Existenz und Negation in Mathematik und Logik

E. Engeler, ETH Zürich

1. Was gibt es?

Es soll heute die Rede sein von Logik und Mathematik, und von den Antworten, welche diese Wissenschaften zur Frage: *Was gibt es, was gibt es nicht*? anzubieten haben.

Die Mathematiker, sagt Goethe, sind so eine Art Franzosen: sie übersetzen alles in ihre Sprache und dann ist es sofort etwas ganz anderes. Ob mit den Grundfragen der Ontologie im heutigen Vortrag dasselbe geschehen wird will ich Ihrem Urteil überlassen. Von einem aber bin ich überzeugt, nämlich dass die Mathematik reich ist an Grenzerfahrungen der Existenz und darüber auch etwas mitzuteilen hat.

Die Frage nach der Existenz oder Nichtexistenz eines bestimmten Dinges stellt sich besonders dann, wenn ein vertrauter Gegenstandsbereich erweitert, wenn eine Grenze die beschwerlich geworden ist, überschritten werden soll; also dann wenn innerhalb des bisherigen Rahmens Nicht-Existentes neu einbezogen werden muss. Die Mathematik ist voll von dieserart durch Negation eingeführten Begriffen: jeder mit einer äusserst interessanten Entdeckungs- und Wirkungsgeschichte. Ein paar Beispiele mögen das illustrieren:

un–endliche Mengen,

un–lösbare Probleme,

nicht–archimedische Grössensysteme,

nicht–euklidische Geometrien

non–standard Analysis

nicht–kommutative Algebren, etc.

Diese Gegenstände hier zur Illustration meines Themas zu verwenden würde entschieden zu weit führen. Die Frage nach dem Wo und Wie der Existenz negativ definierter Dinge und deren Rezeption lässt sich aber schon in einem nähergelegenen Bereich, nämlich den Zahlen, ideengeschichtlich verfolgen. Dies gibt, finde ich, einen reizvollen und instruktiven Modellfall. Die Geschichte beginnt mit den irrationalen, führt zu den negativen, den imaginären, den transzendenten, den unendlichen und schliesslich zu den unerreichbaren Zahlen. Jedesmal stellt sich die Frage des heutigen Themas: Wo und wie existieren diese Zahlen, d.h. in welchen Bereich tritt man jeweils mit der Grenzüberschreitung durch die Negation? Und kann man immer so weiterschreiten, oder wann nicht?

2. Schmerzhafte Grenzüberschreitungen

Die Geschichte der Entwicklung der Zahlsysteme ist schon oft und kompetent erzählt worden. Sie beginnt mit den historischen Wurzeln der Arithmetik, mit der antiken Tradition, die ich so lese: Gegenstände der Mathematik sind die natürlichen Zahlen (≥ 1) welche, wie Grundfiguren der Geometrie, durch unwidersprochene Abstraktion aus der Anschauung und Handhabung gewonnen wurden. Es sind demgemäss Zahlen, die Grössen messen und vergleichen, also positive Zahlen. Daran, und das ist für das Folgende zentral, haben "die alten Griechen" den Begriff des mathematischen Beweises und damit den strengen Umgang mit idealen Gegenständen begründet.

a) Die Historiker sind sich nicht einig darüber, ob die erste entdeckte irrationale Zahl $\sqrt{5}$ (aus den Verhältniszahlen eingeschriebener Pentagramme, der heiligen Figur der Pythagoreäer) oder $\sqrt{2}$ war. Auch ist das Datum, 5. oder 4. Jahrhundert nicht über alle Zweifel gesichert. Am ehesten scheint die Entdeckung Hippasus im 5. Jh., zuzuschreiben zu sein ([v.F.]; mit ihm übereinstimmend [v.d.W], skeptisch [Bourbaki]). Auf jeden Fall aber war die weltanschauliche Wirkung der Entdeckung auf die Mathematiker, wie Plato im Theaitet bezeugt, gross. Warum? Weil sie eben Mathematiker waren, also exakte und nicht approximative Vorstellungen hatten, deduktiv und nicht in Bildern und Analogien dachten; unbestechlich auch unbequeme Ergebnisse hinnahmen.

Selbstverständlich ist es für den praktischen Gebrauch der Zahlen völlig irrelevant, dass man $\sqrt{2}$ nicht absolut genau sondern nur approximativ durch Brüche, rationale Zahlen, darstellen, benennen kann. Den pythagoräischen Philosophen aber war die Existenz von *alogoi* so etwas wie eine weltanschauliche Katastrophe, denn die pythagoräische Ontologie fusste auf dem Prinzip, dass "alles Zahl sei". Den *mathematicoi* aber war sie eine Herausforderung ersten Ranges, welche sie, Eudoxus insbesondere, zur bewundernswerten Schöpfung der Theorie beliebiger Grössenverhältnisse führte, und damit zu den ersten Vorboten einer Theorie derjenigen Zahlen, die – aus noch zu kommentierendem Grunde – später "reell" genannt werden sollten. Das Vertrauen in die Existenz dieser nicht-rationalen Zahlen schöpfte sich also erst einmal aus dem vertrauten Umgang mit geometrischen Objekten. Doch trat diesem zur Seite ein rechnerischer, arithmetischer Umgang, und zwar nicht nur durch approximatives Rechnen, sondern man rechnete – vergleiche z.B. das X. Buch Euklids [Eukl. bes. X 54-59 und 91-96] – mit Wurzelausdrücken, z.B.

$$\sqrt{\sqrt{p}+\sqrt{q}} = \sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{p}+\sqrt{p-q})} + \sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{p}-\sqrt{p-q})}$$

(in unserer, und nicht in der "geometrischen" Schreibweise Euklids). Die Darstellung von Grössen durch (Quadrat-) Wurzelausdrücke ist übrigens engstens mit der Frage nach der Konstuierbarkeit mit Hilfe von Zirkel und Lineal verknüpft. Konstruierbar sind genau die Grössen die sich durch Quadratwurzelausdrücke darstellen lassen. Diese, "platonische", Problemstellung enstand gerade zu jener Zeit und war offenbar hoch aktuell: Dreiteilung des Winkels, Quadratur des Kreises und (man rechnete auch mit dritten Wurzeln) Verdoppelung des Würfels.

(b) Die Einführung der Null und der negativen Zahlen durch die Inder und der rationalen Exponenten in Hochmittelalter (Nicole Oresme) sind weitere wichtige Episoden in der Entwicklungsgeschichte des Zahlbegriffs.

