Rechnen in Koordinaten

Skript für Elektrotechniker

Benedikt Zeller

24.10.2005

Zusammenfassung

Dieses Skript ist gedacht für Elektrotechnik-Studierende im zweiten bis vierten Semester und soll die Technik des Rechnens in Koordinaten, auf regulär parametrisierten Flächenstücken in $\mathbb{R}^3$ und offenen Teilmengen von $\mathbb{R}^n$, näher bringen. Es wird gezeigt, wie die geometrischen Begriffe Metrik, Kurvenlänge, Flächen- bzw. Volumenelement, Divergenz und Laplace-Operator definiert sind, wie man sie berechnet und wie sie sich unter Koordinatenwechsel verhalten.

Inhaltsverzeichnis

1 Regulär parametrisierte Flächenstücke

1.1 Grundbegriffe

1.1.1 Regulär parametrisiertes Flächenstück und differenzierbare Funktionen

Unter einem regulär parametrisierten Flächenstück verstehen wir ein $M \subset \mathbb{R}^3$, dessen Punkte auf brauchbare Weise durch zwei reelle Koordinaten beschrieben werden können.

Definition 1.1. *Sei $M \subset \mathbb{R}^3$, $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen und $\vec{r} : U \to M$ eine bijektive Abbildung, deren Komponenten auf U unendlich oft stetig differenzierbar sind. Ferner existiere ein $V \subseteq \mathbb{R}^3$ offen mit $M \subset V$ und eine stetige Abbildung $\phi : V \to U$, so dass die Inversion der Parametrisierung deren Einschränkung auf M ist, das heisst $\vec{r}^{\,-1} = \phi|_M$. Dann heisst $(M, U, \vec{r})$ ein* **regulär parametrisiertes Flächenstück**, *falls gilt*

$$\frac{\partial \vec{r}\,(y^1, y^2)}{\partial y^1} \times \frac{\partial \vec{r}\,(y^1, y^2)}{\partial y^2} \neq 0 \quad \text{für alle} \quad \left(y^1, y^2\right) \in U \,. \tag{1}$$

Die Abbildung $\vec{r}$ wird meist in Matrixschreibweise angegeben durch

$$\vec{r}\left(y^1, y^2\right) := \begin{bmatrix} x^1\left(y^1, y^2\right) \\ x^2\left(y^1, y^2\right) \\ x^3\left(y^1, y^2\right) \end{bmatrix} \,. \tag{2}$$

Das bekannteste Beispiel ist die 2-Sphäre mit Radius $R > 0$ ohne den Nullmeridian (d.h. auch ohne Nord- und Südpol) in den üblichen Koordinaten, d.h. $(M, U, \vec{r})$ mit

$$M := S^2_R \setminus \left\{(x, y, z) \in S^2_R \mid x \geq 0,\ y = 0\right\} \tag{3}$$

$$U := (0, \pi) \times (0, 2\pi)$$

und

$$\vec{r}(\theta, \phi) := \begin{bmatrix} R\sin(\theta)\cos(\phi) \\ R\sin(\theta)\sin(\phi) \\ R\cos(\theta) \end{bmatrix} \,. \tag{4}$$

Der Grund für das Weglassen des Nullmeridians liegt darin, dass U offen sein soll. Für die meisten praktischen Anwendungen reicht es aber, einfach nur Nord- und Südpol auszuschliessen, also $M := S^2_R \setminus \{(0,0,1),(0,0,-1)\}$ und $U := (0, \pi) \times [0, 2\pi)$. Auf keinen Fall darf man $M := S^2_R$ wählen, da sonst die Koordinatisierung $\vec{r}$ nicht mehr bijektiv ist!
Da M keine offenen Teilmengen von $\mathbb{R}^3$ enthält, ist es umständlich ein Differential von $f : M \to \mathbb{R}^k$ oder $g : \mathbb{R}^k \to M$ direkt zu definieren. Aber mit Hilfe der Parametrisierung $\vec{r}$ lässt sich der Begriff der Differenzierbarkeit auf einfache Weise auf Abbildungen zwischen M und $\mathbb{R}^k$ erweitern.

Definition 1.2. *Sei $k, l \in \mathbb{N}$ und $(M, U, \vec{r})$ ein regulär parametrisiertes Flächenstück. Eine Abbildung $f : M \to \mathbb{R}^k$ heisst* **l-fach stetig differenzierbar**, *falls die Kombination*

$$f \circ \vec{r} : U \to \mathbb{R}^k \tag{5}$$

l-fach stetig differenzierbar ist.

Definition 1.3. *Sei $k, l \in \mathbb{N}$ und $(M, U, \vec{r}\,)$ ein regulär parametrisiertes Flächenstück. Eine Abbildung $g : \mathbb{R}^k \to M$ heisst* l**-fach stetig differenzierbar**, *falls die Kombination*

$$\vec{r}^{\,-1} \circ g : \mathbb{R}^k \to U \tag{6}$$

l-fach stetig differenzierbar ist.

