In Dreiecken einbeschriebene Dreiecke

Christian Blatter

1 Die Dreieckskonfiguration $\mathcal{K}$ der Abb. 1 hat Anlass zu unzähligen geometrischen Ungleichungen gegeben; siehe dazu [1], [3] und [5]. Ein Beispiel ist die Ungleichung

$$F_0 \geq \min(F_1, F_2, F_3)\ , \tag{1}$$

wobei F_i den Flächeninhalt des Teildreiecks Δ_i bezeichnet. Gedruckt ist sie zum ersten Mal in dieser Zeitschrift erschienen, als Aufgabe von H. Debrunner [7]. In [8] und [6] werden sowohl (1) wie die analoge Ungleichung

$$U_0 \geq \min(U_1, U_2, U_3)$$

für die Umfänge U_i der Δ_i mit P. Erdös und E. Trost in Verbindung gebracht.

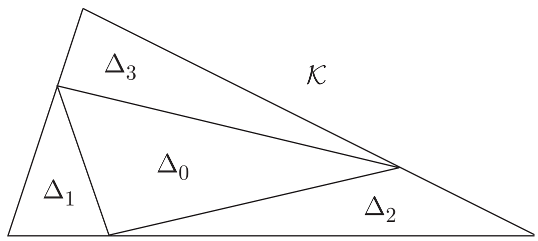

Abb. 1

Wie dem auch sei: In der jüngst erschienenen Arbeit [2] hat W. Janous die Ungleichung (1) zum Anlass genommen, um nach der besten Ungleichung vom Typ

$$F_0 \geq M_p(F_1, F_2, F_3) \tag{2}$$

zu fragen. Hier bezeichnet

$$M_p(x_1, \ldots, x_n) := \left(\frac{x_1^p + \ldots + x_n^p}{n}\right)^{1/p}\ , \qquad -\infty \leq p \leq \infty\ ,$$

das *p-Potenzmittel* der n positiven Zahlen x_i. Die Funktion $p \mapsto M_p(x_1, \ldots, x_n)$ ist (schwach) monoton wachsend. Für die speziellen Werte $p := -\infty$, 0 und ∞ liefert sie (via einen Grenzübergang) bzw. das Minimum, das geometrische Mittel und das Maximum der x_i. Auf Grund von (1) haben wir also

$$F_0 \geq M_{-\infty}(F_1, F_2, F_3)\ .$$

2 Janous beweist $F_0 \geq M_{-1}(F_1, F_2, F_3)$ (harmonisches Mittel) und zeigt durch ein Gegenbeispiel, dass (2) für $p > -\log(3/2)/\log 2$ nicht mehr allgemein richtig ist. Die "bestmögliche" Ungleichung von diesem Typ wäre also

$$F_0 \geq M_{-q}(F_1, F_2, F_3)\,, \qquad q := \frac{\log(3/2)}{\log 2} \doteq 0.58496\ . \tag{3}$$

Die Arbeit von Janous schliesst mit der Vermutung, dass (3) tatsächlich zutrifft. Diese Vermutung soll in der vorliegenden Note bewiesen werden.

Wir setzen zur Abkürzung $F_0/F_i =: x_i > 0 \ \ (i = 1, 2, 3)$. Die behauptete Ungleichung (3) ist dann äquivalent mit

$$x_1^q + x_2^q + x_3^q \geq 3\ . \tag{4}$$

3 Die "definitive" Ungleichung über die F_i stammt von J.F. Rigby [7]: *Die vier Zahlen $F_i \geq 0$ lassen sich genau dann als Teilflächen einer Konfiguration $\mathcal{K}$ auffassen, wenn*

$$F_0^3 + (F_1 + F_2 + F_3)F_0^2 - 4F_1F_2F_3 \geq 0 \tag{5}$$

ist, und zwar gilt das Gleichheitszeichen genau dann, wenn die drei Verbindungsgeraden von je zwei Gegenecken durch einen Punkt gehen.