(c) Im Europa der Renaissance erhielt die auf verschiedenen Wegen aus Arabien und Persien rückgewanderte (und bereicherte) Mathematik durch eine konkrete Fragestellung neuen Reiz und erreichte bald eine neue Blütezeit. Es war dies die Frage nach Lösungsformeln für algebraische Gleichungen. Diese Formeln mussten, nach der oben erwähnten Tradition des exakten Rechnens, selbstverständlich die Form von Wurzelausdrücken haben. Das ist problemlos, und war es schon früher, für quadratische Gleichungen, nicht aber für kubische. Durch Substitution lassen sich diese immer in die Form

$$x^3 + p \cdot x = q$$

bringen. Für $p, q > 0$ fand als erster Scipione de Ferro eine Lösungsformel. Gerolamo Cardano konnte die Einschränkung entfernen, allerdings zu einem Preis der ihm hoch schien, wie wir sehen werden:

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + w} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - w}$$

$$w = \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{2}\right)^3}$$

Zwar war er, mehr als andere Mathematiker seiner Generation, gewillt, negative Zahlen zuzulassen. Was aber, wenn unter dem Wurzelzeichen von w eine negative Zahl steht? Die Schwierigkeiten damit illustriert Cardano [Cardano, Kap. 37] am Beispiel $x+y = 10, x \cdot y = 40$, für das er als Lösung vorschlägt (unsere Schreibweise): $x = 5+\sqrt{-15}, y = 5-\sqrt{-15}$. Dazu sagt er: "Wenn man von den geistigen Torturen absieht die dabei anfallen, und $5+\sqrt{-15}$ mit $5-\sqrt{-15}$ multipliziert, so erhält man $25-(-15)$, also 40. Das ist wahrlich sophistisch".

Weniger als dreissig Jahre später aber war das Rechnen mit solchen sophistischen Zahlen in den Händen von Rafael Bombelli möglich geworden; sie wurden ein Teil der Arithmetik. Für $x^3 = 15x + 4$ schlägt die Cardanische Formel vor $x = \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}$ und Bombelli kann, genau so wie wir heute mit komplexen Zahlen rechnen würden, bestimmen $\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} = 2+\sqrt{-1}$, $\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}} = 2-\sqrt{-1}$, also $x = 4$.

Erst dieses Rechnen, meine ich, machte die "sophistischen" Zahlen zu akzeptablen Gegenständen der Mathematik, akzeptabel nicht in einem Sinne von abstrakter Existenz, sondern nach einem apokryphen Ausspruch: *Allez en avant et la foi vous viendra.*

Im Unterschied zum Arithmetiker, wird aber ein Mathematiker von diesem Ratschlag nicht überzeugt, sondern eher abgestossen sein. Was zählt ist nicht das sogenannte Vertrauen sondern das saubere konzeptionelle Denken und das strikte Beweisen. Für Simon Stevin, Euler und Gauss war der konzeptionelle Rahmen für den erweiterten Zahlbereich ein geometrisches Substrat. Dieses schien durch Bezug auf die euklidisch-eudoxische Tradition, also auf die geometrisch abgestützte Grössenlehre, der mathematischen Strenge Genüge zu tun. Simon Stevin formulierte den Rückzug auf die Grössenlehre des Eudoxos-Euklid als erster ganz deutlich: *Nombre est cela, par lequel s'éxplique la quantité de chacune chose* und schliesst: *Nous concluons doncques qu'il n'y a aucuns nombres absurds, irrationals, irreguliers, inexplicables ou sourds; mais qu'il y a en eux telle excellence, et concordance, que nous avons matière de mediter nuict et jour en leur admirable parfection.* [Stevin, p. 10].

So war es selbstverständlich, dass die komplexen Zahlen als Punkte aufzufassen seien. Demnach ist also aus den Zahl $a + ib$ ein Paar von Punkten a und b auf der Zahlgeraden und damit ein Punkt in der euklidischen Ebene, m.a.W. der Gausschen Zahlenebene geworden.

(d) Die formal naheliegende Verallgemeinerung von komplexen Zahlen $a + ib$ zu Objekten $a + i \cdot b + j \cdot c$ und $a + i \cdot b + j \cdot c + k \cdot d$, wieder mit Punkten im drei- bzw. vierdimensionalen Raum liegt nahe, besonders nachdem sich gezeigt hatte, dass der zweidimensionale Fall der Analysis so ungeheuer viel gebracht hatte. Doch möchte man im gleichen Sinne, d.h. mit den formal genau gleichen Rechengesetzen weiterrechnen können, so wie es bei den bisherigen Erweiterungen geschah, man nannte das *Permanenz der Gesetze*. Hamilton hat es im Dreidimensionalen versucht; wie er schreibt, kam er jeden Morgen zum Frühstück und wurde gefragt: Kannst Du jetzt Tripel multiplizieren? Natürlich konnte er es nicht: Wir wissen heute, dass es Algebren nur in den Dimensionen 1, 2, 4 und 8 gibt. Die von vier Dimensionen, die Quaternionen hat er selbst noch entdeckt, der Ort wo ihm der Einfall kam ist sogar bekannt, [Dimitrić and Goldsmith]. Es war auf einer Brücke, symbolisch für die Art der Grenzüberschreitungen von denen wir hier sprechen. (Eine Photo davon befindet sich im Mathematical Intelligencer, vol. 11, no. 2, p. 30.)

(e) Wie befriedigend aber ist der existentielle Rückverweis auf das geometrische Substrat? Und wieviel weiter in den Erweiterungsmöglichkeiten ist er tragfähig? Gehen wir zurück zu den komplexen algebraischen Zahlen, eingeführt als Lösungen für algebraische Gleichungen:

$$a_n \cdot x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 = 0$$

mit ganzzahligen Koeffizienten a_i. Die Frage, welche durch Gaussens Fundamentalsatz positiv beantwortet wird:

$$\forall a_0 \dots a_n \exists ? x (a_n x^n + \dots + a_0 = 0),$$

müsste eigentlich gestellt werden:

$$\exists ? \text{ Zahlbereich } \exists ? \text{ Addition, Mult (Add., Mult. erfüllen Gesetze,}$$

$$\text{und } \forall a_0 \dots \exists x (a_n x^n + \dots + a_0 = 0)).$$

Dies ist der Standpunkt von Richard Dedekind. Er führte für die Kombination Zahlbereich, zugehörigen Operationen und Rechengesetze den Begriff des Körpers ein. Ein Körper ist also zuerst einmal eine Menge; also nicht mehr wie bisher etwas das der Geometrie immanent ist. Was ist aber eine Menge, was ist die Mengenlehre und wo liegt nun deren existentielle Basis?
Der grosse Gegenspieler Dedekinds war Kronecker. Er traute existentiellen Rück- und Vorwärtsverweisen nicht. Für ihn existierten nur die Zahlen – nicht in ihrer Gesamtheit, sondern einzeln, nur mit diesen ist zu rechnen – "alles andere ist Menschenwerk" (vgl. dazu [Bernays], Platonismus in der Mathematik). Die algebraischen Zahlen existieren nun aber auch wirklich in diesem eingeschränkten, ein Philosoph könnte sagen, nominalistischen, Sinne. Eine algebraische Zahl besteht aus den für ihre Bestimmung ausreichenden Angaben, also z.B.

$$\sqrt{5} \quad \text{ist} \quad \left\{ \frac{3}{2} < x < 2, x^2 - 5 = 0 \right\}$$

Das Rechnen mit algebraischen Zahlen geschieht demnach mit Objekten die sie darstellen, eben als rationale Ungleichung plus Polynom. So wird es auch heute in der Computer-Algebra gemacht. Seit Collins und Loos [Collins] dies ausprogrammiert hatten, finden sich entsprechende Algorithmen in allen gängigen Computer-Algebra-Systemen, von Maple bis Mathematica.
Mit der Gegenüberstellung des Dedekindschen (platonischen) und Kroneckerschen (konstruktuvistischen) Standpunktes, also vor etwa 100 Jahren, verlassen wir für's Erste einmal die Geschichte der Erweiterung des Zahlbegriffes.

