ИНВАРИЈАНТЕ ЧВОРОВА

И КОНФИГУРАЦИОНИ ПРОСТОРИ

~ БЕОГРАД, ДЕЦ. 2018. ~

Даница Косановић

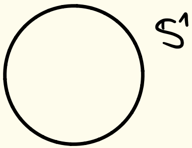
Max-Planck Institut für Mathematics, Bonn

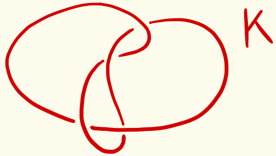
danica@mpim-bonn.mpg.de

Циљ:

разумети просторе утапања

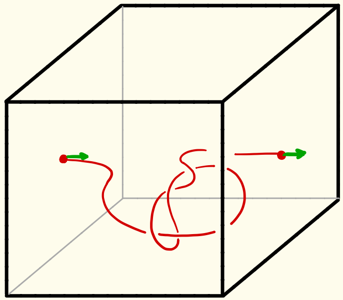
$\mathrm{Emb}(S^1, S^3)$





односно:

$\mathrm{Emb}_\partial(\mathbb{I}, \mathbb{I}^3)$



Алати:

конфигурациони простори и операде (Goodwillie-Weiss calculus)

§1 ОПЕРАДЕ

пример. X скуп или тополошки простор или векторски простор (или објекат неке симетричне моноидалне категорије)

$$\mathrm{Map}(\underbrace{X\times\cdots\times X}_{n}, X) \ni f(x_1 \dots x_n)$$

дефинишемо (делимичне) композиције:

$$\circ_i : \mathrm{Map}(X^n, X) \times \mathrm{Map}(X^m, X) \longrightarrow \mathrm{Map}(X^{n+m-1}, X)$$

$$f \circ_i g : X^{n+m-1} \longrightarrow X$$

$$(x_1 \dots x_i \dots x_{i+m-1} \dots x_{n+m-1}) \longmapsto f(x_1, \dots x_{i-1}, g(x_i, \dots x_{i+m-1}), x_{i+m}, \dots x_{n+m-1})$$

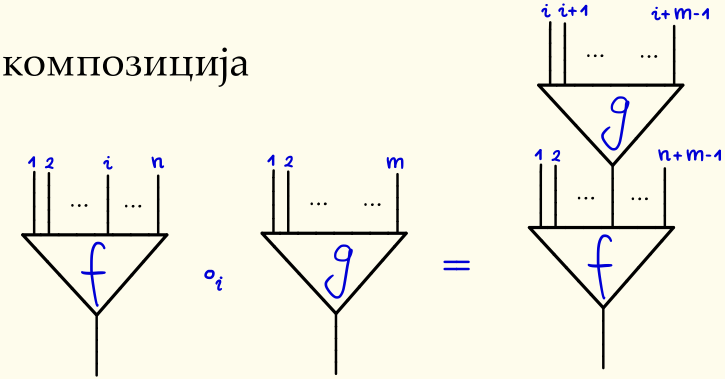
оне задовољавају аксиоме асоцијативности и идентитета:

$$(f \circ_i g) \circ_{i+j} h = f \circ_i (g \circ_j h)$$

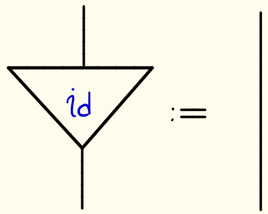
$$f \circ_i id = f$$

графички приказ:

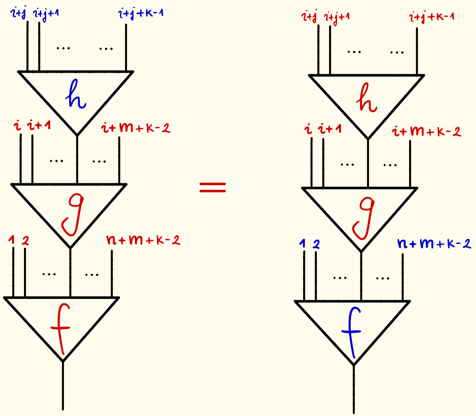
композиција

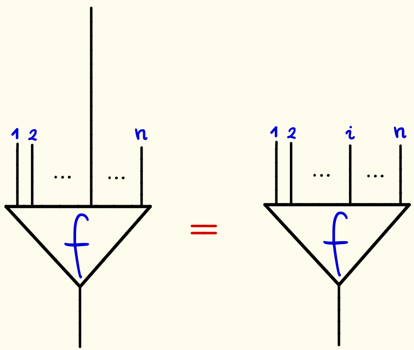


идентитет



аксиоме



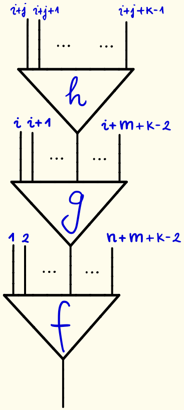


Дефиниција. (Несиметричну) операду O у симетричној моноидалној категорији $(\mathcal{C}, \times, \mathbb{1})$ чине:

- низ објеката $O(n)$ те категорије
- истакнути елемент $\mathrm{id} : \mathbb{1} \longrightarrow O(1)$ $\quad (\mathrm{id} \in O(1))$
- делимичне композиције:

$$\circ_i : O(n) \times O(m) \longrightarrow O(n+m-1), \quad 1 \leqslant i \leqslant n$$

које задовољавају аксиоме асоцијативности и идентитета.