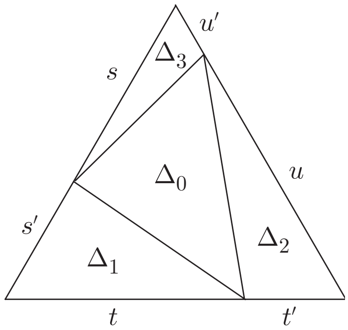

Abb. 2

Wir beweisen hier nur einen Teil des Satzes von Rigby, nämlich die Ungleichung (5) für erwiesene Teilflächen F_i. Dabei dürfen wir o.B.d.A. von einem gleichseitigen Dreieck Δ der Seitenlänge 1 ausgehen; sein Flächeninhalt beträgt $F = \sqrt{3}/4$. Mit den Bezeichnungen der Abb. 2 hat man

$$\begin{aligned} F_0 &= (1 - s't - t'u - u's)F \\ &= \big((s+s')(t+t')(u+u') - s't(u+u') - t'u(s+s') - u's(t+t')\big)F \\ &= (stu + s't'u')F \end{aligned}$$

und folglich

$$F_0^3 + (F_1 + F_2 + F_3)F_0^2 - 4F_1F_2F_3 = F_0^2F - 4F_1F_2F_3 = (stu - s't'u')^2F^3 \geq 0\,,$$

wie behauptet.

Wird (5) ebenfalls durch die Variablen $x_i := F_0/F_i$ ausgedrückt, so resultiert die äquivalente Bedingung

$$x_1x_2x_3 + x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 \geq 4 \ . \tag{6}$$

4 Damit stehen wir vor der folgenden Aufgabe: Wir müssen zeigen, dass unter der Nebenbedingung (6) die Ungleichung (4) gilt.

Offensichtlich genügt es, Tripel (x_1, x_2, x_3) der Form $x_1 \geq x_2 \geq x_3 =: y$ zu betrachten, für die in (6) das Gleichheitszeichen steht. Dann ist $0 < y \leq 1$, und man hat

$$(1 + y)x_1x_2 + y(x_1 + x_2) = 4 \ . \tag{7}$$

Wir halten $y \in \,]0, 1]$ zunächst fest und schreiben x_1, x_2 in der Form

$$x_1 := \frac{2}{1+y}\rho \, , \quad x_2 := \frac{2}{1+y}\sigma \, , \tag{8}$$

wobei ρ und σ nach (7) durch

$$\Bigl(\rho + \frac{y}{2}\Bigr)\Bigl(\sigma + \frac{y}{2}\Bigr) = \Bigl(1 + \frac{y}{2}\Bigr)^2 \tag{9}$$

miteinander verknüpft sind. Die Gleichung (9) definiert eine Hyperbel in der (ρ, σ)-Ebene. Wegen $x_1 \geq x_2 \geq y > 0$ genügt es, den in (1,1) beginnenden und im Punkt (ρ_1, σ_1), $\sigma_1 = \frac{y}{2}(1 + y)$, endenden Hyperbelbogen γ zu betrachten. Es sei daher

$$t \mapsto \bigl(\rho(t), \sigma(t)\bigr) \qquad (0 \leq t \leq 1)$$

eine Parameterdarstellung von γ, wobei

$$\rho'(t) > 0 \, , \quad \rho(t) \geq \sigma(t) \geq \sigma_1 := \frac{y}{2}(1 + y) \qquad (0 \leq t \leq 1)$$

zugrundegelegt wird. Aus (9) folgt

$$\rho'\Bigl(\sigma + \frac{y}{2}\Bigr) + \sigma'\Bigl(\rho + \frac{y}{2}\Bigr) = 0 \, ,$$

und damit ergibt sich

$$\frac{d}{dt}(\rho^q + \sigma^q) = q(\rho^{q-1}\rho' + \sigma^{q-1}\sigma') = \frac{q\rho'}{\rho + y/2}\Bigl(\rho^{q-1}\Bigl(\rho + \frac{y}{2}\Bigr) - \sigma^{q-1}\Bigl(\sigma + \frac{y}{2}\Bigr)\Bigr) \ .$$