3. Ueberforderte Logik

Wir bleiben aber bei Dedekind. In seinem berühmten Büchlein "Was sind und was sollen die Zahlen" (1888), stellt er sein Vorgehen unter die Devise: "Was beweisbar ist, soll in der Wissenschaft nicht ohne Beweis geglaubt werden" [Dedekind, S. 3]. Kann man die Existenz der Menge der natürlichen Zahlen beweisen? Dafür bietet er folgende überlegung an:

66. Satz. Es gibt unendliche Systeme.

Beweis. Meine Gedankenwelt, d.h. die Gesamtheit S aller Dinge, welche Gegenstand meines Denkens sein können, ist unendlich. Denn wenn s ein Element von S bedeutet, so ist der Gedanke s', dass s Gegenstand meines Denkens sein kann, selbst ein Element von S. Sieht man dasselbe als Bild $\varphi(s)$ des Elementes s an, so hat daher die hierdurch bestimmte Abbildung φ von S die Eigenschaft, dass das Bild S' Teil von S ist; und zwar ist S' echter Teil von S, weil es in S Elemente gibt (z.B. mein eigenes Ich), welche von jedem solchen Gedanken s' verschieden und deshalb nicht in S' enthalten sind. Endlich leuchtet ein, dass, wenn a, b verschiedene Elemente von S sind, auch ihre Bilder a', b' verschieden sind, dass also die Abbildung φ eine deutliche (ähnliche) ist. Mithin ist S unendlich, w.z.b.w.

Die Bezüge zu Descartes "cogito ergo sum" und Bolzanos "Paradoxien des Unendlichen" (1851) sind offensichtlich, aber es geschieht hier etwas viel fundamentaleres: Mit der Anrufung der Gesamtheit der Gegenstände des Denkens begibt sich Dedekind nämlich in die philosophische Logik und sucht darin letzten existentiellen Halt. Über die Möglichkeiten und Grenzen einer solchen Begründung der Mathematik auf der Logik haben in der Nachfolge Dedekinds viele Mathematiker nachgedacht, vorallem aber Frege und Russell. Doch davon später. Unser erstes Ziel soll sein, das Prinzip einer solchen *Rückführung mathematischer Gegenstände auf das Denken an sich* mit Hilfe kontemporärer technischer und konzeptioneller Hilfsmittel möglichst sauber herauszustellen.

(a) Die Logik beansprucht als ihren Anwendungsbereich alle Dinge die Gegenstand des Denkens sein können. Zu diesen Dingen gehören seit Aristoteles auch die sogenannten Universalien, auf deutsch Allgemeinbegriffe: Unter einem Allgemeinbegriff versteht der Stagirit etwas, das seiner Natur nach von vielen Dingen ausgesagt werden kann, unter einen Individualbegriff etwas das nicht so ausgesagt werden kann ([Aristoteles], De interpretatione 17^a, 37-39). Demnach ist "Weisheit" ein Universalbegriff, "Sokrates" ein Individualbegriff. Die unverzichtbare Grundoperation des Denkens ist die Anwendung eines Begriffes auf einen andern. In unserem Beispiel die

Anwendung des Weisheitsbegriffes auf Sokrates. Diese Anwendung führt zu ihrem Produkt, dem Denkgegenstand, dass Sokrates weise sei. In Zeichen:

$$\ulcorner\text{Weisheit}\urcorner \cdot \ulcorner\text{Sokrates}\urcorner = \ulcorner\text{die Weisheit des Sokrates}\urcorner$$

Ohne eine solche Grundoperation ist das Denken in Begriffen schlechthin unmöglich; die formale Logik inkorporiert sie denn auch mit Schreibweisen der Prädikation $P(x)$, $R(x,y)$, $x \in y$, etc. Die Logik bleibt dabei natürlich nicht stehen, sondern führt Negation, Konjunktion und vieles andere mehr ein. So verfolgt sie das Ziel die "Gesetze des Denkens" [Boole], also des richtigen Umganges mit Gegenständen des Denkens, offenzulegen. Bevor wir uns zu diesem grossartigen Unternehmen äussern, möchten wir aber noch etwas bei der Protologik, bei der Operation der Anwendung eines Begriffes auf einen anderen bleiben.

Dedekinds Denkgegenstände sind leicht zu haben, sie sind der Reihe nach

$$\ulcorner\text{ich}\urcorner,\ \ d\cdot\ulcorner\text{ich}\urcorner,\ \ d\cdot(d\cdot\ulcorner\text{ich}\urcorner),\ \ d\cdot(d\cdot(d\cdot\ulcorner\text{ich}\urcorner)),\ldots$$

wo d offenbar steht für "denken über etwas".

Zu den Gegenständen des Denkens gehören auch Beziehungen zwischen solchen und nicht nur Eigenschaften von Individual- und Allgemein-Begriffen. Nehmen wir als Beispiel den Gedanken an die Analogie der Rechenmaschine mit dem Gehirn [Engeler und Speiser]:

$$\text{Analogie (Computer, Gehirn)}$$

So geschrieben, ist der Analogiebegriff zweistellig und scheint mit dem Anwendungsbegriff der Protologik wenig gemein zu haben. Doch wir können schreiben, und ich finde wir können auch besser verstehen,

$$(\ulcorner\text{Analogie}\urcorner \cdot \ulcorner\text{Computer}\urcorner) \cdot \ulcorner\text{Gehirn}\urcorner.$$

