1}{C} \frac{1}{i\omega_0} \right)} .$$

8.4 Die Übertragungsfunktion

Nachdem wir nun die wichtigsten Rechenregeln und auch ein paar Beispiele kennengelernt haben, wollen wir hier das Geschehene auch noch von einem grundsätzlicheren Standpunkt aus betrachten. Den Schlüssel dazu bildet die Gleichung (9) des vorangehenden Abschnitts:

$$I(s) = G(s) \cdot U(s) , \quad (1)$$

die unsere bisherigen Erfahrungen mit der Laplace-Transformation auf den Punkt bringt. Was ist der tiefere Grund für diese einfache Verknüpfung von Input U und Output I im Bildbereich?

Zu der Formel (1) kam es durch Anwendung der Regeln **(8.4)(f)–(g)**. Sie besagen, dass die Laplace-Transformation die Ableitungsoperation $D := d/dt$ im wesentlichen in die punktweise Multiplikationsoperation “mal s ” im Bildbereich überführt und entsprechend das Aufintegrieren D^{-1} in die punktweise Division durch s . Damit sind wir dem Geheimnis nähergerückt: D und D^{-1} sind letzten Endes *Faltungsoperationen*, und bezüglich der Faltung gibt es eben einen besonderen Satz. Dieser **Faltungssatz** besagt, dass die Laplace-Transformation das Faltungsprodukt

$$f * g(t) := \int_0^t f(t - \tau)g(\tau) d\tau = \int_0^t f(\tau)g(t - \tau) d\tau$$

von zwei Funktionen $f, g \in E$ in ein gewöhnliches Produkt verwandelt:

(8.6) Sind f und g in E mit $f(t) \circ\!\!\!\rightarrow F(s)$ und $g(t) \circ\!\!\!\rightarrow G(s)$, so ist auch das Faltungsprodukt $f * g$ in E , und es gilt

$$f * g(t) \circ\!\!\!\rightarrow F(s)G(s).$$

□ Es gibt ein $\alpha \in \mathbb{R}$ und ein $C > 0$ mit

$$|f(t)| \leq Ce^{\alpha t}, \quad |g(t)| \leq Ce^{\alpha t} \quad (t > 0).$$

Wähle ein $\alpha' > \alpha$. Für ein geeignetes $C' > 0$ gilt dann

$$\begin{aligned} |f * g(t)| &\leq \int_0^t |f(t-\tau)| |g(\tau)| d\tau \leq C^2 \int_0^t e^{\alpha(t-\tau)} e^{\alpha\tau} d\tau = C^2 t e^{\alpha t} \\ &\leq C' e^{\alpha' t} \quad (t > 0); \end{aligned}$$

somit ist $f * g \in E$. Wir berechnen nun die Laplace-Transformierte

$$\mathcal{L}(f * g)(s) = \int_0^\infty \left(\int_0^t f(\tau)g(t-\tau) d\tau \right) e^{-st} dt.$$

Hier ist die rechte Seite ein Doppelintegral über einen Sektor der (t, τ) -Ebene (Fig. 8.4.1). Vertauschung der Integrationsreihenfolge liefert

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f * g)(s) &= \int_0^\infty \left(\int_\tau^\infty f(\tau)g(t-\tau) e^{-st} dt \right) d\tau \\ &= \int_0^\infty f(\tau) e^{-s\tau} \left(\int_\tau^\infty g(t-\tau) e^{-s(t-\tau)} dt \right) d\tau = F(s)G(s), \end{aligned}$$

wie behauptet. ┘

① Als einfachstes Beispiel bietet sich die Aufintegration D^{-1} an: Ist $f \in E$, so gilt

$$D^{-1}f(t) := \int_0^t f(\tau) d\tau = \int_0^t H(t-\tau)f(\tau) d\tau = H * f(t),$$

wobei H die Heavisidesche Sprungfunktion bezeichnet. In Beispiel 8.1.② haben wir $\mathcal{L}H(s) = 1/s$ berechnet. Auf Grund des Faltungssatzes ist daher