примери.

1) операда ендоморфизама.

$X \in \mathcal{C} \Rightarrow$ Колекција $\mathcal{O}(n) := X^{\times n}$ има структуру операде:

2) операда малих коцки /
ФМ операда (Fulton-MacPherson) /
Контсевич-Синхина операда (Kontsevich-Sinha).

§2 Контсевич-Синхина операда

$$\mathrm{Conf}_n(\mathbb{R}^3) := \left\{ (x_1 \ldots x_n) \in (\mathbb{R}^3)^n : \quad x_i \neq x_j \quad \forall i \neq j \right\}$$

$$\widetilde{\mathrm{Conf}_n}(\mathbb{R}^3) := \mathrm{Conf}_n(\mathbb{R}^3) \big/ \mathbb{R} \rtimes \mathbb{R}^3 \quad \leftsquigarrow$$

дејство транслацијама и дилатацијама на све тачке истовремено.

$K(n) :=$ затворење слике Гаусовог пресликавања:

$$g : \widetilde{\mathrm{Conf}_n}(\mathbb{R}^3) \longrightarrow (S^2)^{\binom{n}{2}}$$

$$(x_1 \ldots x_n) \longmapsto \left(\frac{x_i - x_j}{|x_i - x_j|} \right)_{i<j}$$

Тврђење. $\{K(n)\}_{n \geq 1}$ имају структуру операде задату са:

$\mathbf{x} \circ_i \mathbf{y} :=$ „убаци тачке конф. $\mathbf{y}$ уместо i-те тачке у конф. $\mathbf{x}$"

штавише:

косимпл.
индексирајућа
категорија

$K(n)$ формирају такозвану мултипликативну операду,
од које је могуће направити косимплицијални простор.

$$K^\bullet : \Delta \longrightarrow Top_*$$

Дуално геометријској реализацији симплицијалног простора
имамо (делимичну) тотализацију косимплицијалног простора:

$$\widetilde{Tot}_n(K^\bullet) \in Top_*$$

Теорема (Goodwillie-Weiss 1999, Sinha 2006)

Постоји низ простора и пресликавања:

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d] \\
 & \widetilde{Tot}_n(K^\bullet) \arrow[d] \\
 & \vdots \arrow[d] \\
Emb_\partial(\mathbb{I}, \mathbb{I}^3) \arrow[uur, "ev_n"] \arrow[r, "ev_1"] & \widetilde{Tot}_1(K^\bullet)
\end{tikzcd}$$

Последица.

$\pi_0(ev_n)$ је низ инваријанти чворова коначног типа (Васиљева).

Отворени проблем.

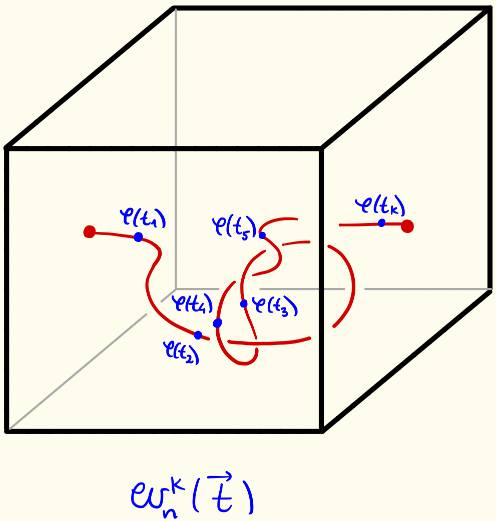
$\pi_0(ev_n)$ је сурјективно.

идеја дефиниције евалуације $ev_n(\varphi) \in \widetilde{\mathrm{Tot}}_n(K^\bullet)$ за $\varphi \in \mathrm{Emb}_\partial(\mathbb{I}, \mathbb{I}^3)$.

дата је колекцијом:

$$\left\{ ev_n^k : \underset{\substack{\cup \\ \vec t}}{\Delta^k} \longrightarrow \underset{\substack{\| \\ K(k)}}{K^k} \; : \; \forall k \le n \right\}$$

$$\vec t = (0 \le t_1 \le t_2 \le \dots \le t_k \le 1) \longmapsto$$



Хвала на пажњи!

Даница Косановић
Max-Planck Institut für Mathematics, Bonn
danica@mpim-bonn.mpg.de