In der Klammer steht der Gedanke, analog zu einer Rechenmaschine zu sein. Dieser Gedanke, angewandt auf das Gehirn ist schliesslich was wir wohl wollen: der Gedanke der Analogie einer Rechenmaschine mit dem Gehirn. Auch dieser Gedanke kann wiederum angewendet werden z.B. auf die Idee der Computersimulation des visuellen Inputs ins Gehirn:

$$(((\ulcorner\text{Simulierung}\urcorner \cdot \ulcorner\text{Computer}\urcorner) \cdot \ulcorner\text{Input}\urcorner) \cdot \ulcorner\text{Gehirn}\urcorner)$$

also insgesamt

$$((\ulcorner\text{Analog}\urcorner \cdot \ulcorner\text{Comp}\urcorner) \cdot \ulcorner\text{Gehirn}\urcorner) \cdot (((\ulcorner\text{Simul}\urcorner \cdot \ulcorner\text{Comp}\urcorner) \cdot \ulcorner\text{Input}\urcorner) \cdot \ulcorner\text{Gehirn}\urcorner)$$

abegekürzt:

$$((a \cdot c) \cdot g) \cdot (((s \cdot c) \cdot i) \cdot g)$$

In Worten: die Idee, die Computersimulation des visuellen Inputs ins Gehirn als eine

Anwendung der Analogie zwischen Computer und Gehirn zu verstehen. Dieser Gedanke verknüpft in ganz bestimmter Weise die fünf Denkinhalte $\ulcorner\text{Analogie}\urcorner, \ldots, \ulcorner\text{Input}\urcorner$. Dieselbe Gestalt der Gedankenverknüpfung ergibt sich in sehr vielen Fällen. Hier ein Beispiel: die Idee der Rückführung (r) der Chemie (c) auf die Physik (p) angewandt auf die Verwendung der Quantenphysik (q) in der Chemie zur Erklärung der Katalysatorwirkung (k) durch die Physik

$$((r \cdot c) \cdot p) \cdot (((q \cdot c) \cdot k) \cdot p).$$

Nun ist ja die Idee dieser Form von Gedankenverknüpfung von fünf Denkobjekten selbst ein Gedanke, ein recht klarer sogar und deshalb durchaus legitim als Gegenstand unseres Denkens. Er ist ein konkreter Allgemeinbegriff, und gehört deshalb unzweifelhaft zu den Universalien im aristotelischen Sinne. Nennen wir ihn V. Also, in den gehabten Fällen

$$V \cdot a \cdot c \cdot g \cdot s \cdot i = ((a \cdot c) \cdot g) \cdot (((s \cdot c) \cdot i) \cdot g)$$

$$V \cdot r \cdot c \cdot p \cdot q \cdot k = ((r \cdot c) \cdot p) \cdot (((q \cdot c) \cdot k) \cdot p)$$

oder ganz allgemein (wir unterdrücken Klammerung nach links):

$$V \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_5 = ((x_1 \cdot x_2) \cdot x_3) \cdot (((x_4 \cdot x_2) \cdot x_5) \cdot x_3).$$

Die Verknüpfungs*formel* auf der rechten Seite, nun mit Variablen geschrieben, drückt den Gedanken aus, den wir auf der linken Seite als Anwendung des Verknüpfungs-*gedankens* V auf dieselben Variablen dargestellt haben. Was an diesem Beispiel illustriert wurde ist das *Verknüpfungsprinzip*:

> Jeder Verknüpfungsformel $t(x_1, \ldots x_n)$ entspricht ein Verknüpfungsgedanke T den man für alle x_i gemäss der Gleichung $T \cdot x_1 \cdot x_2 \cdots x_n = t(x_1, \ldots, x_n)$ anwendet.

Diese Verknüpfungsgedanken sind die erst einmal gesicherten Universialien des Denkens, diese sind unzweifelhaft existent, mit ihnen ist zu rechnen, was auch sonst an anderen Gegenständen des Denkens und an Universialien existieren mögen.
Es folgt nun eine Aufzählung von protologischen Universialien entsprechend dem obigen Definitionsprinzip, also einfach eine Liste von spezifischen Verknüpfungsgedanken T, deren Nützlichkeit sich gleich erweisen wird:

$$K \cdot x \cdot y = x,$$

$$I \cdot x = x.$$

Demgemäss wird $(KI)xy = Iy = y$; also wählt K von zwei Dingen das erste, während KI das zweite wählt.

$$D \cdot x \cdot y = x \cdot (y \cdot y),$$

$$Y \cdot x = (D \cdot x) \cdot (D \cdot x).$$

Dieses Y hat eine sehr ansprechende Eigenschaft, die wie folgt ausgerechnet wird:

$$Y \cdot f = (D \cdot f) \cdot (D \cdot f) = f \cdot ((D \cdot f) \cdot (D \cdot f)) = f \cdot (Y \cdot f).$$

Mit anderen Worten: $Y \cdot f$ ist ein Fixpunkt von f, löst also das Problem $f \cdot x = x$.
(b) Betrachten wir nun den einen der beiden Gedanken im Titel, die *Negation.* Der Negationsbegriff ist von einer Ubiquität in Sprache und Logik welche die Vermutung nahelegt, er gehöre zu den Universalien, es gebe das "Negative". Nehmen wir also an, es gebe das Negative an sich, also den Gedanken, dessen Anwendung auf einen beliebigen Allgemeinbegriff diesen in sein Gegenteil verkehrt

$$N \cdot \ulcorner \text{rational} \urcorner = \ulcorner \text{irrational} \urcorner,$$

$$N \cdot \ulcorner \text{gut} \urcorner = \ulcorner \text{böse} \urcorner, \text{ etc.}$$

Nach dem Verknüpfungsprinzip müsste es dann ein R geben mit

$$R \cdot x = N \cdot (x \cdot x).$$

Wenn nun "R" für "x" eingesetzt wird, so entsteht $R \cdot R = N \cdot (R \cdot R)$. Demnach müsste es Allgemeinbegriffe geben, die mit ihrem Gegenteil identisch sind, eben zum

Beispiel $R \cdot R$. Das ist sicher nicht, was wir von der Negation fordern müssten, es gibt also keine allgemeine Negation!
Substantiell am selben Phänomen ist Bertrand Russell zu Anfang dieses Jahrhunderts beinahe verzweifelt. Er beschreibt dies in seiner Autobiographie wie folgt [Russell,
vol. 1, p. 228]:

> The summers of 1903 and 1904 we spent at Churt and Tilford. I made a practice of wandering about the common every night from eleven till one, by which means I came to know the three different noises made by night-jars. (Most people only know one.) I was trying hard to solve the contradictions mentioned above. Every morning I would sit down before a blank sheet of paper. Throughout the day, with a brief interval for lunch, I would stare at the blank sheet. Often when evening came it was still empty. We spent our winters in London, and during the winters I did not attempt to work, but the two summers of 1903 and 1904 remain in my mind as a period of complete intellectual deadlock. It was clear to me that I could not get on without solving the contradictions, and I was determined that no difficulty should turn me aside from the completion of *Principia Mathematica*, but it seemed quite likely that the whole of the rest of my life might be consumed in looking at that blank sheet of paper. What made it the more annoying was that the contradictions were trivial, and that my time was spent in considering matters that seemed unworthy of serious attention.