$$\mathcal{L}(D^{-1}f)(s) = \frac{1}{s} F(s),$$

in Übereinstimmung mit Regel (8.4)(g). ○

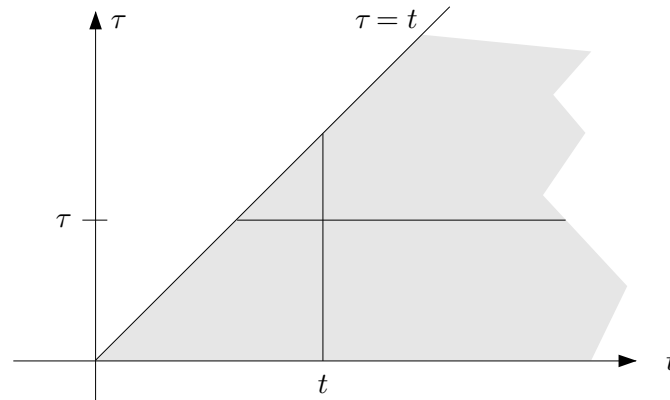


Fig. 8.4.1

② Wir benutzen den Faltungssatz, um die Laplace-Transformierte der Funktion $f(t) := \sqrt{t}$ zu bestimmen. Zunächst berechnen wir

$$f * f(t) = \int_0^t \sqrt{\tau(t-\tau)} d\tau = \int_{-t/2}^{t/2} \sqrt{\left(\frac{t}{2}\right)^2 - x^2} dx = \frac{\pi t^2}{8};$$

dabei haben wir von der Substitution

$$\tau := \frac{t}{2} + x \quad \left(-\frac{t}{2} \leq x \leq \frac{t}{2}\right)$$

Gebrauch gemacht und das entstehende Integral als Halbkreisfläche interpretiert. Auf Grund des Faltungssatzes und 8.1.(9) ist daher

$$F(s) \cdot F(s) = \frac{\pi}{8} \frac{2}{s^3} = \frac{\pi}{4s^3},$$

und wir erhalten die Korrespondenz

$$\sqrt{t} \circ \bullet \frac{\sqrt{\pi}}{2s^{3/2}}.$$

○

Gibt es in E auch ein Einselement q bezüglich der Faltung? Angenommen, es wäre z.B. $q * H = H$, so hätte man nach dem Faltungssatz $Q(s) \cdot (1/s) \equiv 1/s$, und das hiesse $Q(s) \equiv 1$, im Widerspruch zu (8.1). Es gibt demnach kein Evau q , das als Einselement bezüglich $*$ in Frage kommt. Es gibt hingegen

ein “ideales Objekt”, das wie ein Einselement wirkt und auch die Laplace-Transformierte $\equiv 1$ besitzt, nämlich den **Deltastoss**, der üblicher Weise mit δ bezeichnet wird. Dieses δ ist keine Funktion mehr, sondern eine sogenannte *Distribution*, anschaulich: eine an der Stelle $t = 0$ konzentrierte Einheitsmasse. Für die Zwecke der Laplace-Transformation lässt sich δ am einfachsten durch Rechteckspulse

$$q_\varepsilon(t) := \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} & (0 < t < \varepsilon) \\ 0 & (t > \varepsilon) \end{cases} \quad (\varepsilon \ll 1)$$

approximieren (Fig. 8.4.2). Die Laplace-Transformierte von q_ε berechnet sich auf Grund von 8.2.(2) zu

$$Q_\varepsilon(s) = \frac{1 - e^{-\varepsilon s}}{\varepsilon s};$$

damit ergibt sich in der Tat

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} Q_\varepsilon(s) \equiv 1 \quad (2)$$

wie angekündigt.