Die Funktion $\phi(\tau) := \tau^{q-1}\bigl(\tau + \frac{y}{2}\bigr)$ ist im Intervall $\sigma_1 \leq \tau \leq \rho_1$ monoton wachsend, denn dort gilt

$$\phi'(\tau) = \tau^{q-2}\Bigl(q\tau + (q-1)\frac{y}{2}\Bigr) \geq \tau^{q-2}\,\frac{y}{2}\bigl(q(2 + y) - 1\bigr) \geq 0 \ .$$

Dies beweist

$$\frac{d}{dt}(\rho^q + \sigma^q) = \frac{q\rho'}{\rho + y/2}\bigl(\phi(\rho) - \phi(\sigma)\bigr) \geq 0 \, ,$$

woraus wir den Schluss

$$\rho^q(t) + \sigma^q(t) \geq \rho^q(0) + \sigma^q(0) = 2 \qquad (0 \leq t \leq 1)$$

ziehen dürfen. Mit (8) folgt daher: Ist $x_3 := y$ das kleinste der drei x_i, so gilt

$$x_1^q + x_2^q + x_3^q \geq 2\Big(\frac{2}{1+y}\Big)^q + y^q \qquad (0 < y \leq 1)\ .$$

5 Damit verbleibt zu beweisen, dass die Funktion

$$f(y) := 2\Big(\frac{2}{1+y}\Big)^q + y^q - 3 = 3(1+y)^{-q} + y^q - 3$$

für $0 < y \leq 1$ nichtnegativ ist. Der spezielle Wert von q (es ist $2^q = 3/2$) hat $f(0) = f(1) = 0$ zur Folge, mit verschiedener Qualität der zwei Nullstellen, weshalb wir anstelle von f die Funktion

$$g(y) := y^{-q} f(y) = 1 + 3y^{-q}\big((1+y)^{-q} - 1\big)$$

betrachten. Man berechnet

$$\begin{aligned} g'(y) &= -3qy^{-q-1}\big((1+y)^{-q} - 1\big) - 3qy^{-q}(1+y)^{-q-1} \\ &= 3qy^{-q-1}(1+y)^{-q-1}\big((1+y)^{q+1} - (1+2y)\big)\ . \end{aligned}$$

Die Funktion $\psi(y) := (1+y)^{q+1} - (1+2y)$ ist konvex und verschwindet wegen des speziellen Wertes von q bei $y = 0$ und $y = 1$. Hieraus folgt $\psi(y) \leq 0$ $(0 < y \leq 1)$ und damit $g'(y) \leq 0$ $(0 < y \leq 1)$. Wegen $g(1) = 0$ zieht dies $g(y) \geq 0$ $(0 < y \leq 1)$ und schliesslich $f(y) \geq 0$ $(0 < y \leq 1)$ nach sich. $\square$

Literatur

[1] Bottema, O. et al.: *Geometric inequalities.* Wolters and Noordhoff, Groningen 1969.

[2] Janous, W.: A short note on the Erdös-Debrunner inequality. *Elem. Math.* 61 (2006), 32–35.

[3] Mitrinović, D.S. et al.: *Recent advances in geometric inequalities.* Kluver Acad. Publ., Dordrecht 1989.

[4] Rigby, J.F.: Inequalities concerning the areas obtained when one triangle is inscribed in another. *Math. Magazine* 45 (1972), 113–116.

[5] Schütz, C.: Ein Extremalproblem für einbeschriebene Dreiecke. *Elem. Math.* 61 (2006), 155–172.

[6] Szekeres, E.: Einfache Beweise zweier Dreieckssätze. *Elem. Math.* 22 (1967), 17–18.

[7] Aufgabe 260. *Elem. Math.* 11 (1956), 20.

[8] Solution to problem 4908. *Amer. Math. Monthly* 68 (1961), 386–387.

Christian Blatter
Albertus-Walder-Weg 16
CH-8606 Greifensee
Schweiz
e-mail: `christian.blatter@math.ethz.ch`