Die Principia Mathematica war das ungeheurer ehrgeizige Projekt Russells und Whiteheads, für die Gesamtheit der Mathematik sozusagen eine *Grand Unified Theory* zu schaffen, ähnlich wie es vorher Peano und vorallem Frege versucht hatten. Die Schwierigkeit, der er begegnete ist wie gesagt die gleiche wie unsere mit der Negation. Statt von Allgemeinbegriffen als solchen zu sprechen, versuchten Russell und Frege solche Begriffe mit den entsprechenden Begriffsumfängen zu identifizieren, ein Allgemeinbegriff ist also dasselbe wie die Menge der Dinge auf die der Begriff zutrifft. Man schreibe $x \in y$ für : y trifft auf x zu. Sei also r der Begriff des nicht selbst auf sich Zutreffens; unfangmässig ist demnach

$$r = \{x : x \notin x\}.$$

Dann ist weder $r \in r$ (da sonst nach Definition $r \notin r$) noch $r \notin r$ (da es sonst zu den zu r gehörenden x zu zählen wäre). In einer berühmten Korrespondenz machte Russell den ihm persönlich unbekannten Frege auf diese Schwierigkeiten aufmerksam und stürzte auch diesen in Perplexität [Frege, S. 223].

> Ich habe mich selbst lange dagegen gesträubt, die Werthverläufe und damit die Klassen anzuerkennen; aber ich habe keine andere Möglichkeit gesehen, die Arithmetik logisch zu begründen. Es handelt sich dabei um die Frage: wie fassen wir logische Gegenstände? und ich habe keine andere Antwort darauf gefunden, als die: wir fassen sie als Umfänge von Begriffen oder allgemeiner als Werthverläufe von Functionen. Dass dies mit Schwierigkeiten verknüpft ist, habe ich nie verkannt, und diese sind durch Ihre Entdeckung des Widerspruches noch vermehrt worden; aber welchen andern Weg hat man?

Dies war der Anfang der sogenannten Grundlagenkrise der Mathematik, die von ihr allerdings unbeschadet weiterhin und zunehmend florierte.

(c) Nachdem wir also dem Negationsbegriff seine Universalität abgesprochen haben, wollen wir nun dasselbe mit dem Existenzbegriff tun. Und wiederum werden wir einem Phänomen begegnen, das die Grundlagendiskussion ganz wesentlich befruchtete, ich meine den Sätzen von Gödel, Turing und Church.

Natürlich existieren einzelne Universalien. Die mittelalterlichen neuplatonischen Realisten sprachen ihnen sogar einen höheren Realitätsgrad zu als anderen platonischen Ideen, behaupteten sogar ihre Präexistenz ([Europ], Art. Nominalismus): *universalia sunt realia ante rem.* Nun, vielleicht nicht *ante rem* aber doch *ante logicam* haben wir einige Allgemeinbegriffe, eben die besprochenen Verknüpfungsgedanken. Auch haben wir natürliche Zahlen 1, 2, 3, ... Die Idee etwa der Drei ist z.B. enthalten in der Verknüpfungsidee des dreimal hintereinander Ausführens:

$$3 \cdot x \cdot y = x \cdot (x \cdot (x \cdot y)),$$

$$4 \cdot x \cdot y = x \cdot (x \cdot (x \cdot (x \cdot y))), \text{ etc.}$$

Man erkennt hier den Dedekindschen Ansatz für Satz 66 wieder. Die einzelnen Zahlen gibt es also; gibt es den Begriff natürliche Zahl zu sein? Ein solcher Begriff z müsste, angewandt auf ein beliebiges Denkobjekt die Antwort erster Fall, ja, oder zweiter Fall, nein, ergeben. Entscheidungsbegriffe sollen ja immer dazu dienen, die eine oder die andere Konsequenz etwa u oder v daraus zu ziehen, also

$$(z \cdot 3) \cdot u \cdot v = u,$$

$$(z \cdot D) \cdot u \cdot v = v.$$

Das wird erreicht, indem als mögliche Werte von $z \cdot x$ gerade K und $K \cdot I$ bestimmt werden, denn $K \cdot u \cdot v = u, \quad K \cdot I \cdot u \cdot v = v$.
Ein Entscheidungsbegriff e ganz allgemein wäre also ein Allgemeinbegriff mit genau dieser Eigenschaft; generell $e \cdot x$ ist für gegebenes x entweder K oder $K \cdot I$. Nehmen wir an, e habe wirklich etwas zu entscheiden, also es gebe ein a für welches $e \cdot a = K$ und ein b für welches $e \cdot b = KI$. Nach dem Verknüpfungsprinzip hätten wir auch ein Objekt m mit dem Verknüpfungsgesetz

$$m \cdot x = e \cdot x \cdot b \cdot a.$$

Der Fixpunktoperator Y, angewandt auf m ergibt ein $w = Y \cdot m$ mit

$$m \cdot w = w.$$

Was ist nun $e \cdot w$? Wäre w von der Art des a, so gälte $w = m \cdot w = (e \cdot w) \cdot b \cdot a = K \cdot b \cdot a = b$. Es wäre also w von der Art des b, Widerspruch. Wäre hingegen w von der Art des b, so gälte gleichermassen $w = m \cdot w = (e \cdot w) \cdot b \cdot a = (K \cdot I) \cdot b \cdot a = a$, wieder ein Widerspruch. Also: Jeder Entscheidungsbegriff der für alle Denkobjekte ausgesagt werden kann ist trivial: er entscheidet entweder dass alle Objekte die Eigenschaft haben oder keine; es gibt keine Abgrenzungsmöglickeiten in der Klasse aller Denkobjekte. (Dieses Resultat verallgemeinert den Satz von Rice der eine entsprechende Unmöglichkeit im Bereich der partiell-rekursiven Funktionen nachweist, [Rice]). So existiert also insbesondere der oben passim vorgeschlagene allgemeine Zahlbegriff z nicht: *Die Existenz der Menge der natürlichen Zahlen lässt sich nicht durch allgemein-logische Überlegungen begründen.* Dies hängt also nicht, wie lange vermutet, an der Unendlichkeit der Zahlenmenge, sondern an der Unmöglichkeit der nichttrivialen generellen Prädizierung.

Der mathematische Rahmen in welchem die vorgängigen Überlegungen gemacht wurden ist, wie Sie bemerken, von grosser Allgemeinheit und überraschendem Reichtum. Natürlich habe nicht ich ihn erfunden. Er ist die Leistung von Haskell B. Curry [Curry] und Alonzo Church. Zu Beginn der Dreissigerjahre, noch vor Gödel, versuchten verschiedene Logiker, das Instrumentarium der mathematischen Logik zu vereinfachen und möglichst die Gründe der Antinomien zu orten und zu umgehen. Schönfinkel und Bernays hatten schon zehn Jahre vorher den technisch heiklen Substitutionsbegriff untersucht und sogenannte "Bausteine der mathematischen Logik", nämlich die Verknüpfungsbegriffe, nun "Kombinatoren" genannt, neben die klassischen logischen Operationen der Konjunktion, Disjunktion, Negation, Existenz- und Allquantoren gesetzt. Curry und Church schlugen daran anknüpfend ihre formalen Systeme, kombinatorische Logiken und Lambda-Kalkuli vor. Heute werden diese Kalküle, die sich übrigens erst von inneren Widersprüche befreien mussten, meistens als Theorien der Berechenbarkeit verstanden. Dies im Unterschied zur ursprünglichen Absicht [Curry et al.] und auch zur weitgehenden Uminterpretation die wir im heutigen Vortrag vorgenommen haben.