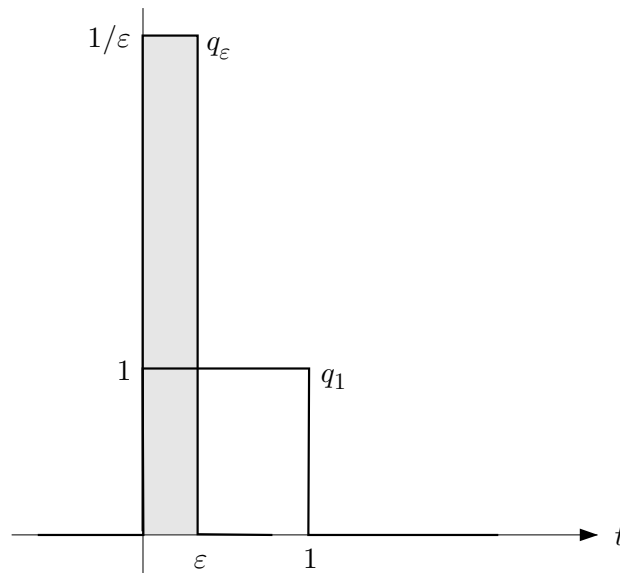


Fig. 8.4.2

Diese Überlegungen gestatten nun, die im vorangehenden Abschnitt rein formal eingeführte Übertragungsfunktion $G(s)$ mit anschaulichem Gehalt zu versehen:

(8.7) *Es sei das Anfangswertproblem*

$$\left. \begin{aligned} y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_0y &= f(t), \\ y^{(k)}(0) &= 0 \quad (0 \leq k \leq n-1) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

gegeben, und es sei

$$Y(s) = G(s)F(s) \quad (4)$$

dessen Lösung im Bildbereich. Dann konvergieren die zu den Anregungen $f(t) := q_\varepsilon(t)$ gehörenden Lösungen $y_\varepsilon(t)$ mit $\varepsilon \rightarrow 0$ gegen die zu $G(s)$ gehörige Originalfunktion $g(t)$.

In der Folge bezeichnet man die Originalfunktion $g(t)$ der Übertragungsfunktion $G(s)$ als **Stossantwort** des Systems.

□ Beweisen können wir **(8.7)** nur im Bildbereich, und da ist es ganz einfach: Ist $y_\varepsilon(t)$ die zur Anregung q_ε gehörige Lösung, so folgt aus (3) und (2):

$$Y_\varepsilon(s) = G(s) \cdot Q_\varepsilon(s) \rightarrow G(s) \cdot 1 \quad (\varepsilon \rightarrow 0) . \quad \lrcorner$$

Übersetzen wir die Gleichung (1) bzw. (4) mit Hilfe des Faltungssatzes in den Zeitbereich, so können wir folgendes Korollar von **(8.7)** formulieren:

(8.8) *Die zur beliebigen Anregung $f(t)$ gehörende Lösung $y(t)$ des Anfangswertproblems (3) wird erhalten, indem man die Stossantwort $g(t)$ des Systems mit der Anregung $f(t)$ faltet:*

$$y(t) = (g * f)(t) \quad (t > 0) .$$

Das ist nicht als eine weitere Lösungsmethode aufzufassen, sondern als eine bestimmte analytische Darstellung der exakten Lösung, die in gewissen Fällen weiterhelfen kann.

① Wir betrachten den ungedämpften harmonischen Oszillator

$$\ddot{y} + \omega^2 y = f(t), \quad y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = 0 . \quad (5)$$

In Abschnitt **8.3.1**, Fallbeispiel 3, haben wir die Stossantwort $y_0(t)$ eines Federpendels berechnet und 8.3.(5) erhalten. Damit ergibt sich als Stossantwort des hier betrachteten Oszillators die Funktion

$$g(t) = \frac{1}{\omega} \sin(\omega t) .$$

Satz **(8.8)** liefert daher folgende explizite Darstellung der Lösung von (5):

$$y(t) = \frac{1}{\omega} \int_0^t f(\tau) \sin(\omega(t - \tau)) d\tau \quad (t > 0) .$$

Diese Formel lässt sich folgendermassen interpretieren: Der Output $y(t)$ ist eine Superposition der Schwingungen

$$t \mapsto \frac{1}{\omega} \sin(\omega(t - \tau)) ,$$

die von den sämtlichen “infinitesimalen Stössen” $f(\tau) d\tau$ herrühren, die vor dem betrachteten Zeitpunkt t erfolgt sind. \bigcirc

Die Übertragungsfunktion ist ein äusserst handliches Werkzeug in der Regeltechnik und der Netzwerk-Analyse. Seinen Gebrauch lernt man am besten in den betreffenden Anwendungsgebieten. Wir weisen hier nur noch auf zwei Punkte hin:

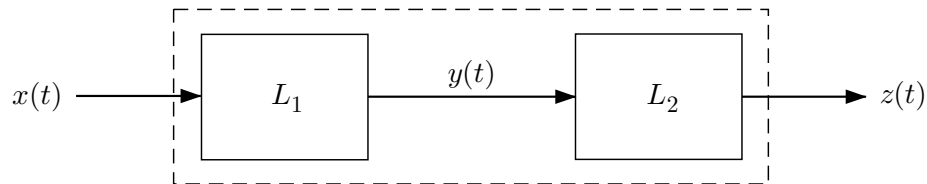


Fig. 8.4.3

1. Werden zwei Systeme L_1, L_2 von der Art, wie sie in Satz **(8.7)** betrachtet wurden, hintereinander geschaltet (Fig. 8.4.3), so ist der Output $y(t)$ des ersten Systems der Input des zweiten. Es resultiert ein Gesamtsystem mit $x(t)$ als Input und $z(t)$ als Output. Im Zeitbereich haben wir nach **(8.8)** die Faltungsgleichung

$$z(t) = g_2 * y(t) = g_2 * g_1 * x(t) \quad (t > 0) ,$$

die $z(t)$ als ein Doppelintegral darstellt. Im Bildbereich sieht dieselbe Sache aber viel einfacher aus:

$$Z(s) = G_2(s) G_1(s) X(s);$$

(Fig. 8.4.4), in Worten: *Beim Hintereinanderschalten zweier Systeme multiplizieren sich die Übertragungsfunktionen.* In ähnlicher Weise lassen sich auf kompliziertere Weise gekoppelte Systeme (z.B. eine Rückkopplung) im Bildbereich durch algebraische Gleichungen statt durch Faltungsgleichungen beschreiben.

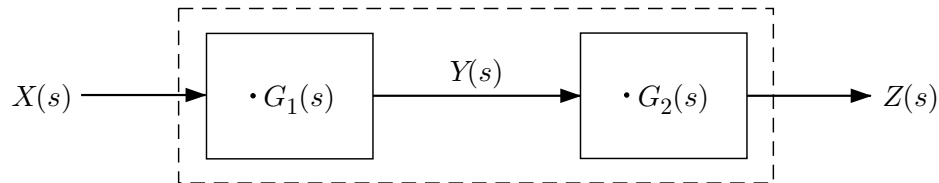


Fig. 8.4.4

2. In der Analysis I haben wir lineare Differentialgleichungen vom Typ

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = 0 \quad (6)$$

mit Hilfe des charakteristischen Polynoms

$$\text{chp}(\lambda) := \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0$$

behandelt. Für jede komplexe Nullstelle λ_j dieses Polynoms wurde eine Basislösung $t \mapsto e^{\lambda_j t}$ angesetzt; die allgemeine Lösung von (6) war dann gegeben durch

$$y(t) = \sum_{j=1}^n c_j e^{\lambda_j t}, \quad c_j \in \mathbb{C} \quad (1 \leq j \leq n), \quad (7)$$

den Fall mehrfacher Wurzeln einmal ausser Acht gelassen. Es ist leicht zu sehen, dass das charakteristische Polynom $\text{chp}(\lambda)$ mit der zu (3) gehörigen Übertragungsfunktion $G(s)$ verknüpft ist durch die Gleichung

$$G(s) = \frac{1}{\text{chp}(s)} \quad (s \in \mathbb{C}); \quad (8)$$

die Nullstellen λ_j des charakteristischen Polynoms sind also die Pole der Übertragungsfunktion.