Der "richtige Umgang mit den Gegenständen des Denken" ist es, was sich die Logik zum Ziel setzt. Die *kombinatorische Logik* beschränkt diese Zielsetzung auf die Verknüpfungsgedanken. So ist erst einmal auszumachen, was aus den einzelnen Verknüpfungsgedanken zwingend für ihre richtige Verwendung folgt. Offenbar nicht mehr und nicht weniger als genau das was in der Gleichung ausgedrückt wird, gemäss welcher - nach dem Verknüpfungsprinzip - der bewusste Verknüpfungsgedanke eingeführt wird. Durch diese unumgängliche Beschränkung wird die Logik der Verknüpfungsgedanke zu einem reinen *Gleichungskalkül* mit dem Verknüpfungsprinzip als Axiom-Schema und den üblichen Schlussregeln der Gleichungskalküle (mit nur einer zweistelligen Grundoperation), also den Schlüssen $t_1 = t_2 \vdash t_1t_3 = t_2t_3,\ t_1 = t_2 \vdash t_3t_1 = t_3t_2;\ t_1 = t_2 \vdash t_2 = t_1$, und $t_1 = t_2, t_2 = t_3 \vdash t_1 = t_3$ für beliebige Terme t_1, t_2, t_3.

Dieser protologische Kalkül, so bescheiden er in seinem Instrumentarium erscheint, ist von erstaunlicher Reichhaltigkeit auch ohne dass zusätzliche Denkobjekte mit in den Kalkül einbezogen werden. Wenn man dies hingegen tut - was durchaus widerspruchsfrei durchführbar ist - so eröffnet sich ein weites Feld interessanter Anwendungen, von Numerischer Analysis bis Universelle Algebra, [Engeler et al.].

Mit diesen historischen Bemerkungen bezwecke ich noch etwas zusätzliches: es mag Ihnen möglich erschienen sein, dass die Konsequenzen, die Nichtexistenz von Negation und allgemeinen Unterscheidungen, vielleicht dadurch hinfällig würden, dass das Verknüpfungsprinzip auf dem vieles fusst, selbst nicht gilt. Doch davon kann keine Rede sein, die Theorie der Kombinatoren ist mit elementaren zahlentheoretischen Mitteln als widerspruchsfrei erwiesen. In der Tat stellt dieser Beweis [Church and Rosser] einen der schöneren Erfolge des Hilbert'schen Programms dar, von dem wir noch sprechen werden.

4. Es gibt das, womit zu rechnen ist

Auf die Frage, *Was gibt es?* sind wir bisher eigentlich nur auf die eine befriedigende Antwort gestossen, die ich bewusst doppeldeutig so formuliere: *Es gibt das, womit zu rechnen ist.* Zahlen, natürliche und algebraische, existieren, weil man mit ihnen rechnen kann. Allgemeinbegriffe wie Verknüpfungskonzepte existieren insoweit man mit ihnen rechnen kann.
Existenzprobleme entstehen, wenn existierende Dinge zu Begriffsumfängen zu Mengen, allgemeiner zu Strukturen, zusammengefasst werden sollen. Doch ist die heutige Mathematik gar nicht denkbar ohne genau dieses Konzept, ohne allgemeine algebraische, analytische und geometrische Strukturen fussend auf dem Mengenbegriff. Die Grundlagenfrage bleibt bestehen. Sie hat aber in den hundert Jahren seit Cantors Entdeckung der Paradoxie der Menge aller Mengen (welche zu Russells Beispiel führte) eine vielfältige technische Entwicklung genommen; im Bewusstsein des Mathematikers spielt sie aber eine durchaus untergeordnete Rolle. Dem Mathematikern scheinen die Zweifel an der Mathematik um einiges zweifelhafter als die Mathematik selbst. Von Interesse für ihn, und für uns hier, ist das was aus der Beschäftigung mit dem Grundlagenproblem an Mathematik angefallen ist.
(a) Die Technik, mit der wir die Unmöglichkeit der generellen Negation und der generellen Entscheidungsfindung nachgewiesen haben, ist die Kernidee der Gödel-Church-Turingschen Sätze, von denen nun allerdings jeder Mathematiker weiss. Wenn wir für einmal mehr Gewicht auf die formale Verwandtschaft als auf die historische Formtreue legen, so stellen sich diese Sätze und ihre Beweise wie folgt dar:
Gödel (1931)

Die Aussage, die von sich selbst sagt, dass sie nicht zutrifft:

$$R \cdot R = N \cdot (R \cdot R)$$

ist von Gödel so gewendet worden, dass sie nun statt "zutreffen", "beweisen" sagt und sich auf einen beschränkteren Objektbereich bezieht, nämlich Formeln der formalisierten Zahlentheorie. Die obige paradoxe Aussage ist dann:

Die Formel, die von sich selbst aussagt, dass sie nicht beweisbar ist.

Falls diese Formel g in der formalen Zahlentheorie wirklich konstruiert werden kann (Gödel tut dies), so ist sie ein Beispiel für die Unvollständigkeit der formalen Zahlentheorie: Falls nämlich g nicht bewiesen werden kann, so ist sie ein Beispiel eines unbeweisbaren Satzes und wir sind fertig. Falls sie bewiesen werden kann, so sagt sie aus, dass sie nicht beweisbar ist. – Statt auf die Nichtexistenz der Aussage zu schliessen – was wir nicht können, da g vorliegt – ist auf die Unvollständigkeit der formalisierten Zahlentheorie zu schliessen.
Church und Turing (1936)
Während Gödels Resultat unmittelbare Analogie zur Unmöglichkeit der Negation hat, so haben die Resultate von Church und Turing die Gestalt unseres Nachweises für die Unmöglichkeit von Entscheidungsbegriffen. Mit

$$h \cdot x = \begin{cases} K: & x \text{ ist ein Programm das immer hält,} \\ KI: & x \text{ hält für gewisse Inputs nicht.} \end{cases}$$

bilden wir das Programm
$t \cdot x = (h \cdot x) \cdot \ulcorner \text{begin } y := 0; \text{ while } y = 0 \text{ do } y := y \text{ end} \urcorner \cdot \ulcorner \text{begin } y := 0 \text{ end} \urcorner$
Unter der Annahme, dass das Halteproblem (mittels h) entscheidbar ist findet Turing mit dem Fixpunkt von t ein rekursives Programm, das genau dann hält, wenn es nicht hält.
Es ist offensichtlich: bei den obigen Beispielen habe ich alle technischen Details (Gödelnumerierung, rekursive Programmierung, etc.) unterdrückt. Der Kenner kann sie nachliefern, dem interessierten Laien sollten wenigstens die geistige Verwandschaften deutlich sein: das alte Paradoxon des Lügners für Gödel, und ein noch älteres für Church und Turing. Bei diesem handelt es sich um nichts weniger als um die Frucht vom Baume der Erkenntnis und vom Teufel.

$$a \cdot x = \begin{cases} K: & x \text{ ist gut} \\ KI: & x \text{ ist böse} \end{cases}$$

So ist also a das Versprechen der Schlange im Paradies: " ... und werdet sein wie Gott und wissen was gut und böse ist" (I. Mose, Kap. 3, Vers 5).

Mephisto definiert sich als ein Teil jener Kraft m "... die stets das Böse will und stets das Gute schafft" (J. W. v. Goethe, Faust, I. Teil, Studierzimmer). Es ist demnach zu setzen:

$$m \cdot x = (a \cdot x) \cdot \ulcorner \text{das Böse} \urcorner \cdot \ulcorner \text{das Gute} \urcorner$$

Den Schluss aus dem entstehenden Widerspruch überlasse ich besser Ihnen. Ich meine, die Schlange habe etwas versprochen, das es nicht gibt.

(b) Zu den mathematisch beachtenswerten Ergebnissen der Grundlagenforschung in diesem Jahrhundert sind natürlich auch die Widerspruchfreiheits- und Unabhängigkeitsbeweise zu zählen, insbesondere die der Mengenlehre. Eine der wesentlichen Konsequenzen davon ist die Klärung des Status von Erweiterungen der Zahlen ins Transfinite.

Nachdem, wie wir wissen, ein *absoluter* Existenzbegriff aufgegeben werden muss, ist ein Ersatz von nöten. Seit Hilbert (1900) dient dazu die Widerspruchsfreiheit:

> Ein mathematischer Gegenstand wie etwa eine Zahl "existiert" nur als Element eines Systems. Ein System ist eine Menge, versehen mit Relationen (wie $<$) und Operationen (wie $+$ und $\cdot$) welche gewisse Anforderungen erfüllen. Ein System seinerseits "existiert" nur, wenn die es definierenden Grundeigenschaften formal widerspruchsfrei sind.

Das Hilbert'sche Programm ist die leicht fassliche, aber in ihren Erfolgsmöglichkeiten beschränkte Aufgabe, von möglichst fundamentalen mathematischen Systemen die formale Widerspruchsfreiheit nachzuweisen. Solche Beweise finden allerdings selbst wieder in einem System statt. Die Widerspruchsfreiheit ist deshalb der Natur ihres Beweises nach jeweils eine relative. Der daraus folgende Existenznachweis ist damit ebenfalls relativ, nämlich zur Existenz des benutzten Referenzsystems.

Ueberraschenderweise kommt man mit recht vertrauten Referenzsystemen, nämlich mit einfachen zahlentheoretischen Formalismen, schon recht weit. So hat Tarski

gezeigt, dass der Körper der reellen Zahlen, gegeben durch seine elementaralgebraischen Eigenschaften, existiert, da diese Eigenschaften widerspruchsfrei sind [Tarski]. Der Tarskische Widerspruchsfreiheitsbeweises hat die Gestalt eines formalen Entscheidungsverfahrens. Die elementare Algebra der reellen Zahlen existiert also genau in dem Sinne von dem wir eben sprachen, als etwas womit zu rechnen ist.
Ueber die Theorie der sogenannten reellen Zahlen hinauszukommen mit Entscheidungsverfahren und formalem Rechnen ist zumindest seit Tarski ein wichtiges Anliegen der mathematischen Logiker wie der Computeralgebraiker. Vor etwa einem Jahr konnte in Oxford, unter Verwendung der Schanuel-Vermutung, auch die Exponentialfunktion mit zu den Grundoperationen genommen werden. Seit Liouville, Ritt, Kolchin und Risch hat man aber auch viel allgemeinere Körpererweiterungen in Betracht gezogen, nämlich die Erweiterung zu Funktionenkörper. Jede reelle Zahl ist eine reelle Funktion, die entsprechende konstante Funktion. Auf Funktionen kann man die Körperoperationen ausführen und zusätzlich die Operation der Differentiation. So gelangt man zum Begriff des Differentialkörpers. Das Lösen von Gleichungen in solchen Körper, also das Lösen von Differentialgleichungen, führt ebenso zu Körpererweiterungen wie das Lösen von algebraischen Gleichungen. Und deshalb wird das formale Rechnen mit solchen Lösungen ebenso zur Aufgabe wie etwa in der Antike das Rechnen mit Wurzelausdrücken. Dies ist eines der Hauptthemen in meiner Arbeitsgruppe: ein netter Erfolge ist die Ausdehnung der Risch-schen Algorithmen auf unstetige Funktionen durch einen meiner Doktoranden.

5. Womit können wir rechnen?

Womit können wir nun eigentlich rechnen? Und zwar nicht nur rechnen "im Prinzip" und mit idealisierten Maschinen beliebiger Grösse und Geduld, sondern mit den uns zur Verfügung stehenden materiellen und geistigen Mitteln, Zeit und Geduld? Diese Frage, so vage sie auch daherkommt, ist durchaus gewisser Präzisierungen fähig von denen ich zwei zum Schluss noch kurz andeuten möchte.
(a) Der *strikt finitistische Konventionalismus* hält dafür, dass der einzelne Mensch nur fähig sei in ganz beschränkten endlichen Bereichen Gedankenexperimente durchzuführen. Eine Allaussage bedeutet also für den jeweiligen Menschen nur, dass er sich alles durchgesehen hat das ihm gerade zugänglich ist. Eine Existenz-

aussage bedeutet dass er sich, ihm Rahmen seiner beschränkten Erfindungsgabe, ein gewisses Ding ausgedacht hat. Jeder Mensch hat also seine beschränkte Sicht. Der strikte Konventionalismus beinhaltet die Übereinkunft, dass alles existiert, was alle genügend geduldige und intelligente Menschen als aus ihrer jeweiligen Sicht als existent akzeptieren. Einen solchen Konventionalismus habe ich vor geraumer Zeit vergnügungshalber ausgearbeitet für die Mengenlehre [Engeler].