Man wird das durch (3) bzw. (6) beschriebene System **stabil** nennen, wenn zufällig ausgewählte Anfangsbedingungen (oder ein zufälliger Stoss) nicht zu einer Katastrophe führen können, und das ist jedenfalls dann der Fall, wenn sämtliche Lösungen (7) mit $t \rightarrow \infty$ exponentiell abklingen. Das Kriterium hierfür ist, dass sämtliche Eigenwerte λ_j negativen Realteil haben; denn mit $\lambda = \mu + i\nu$ hat man

$$|e^{\lambda t}| = |e^{\mu t}(\cos(\nu t) + i \sin(\nu t))| = e^{\mu t} .$$

Aufgrund der Beziehung (8) zwischen $G(s)$ und $\text{chp}(\lambda)$ kommen wir damit zu dem folgenden Prinzip: *Das System (3) ist stabil, wenn sämtliche Pole λ_j der Übertragungsfunktion $G(s)$ in der linken Halbebene $\text{Re } s < 0$ liegen.* (Der Fall $\text{Re } \lambda_j = 0$ ist heikel und erfordert besondere Betrachtungen.)

8.5 Inversion

In diesem letzten Abschnitt beweisen wir den Satz von Lerch (8.2) und leiten dabei auch eine Umkehrformel für die Laplace-Transformation her. Wie bereits gesagt, stellt dieser Satz einen Grundpfeiler der Laplace-Doktrin dar. Er ist der mathematisch korrekte Ausdruck für die intuitive Idee, dass unter der Laplace-Transformation keine Information verloren geht, oder konkreter: die Garantie, dass ein System, das wir im Bildbereich vollständig beherrschen, auch im Zeitbereich in allen Stücken bestimmt ist und dass es grundsätzlich möglich sein sollte, eine explizite Beschreibung der resultierenden Abläufe im Zeitbereich herzustellen.

Wir beginnen mit der **komplexen Umkehrformel**, wobei wir uns auf die Fig. 8.5.1 beziehen:

(8.9) *Die Funktion $f \in E$ genüge den weiteren Bedingungen*

$$f'' \in E, \quad f(0+) = 0 ;$$

ferner sei $c > \alpha_{f''}$ und γ_c die von unten nach oben durchlaufene Vertikale $\text{Re } s = c$. Dann gilt

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_c} F(s) e^{st} ds \quad (t > 0) . \quad (1)$$

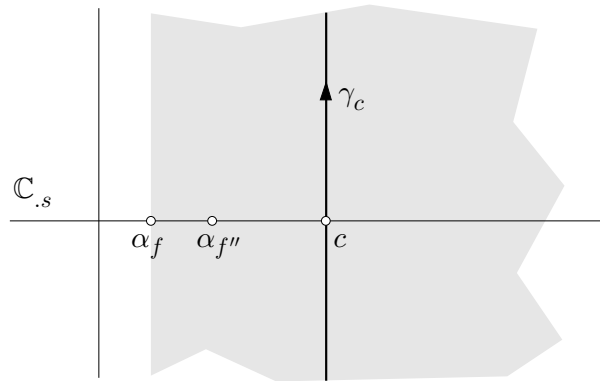


Fig. 8.5.1

□ Mit Hilfe der Parameterdarstellung

$$\gamma_c : \quad y \mapsto s(y) := c + iy \quad (-\infty < y < \infty)$$

schreibt sich die Behauptung (1) folgendermassen:

$$f(t) = \frac{e^{ct}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(c + iy) e^{iyt} dy \quad (t > 0). \quad (2)$$

Wir vergewissern uns zunächst, dass das Integral (2) überhaupt existiert: Nach Voraussetzung über f ist

$$\left| \int_0^{\infty} f''(t) e^{-(c+iy)t} dt \right| \leq \int_0^{\infty} |f''(t)| e^{-ct} dt =: M \quad (y \in \mathbb{R}). \quad (3)$$

Wegen $f(0+) = 0$ gilt nach Regel (8.5) die Beziehung

$$F(s) = \frac{1}{s^2} (\mathcal{L}f''(s) + f'(0+)),$$

so dass (3) die Abschätzung

$$|F(c + iy)| \leq \frac{1}{|c + iy|^2} (M + |f'(0+)|) \leq \frac{C}{|y|^2} \quad (|y| \gg 1)$$

nach sich zieht. Damit ist die Konvergenz von (2) garantiert.