(b) Die *Neuroinformatik* sucht die Möglichkeiten und Grenzen der Gehirnfunktionen mit mathematisch-informatischen Mitteln nachzubilden. Was kann das Gehirn rechnen, was kann es zu rechnen lernen? Hier stehen wir erst am Anfang. Das einfachste Modell der Gehirnfunktionen geht von Nervenzellen aus, die nur eine Funktionsart haben: Sie empfangen entlang Inputkanälen Signale. Jeder Kanal wird mit positiven oder negativen Gewichten versehen, die gewichteten Signale aufsummiert. Entsprechend eines typischen Schwellenwertes gibt dann die Zelle ihrerseits die Signale weiter, etc. Ein Netz solcher Zellen, Kommunikationskanälen und entsprechenden Gewichten, das ist für's Erste einmal ein Hirnmodell: ein künstliches neuronales Netz. Was kann ein solches Netz lernen zu tun? Zuerst einmal zum "Lernen". Hier hat die Skinner-Box überlebt: Man denke sich eine Inputebene, wo viele Inputkanäle parallel Werte aus dem Experimentierfeld übernehmen, z.B. durch punktweise Aufnahme von Schwarzweisswerten eines Bildes. Das Netz hat auch Outputkanäle, z.B. nur einen. Der sagt "ja", falls das Bild die richtige Eigenschaft hat, z.B. dem Buchstaben A gleicht, "nein" sonst. Durch Belohnen und Bestrafen wird ein Lernprozess an verschiedenen, vielen, A-ähnlichen Figuren durchgeführt bei dem die Gewichte an den Kanälen schrittweise verändert werden. Das Ziel ist, möglichst alle A-ähnlichen Figuren als solche zu erkennen. So etwas funktioniert gar nicht so schlecht, und es hat sich aus diese Künstlichen Neuronalen Netzen in den letzten Jahren ein erfolgreiches industrielles Verwendungsgebiet entwickelt. Doch auch hier gibt es harte prinzipielle Grenzen: Netze von einfacher Schichtstruktur (ähnlich der Retina) können z.B. ein geometrisches Konzept wie "zusammenhängend" nicht lernen [Minsky]. Man kann Verteilungsfunktionen für Gewichte angeben, auf die ein gegebenes Lernverfahren vom Typ des simulated annealing nur mit beschränkbarer Wahrscheinlichkeit konvergiert [Hajek]. - Ja, ein Doktorand von mir ist daran zu zeigen, dass es Lernziele für neuronale Netze gibt, nämlich die Simulation von geeigneten Differentialgleichungen, bei denen sich jedes Lernverfahren chaotisch verhält.

Ich komme zum Schluss. – Die Existenz mathematischer Gegendstände lässt sich, wie wir gezeigt haben, in beschränktem Masse auf logische Denknotwendigkeiten zurückführen. Derartige Grundlegungsprogramme, logizistisch genannt, stossen an inhärente Schranken, illustriert durch die Unmöglichkeit nichttrivialer allgemeiner Unterscheidungsbegriffe. Deshalb nun vom Logizismus zum Nihilismus umzuschwenken liegt durchaus nicht in meiner Absicht; denn ich teile das durch zweieinhalb Jahrtausende von Erfahrungen gestützte Vertrauen in die Mathematik. Die Mathematik ist mit und an ihren Problemen gewachsen, nicht zuletzt an ihren Grundlagenproblemen; sie wird es auch weiterhin tun.

References

[Aristoteles] Aristoteles, The Basic Works of Aristoteles (edited by R. McKeon), Random House, NY. 1941.

[Bernays, Plat.] P. Bernays, Platonismus in der Mathematik, (1934). In: Abhandlungen zur Philosophie der Mathematik, WBG Darmstadt, 1976, 62–91.

[Bernays] P. Bernays, Abhandlungen zur Philosophie der Mathematik, WBG Darmstadt, 1976.

[Boole] G. Boole, An Investigation of the Laws of Thought, London 1854.

[Bourbaki] N. Bourbaki, Eléments d'Histoire des Mathématiques, Hermann, Paris 1969.

[Cardano] G. Cardano, Ars Magna, 1545. Übersetzt von T. T. R. Wittner: The Great Art. MIT Press, Cambridge 1968.

[Church and Rosser] A. Church and J. B. Rosser, Some properties of conversion. Transactions American Math. Soc., 39 (1936), 472–482.

[Collins] G. E. Collins and R. Loos, Real zeros of polynomials. Computing, Suppl. 4 (1982), 83–94.

[Curry] H. B. Curry, Grundlagen der kombinatorischen Logik (Inauguraldissertation). Amer. J. Math. 52 (1930), 509–536, 789–834.

[Curry et al.] H. B. Curry and R. Feys, Combinatory Logic, Vol. I, North-Holland, Amsterdam, 1958. - H. B. Curry, J. R. Hindley and J. P. Seldin, Combinatory Logic, Vol. II, North-Holland, Amsterdam, 1972.

[Dedekind] R. Dedekind, Was sind und was sollen die Zahlen, (1888). In: R. Dedekind, Gesammelte Werke, Bd. 3, 335–391.

[Dimitric] R. Dimitric and B. Goldsmith, Sir William Rowan Hamilton, The Mathematical Intelligencer, 11 (1989), 29–30.

[Engeler und Speiser] E. Engeler und A. P. Speiser, Zur Analogie zwischen einer elektron. Rechenmaschine u. d. Gehirn. Viertelj.-Schrift d. Natf. Ges. Zürich, 109 (1964), 81–84.

[Engeler] E. Engeler, A computer model of strict finitism. In: Engeler, Algorithmic Properties of Structures. WPC Singapore 1993.

[Engeler et al.] E. Engeler et al., A Combinatory Programme. To be published by Birkhäuser, Basle, 1994.

[Euklid] Euklid, Die Elemente, Buch I - XIII, Übersetzung nach Heiberg von C. Thaer, WBG Darmstadt 1991.

[Europ] Europ. Enzyklopädie z. Philos. d. Wissenschaften, Meiner, Hamburg 1990.

[Frege] G. Frege, Wissensch. Briefwechsel. Meiner, Hamburg 1976.

[Hajek] B. Hajek, Cooling Schedules for optimal annealing. Math. Operations Research, 13 (1988), 311–329.

[Minsky] M. Minsky und S. Papert, Perceptrons. MIT Press, Cambridge 1969.

[Rice] H. G. Rice, Classes of recursively enumerable sets and their decision problems, Trans. Am. Math. Soc., 74 (1953), 358–366.

[Russell] B. Russell, The Autobiography of Bertrand Russell, 3 vols., Little Brown & Co., Boston 1967.

[Stevin] S. Stevin, L'Arithmétique. Leyden 1585.

[Tarski] A. Tarski, A decision method for elementary algebra and geometry. UC Press, Berkeley 1951.

[v.d.W] B. L. van der Waerden, A History of Algebra. Springer, Berlin 1985.

[v.F.] K. von Fritz, The discovery of incommensurability by Hippasus of Metapontum. Annals of Mathematics, 46 (1945) 242–264.