Betrachte nun die Funktion

$$\phi(t) := \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ f(t)e^{-ct} & (t \geq 0) \end{cases}$$

Diese Funktion ist integrabel und besitzt die Fourier-Transformierte

$$\widehat{\phi}(y) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-(c+iy)t} dt = F(c+iy) \quad (y \in \mathbb{R}) .$$

Wir haben uns eben vergewissert, dass auch $y \mapsto F(c+iy)$ integrabel ist. Somit dürfen wir die Umkehrformel **(6.2)** anwenden und erhalten, da ϕ überall stetig ist:

$$\phi(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\phi}(y)e^{iyt} dy = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(c+iy)e^{iyt} dy \quad (t \in \mathbb{R}) .$$

Multipliziert man hier auf beiden Seiten mit e^{ct} , so folgt die Behauptung (2). ┘

Die Formel (1) besagt eigentlich schon, dass $f(t)$ durch seine Laplace-Transformierte $F(s)$ eindeutig bestimmt ist; allerdings waren da noch Zusatzbedingungen. Mit Hilfe eines einfachen Tricks können wir aber den Satz von Lerch auf **(8.9)** zurückführen. Hier noch einmal der Wortlaut:

(8.2) *Die Laplace-Transformation ist injektiv, das heisst: Sind f und g zwei verschiedene Evas, so sind auch ihre Laplace-Transformierten $\mathcal{L}f$ und $\mathcal{L}g$ verschieden.*

┐ Wir argumentieren über das Evas $f-g$, das wir wieder mit f bezeichnen. Die Behauptung lautet dann: Ist $f \in E$ mit $\mathcal{L}f = 0$, das heisst: $F(s) \equiv 0$, so ist $f(t) \equiv 0$.

Indem wir f zweimal von 0 aus aufintegrieren, erhalten wir eine Funktion g , die den Zusatzbedingungen in **(8.9)** genügt. Wir bilden also

$$g(t) := \int_0^t \left(\int_0^{\tau} f(\tau') d\tau' \right) d\tau = H * H * f(t)$$

mit der Laplace-Transformierten

$$G(s) = \frac{1}{s^2} F(s) \equiv 0 .$$

Wir wenden nun auf g den Satz **(8.9)** an und erhalten $g(t) \equiv 0$. Durch zweimaliges Differenzieren folgt hieraus $f(t) \equiv 0$, wie behauptet. ┘

Wir haben schon darauf hingewiesen, dass die Rücktransformation von konkreten Funktionstermen am einfachsten mit Hilfe einer Tabelle erfolgt. Trotzdem sollen hier noch zwei Methoden vorgestellt werden, mit deren Hilfe man in bestimmten Fällen die Originalfunktion mit Papier und Bleistift bestimmen kann.

Etwas Grundsätzliches vorweg: Ist $F(s)$ eine *rationale Funktion*:

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}, \quad P, Q \text{ Polynome,}$$

so ist es am einfachsten, eine Partialbruchzerlegung herzustellen. Für die Partialbrüche stehen dann die Korrespondenzen

$$\frac{1}{(s-a)^{n+1}} \longleftrightarrow \frac{t^n}{n!} e^{at} \quad (n \geq 0, a \in \mathbb{C})$$

zur Verfügung.

Ist $F(s)$ in einem Ringgebiet $|s| > R$ analytisch mit einer Laurent-Entwicklung der Form

$$F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{s^{n+1}} \quad (|s| > R),$$

so liefert gliedweise Rücktransformation dieser Reihe den folgenden Ausdruck:

$$g(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} t^n & (t > 0) \end{cases}. \quad (4)$$

Wir müssen uns davon überzeugen, dass tatsächlich $g \in E$ und $\mathcal{L}g = F$ ist.

Die a_n genügen von vorneherein einer Abschätzung der Form

$$|a_n| \leq C \rho^n$$

für ein geeignetes $\rho > 0$. Hieraus folgt leicht, dass die Potenzreihe (4) für alle $t \in \mathbb{C}$ konvergiert, und überdies, dass

$$|g(t)| \leq C e^{\rho t} \quad (t > 0) \quad (5)$$

ist. Die Reihe (4) stellt somit eine ganz-analytische Funktion dar, und zusammen mit (5) ergibt sich $g \in E$. Da schon die Partialsummen $s_N(t)$ der Abschätzung (5) genügen, ist es erlaubt, $\mathcal{L}g$ durch gliedweise Transformation

der Reihe (4) zu berechnen, und dabei kommt natürlich $\mathcal{L}g = F$ heraus. Alles in allem haben wir folgendes bewiesen:

(8.10) Ist $F(s)$ für $|s| > R$ analytisch mit einer Laurent-Entwicklung der Form

$$F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{s^{n+1}} \quad (|s| > R),$$

so besteht die Korrespondenz

$$F(s) \bullet \circ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} t^n.$$

① Es sei

$$F(s) := \frac{1}{\sqrt{1+s^2}} \quad (\operatorname{Re} s > 0),$$

wobei natürlich der für $s > 0$ positive Zweig gemeint ist. Wir können $F(s)$ auf die Form

$$F(s) = \frac{1}{s} \operatorname{pv} \left(1 + \frac{1}{s^2} \right)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} \frac{1}{s^{2n+1}}$$

bringen. Die Binomialreihe rechter Hand konvergiert für $|s| > 1$ und lässt sich daher als Laurent-Entwicklung von F auffassen. Die zu $F(s)$ gehörende Originalfunktion $f(t)$ ist somit nach **(8.10)** gegeben durch

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} \frac{t^{2n}}{(2n)!}.$$

Wegen

$$\binom{-1/2}{n} = \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2}) \cdots (-\frac{2n-1}{2})}{n!} = \frac{(-1)^n (2n)!}{2^{2n} (n!)^2}$$

erhalten wir damit definitiv

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n!)^2} \left(-\frac{t^2}{4} \right)^n,$$

eine ausserordentlich gut konvergente Reihe. Die hier erschienene Funktion f ist nicht elementar, tritt aber in den verschiedensten physikalischen und technischen Zusammenhängen auf. Es handelt sich um die sogenannte **Besselsche Funktion der Ordnung 0**; die übliche Bezeichnung dafür ist $J_0(t)$. \circ

(8.11) Unter den genannten Voraussetzungen über $f(t)$ und $F(s)$ gilt

$$f(t) = \sum_k \operatorname{res}(F(s) e^{ts} \mid s = a_k) \quad (t > 0) .$$

□ Die Umkehrformel (8.9) ist anwendbar. Nach dem Residuensatz, angewandt auf R_N , haben wir

$$\int_{\sigma_N} F(s) e^{ts} ds = 2\pi i \sum_{a_k \in R_N} \operatorname{res}(F(s) e^{ts} \mid s = a_k) - \int_{\partial' R_N} F(s) e^{ts} ds .$$

Mit $N \rightarrow \infty$ konvergiert hier die linke Seite nach (8.9) gegen

$$\int_{\gamma_c} F(s) e^{ts} ds = 2\pi i f(t) \quad (t > 0) .$$

Die Behauptung ist daher bewiesen, wenn wir zeigen können, dass für jedes feste $t > 0$ das folgende zutrifft:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\partial' R_N} F(s) e^{ts} ds = 0 . \quad (7)$$

Hierzu sind geeignete Abschätzungen notwendig, wobei wir uns weiterhin auf die Fig. 8.5.2 beziehen. Mit (6) ergibt sich

$$\left| \int_{\gamma_1} F(s) e^{ts} ds \right| \leq \frac{C}{r_N^p} \int_{-r_N}^c e^{ts} ds \leq \frac{C}{r_N^\beta} \frac{e^{tc}}{t} ,$$

und analog schliesst man für γ_3 . Für γ_2 erhalten wir mit (6) eine Abschätzung der Form

$$\left| \int_{\gamma_2} F(s) e^{ts} ds \right| \leq \frac{C}{r_N^\beta} 2r_N e^{-tr_N} .$$

Wegen $r_N \rightarrow \infty$ ist damit (7) bewiesen. ┘

② Wir betrachten gleich ein Beispiel mit unendlich vielen Polen, nämlich einen elektrischen Schwingkreis (vgl. 8.3.3), der mit Rechteckspulsen periodisch angeregt wird. Die konstituierende Gleichung lautet:

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau = g(t) - \frac{q_0}{C} ; \quad (8)$$

dabei sei die Anregung g gegeben durch 8.2.(3) mit $h := T/2$, $A := U_0$. Setzen wir $q_0 = 0$, $i(0+) = 0$ voraus, so ergibt sich durch Laplace-Transformation von (8) die Gleichung

$$\left(Ls + R + \frac{1}{C} \frac{1}{s}\right) I(s) = G(s) .$$

Die rechte Seite entnehmen wir 8.2.(4) und erhalten damit folgende Lösung von (8) im Bildbereich:

$$I(s) = \frac{1}{Ls + R + \frac{1}{C} \frac{1}{s}} \frac{1 - e^{-Ts/2}}{1 - e^{-Ts}} \frac{U_0}{s} = \frac{U_0}{Ls^2 + Rs + 1/C} \frac{1}{1 + e^{-Ts/2}} . \quad (9)$$

Die Bildfunktion $I(s)$ ist meromorph in ganz \mathbb{C} ; sie besitzt Pole in den beiden Nullstellen ζ_1, ζ_2 des Polynoms $Ls^2 + Rs + 1/C$ sowie in den Punkten

$$s_k := \frac{2k\pi i}{T} \quad (k \in \mathbb{Z}, \text{ ungerade}) . \quad (10)$$

Indem wir

$$r_N := \frac{4N\pi}{T} \quad (N \geq 1)$$

wählen, sorgen wir dafür, dass die Rechteckswege $\partial'R_N$ präzis zwischen den Polen s_k hindurchgehen: In den Punkten

$$s := s(\tau) := \tau \pm ir_N \quad (-r_N \leq \tau \leq c)$$

von γ_1 und γ_3 hat man die Abschätzung

$$e^{-Ts/2} = \exp\left(-\frac{T(\tau \pm 4N\pi i/T)}{2}\right) = e^{-T\tau/2} > 0 ,$$

und für die Punkte

$$s := s(\tau) := -r_N + i\tau \quad (-r_N \leq \tau \leq r_N)$$

auf γ_2 hat man

$$|e^{-Ts/2}| = e^{Tr_N/2} \gg 1 .$$

Alles in allem ziehen wir den Schluss, dass wir **(8.11)** auf die Bildfunktion (9) anwenden dürfen:

$$i(t) = \sum_{k=1}^2 \operatorname{res}(I(s)e^{ts} \mid s = \zeta_k) + \sum_{k \text{ ungerade}} \operatorname{res}(I(s)e^{ts} \mid s = s_k) \quad (t > 0) .$$

Da nun die beiden ζ_k negativen Realteil haben, erhalten wir von daher zwei mit $t \rightarrow \infty$ exponentiell abnehmende Terme, die wir nicht weiter verfolgen. Die Residuen in den Polen s_k berechnen sich nach Regel (4.13)(b) und (10) wie folgt:

$$\begin{aligned} \operatorname{res}(I(s)e^{ts} \mid s = s_k) &= \frac{U_0 e^{ts}}{Ls^2 + Rs + 1/C} \cdot \frac{-2}{Te^{-Ts/2}} \Big|_{s=s_k} \\ &= \frac{U_0 e^{2k\pi it/T}}{-\frac{4k^2\pi^2}{T^2}L + \frac{2k\pi i}{T}R + \frac{1}{C}} \cdot \frac{2}{T} \\ &= \frac{2U_0 T}{T^2/C - 4k^2\pi^2 L + 2k\pi RTi} e^{2k\pi it/T} . \end{aligned}$$

Damit erhalten wir schliesslich die stationäre periodische Lösung in Gestalt einer Fourier-Reihe zur Periode T :

$$i_{\text{stat}}(t) = \sum_{k \text{ ungerade}} c_k e^{2k\pi it/T}, \quad c_k := \frac{2U_0 T}{T^2/C - 4k^2\pi^2 L + 2k\pi RTi} .$$

Wegen $c_{-k} = \overline{c_k}$ ist die so dargestellte Funktion $t \mapsto i_{\text{stat}}(t)$ reellwertig, wie es sich gehört. Wir überlassen es dem Leser, sie in Cosinus- und Sinus-Terme aufzuschlüsseln. \bigcirc