Diese Differenzierbarkeitsbegriffe hängen von der Wahl der Parametrisierung $\vec{r}$ ab. Die Differenzierbarkeit bezüglich einer zweiten Parametrisierung $(M, V, \vec{s}\,)$ ist genau dann zu jener von $(M, U, \vec{r}\,)$ äquivalent, wenn die Parameterwechsel

$$\vec{s}^{\,-1} \circ \vec{r} : U \to V \quad \text{und} \quad \vec{r}^{\,-1} \circ \vec{s} : V \to U \tag{7}$$

beide differenzierbar sind. Da man ständig mit den Kombinationen $f \circ \vec{r}$ und $\vec{r}^{\,-1} \circ g$ arbeitet, ist es üblich diese in der Notation nicht von f bzw. g zu unterscheiden. Eine Funktion auf dem wie oben parametrisierten Teil der 2-Sphäre drückt man direkt durch die Koordinaten θ und ϕ aus, z.B.

$$f(\theta, \phi) :\equiv \text{Formel mit } \theta \text{ und } \phi\,. \tag{8}$$

Ebenso schreibt man allgemein f als $f\,(y^1, y^2)$ und

$$\frac{\partial f}{\partial y^\mu} := \frac{\partial\,(\,f \circ \vec{r}\,)\,(y^1, y^2)}{\partial y^\mu} \quad \text{für} \quad \mu \in \{1, 2\}\;. \tag{9}$$

1.1.2 Parametrisierte Kurven, Tangentialvektoren, Vektorfelder

Für den Fall, dass $k = 1$ nennt man eine Funktion $g : \mathbb{R}^k \to M$ parametrisierte Kurve.

Definition 1.4. *Sei $l \in \mathbb{N}$, $b > a > 0$ und $(M, U, \vec{r}\,)$ ein regulär parametrisiertes Flächenstück. Eine l-fach stetig differenzierbare Abbildung $\vec{\gamma} : [\,a, b\,] \to M$ heisst* l**-fach stetig differenzierbare parametrisierte Kurve auf M.**

Auch hier wird man in der Praxis eher die Kombination $\vec{r}^{\,-1} \circ \vec{\gamma}$ angeben. Wenn wir den reellen Kurvenparameter t nennen, dann bekommen wir

$$\vec{r}^{\,-1} \circ \vec{\gamma} = \begin{bmatrix} y^1(t) \\ y^2(t) \end{bmatrix}\,. \tag{10}$$

Da $M \subset \mathbb{R}^3$, ist jede parametrisierte Kurve auf M auch eine solche in $\mathbb{R}^3$ mit Komponenten

$$\vec{\gamma}(t) = \vec{r}\left(y^1(t), y^2(t)\right) = \begin{bmatrix} x^1\left(y^1(t), y^2(t)\right) \\ x^2\left(y^1(t), y^2(t)\right) \\ x^3\left(y^1(t), y^2(t)\right) \end{bmatrix}\,. \tag{11}$$

Für den Tangentialvektor am Punkt $p := \vec{\gamma}(t) = \vec{r}\,(y^1(t), y^2(t))$ bekommen wir

$$\begin{aligned} \dot{\vec{\gamma}}(t) &:= \frac{d}{dt}\,\vec{\gamma}(t) = \frac{d}{dt}\,\vec{r}\left(y^1(t), y^2(t)\right) \\ &= \frac{dy^1}{dt}\frac{\partial\,\vec{r}}{\partial y^1} + \frac{dy^2}{dt}\frac{\partial\,\vec{r}}{\partial y^2}\,. \end{aligned} \tag{12}$$

Das heisst, dass sich der Tangentialvektor jeder Kurve auf M durch den Punkt p als Linearkombination der beiden Vektoren

$$\vec{e}_1 := \frac{\partial \vec{r}}{\partial y^1} \quad \text{und} \quad \vec{e}_2 := \frac{\partial \vec{r}}{\partial y^2} \tag{13}$$

schreiben lässt. Da wir in Def. 1.1 vorausgesetzt haben, dass $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$ linear unabhängig sind, folgt dass sie an jedem Punkt $p \in M$ einen zweidimensionalen Vektorraum aufspannen.

Definition 1.5. *Sei $(M, U, \vec{r})$ ein regulär parametrisiertes Flächenstück und $p \in M$. Der* **Tangentialraum (bzw. die Tangentialebene)** T_pM **von** $(M, U, \vec{r})$ **am Punkt** $p = \vec{r}(y_0^1, y_0^2)$ *ist der zweidimensionale Vektorraum, der durch die beiden* **Koordinatenbasisvektoren** $\vec{e}_1(y_0^1, y_0^2)$ *und* $\vec{e}_2(y_0^1, y_0^2)$ *aus (13) aufgespannt wird, d.h.*

$$T_pM := \operatorname{span}\left\{\vec{e}_1\left(y_0^1, y_0^2\right), \vec{e}_2\left(y_0^1, y_0^2\right)\right\} . \tag{14}$$

Ein Tangentialvektor aus T_pM könnte im Prinzip interpretiert werden als Ortsvektor (Element) vom $\mathbb{R}^3$, der das Flächenstück M umgibt. Dann wäre T_pM ein zweidimensionaler Unterraum (Ebene durch den Ursprung) dieses $\mathbb{R}^3$. Dies ist hier aber **nicht** die übliche Interpretation! Stattdessen wollen wir T_pM als die dazu parallel verschobene Ebene durch den Punkt $p \in M$ ansehen. Das heisst wir unterscheiden zwischen Ortsvektoren in $\mathbb{R}^3$ (graphisch representiert durch Pfeile mit Anfangspunkt am Ursprung von $\mathbb{R}^3$) und Tangentialvektoren in T_pM (graphisch representiert durch zu M tangentiale Pfeile mit Anfangspunkt $p \in M$). Für unser Beispiel der 2-Sphäre erhalten wir

$$\vec{e}_1 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = \begin{bmatrix} R\cos(\theta)\cos(\phi) \\ R\cos(\theta)\sin(\phi) \\ -R\sin(\theta) \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{e}_2 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} = \begin{bmatrix} -R\sin(\theta)\sin(\phi) \\ R\sin(\theta)\cos(\phi) \\ 0 \end{bmatrix} . \tag{15}$$

Nun wollen wir den Begriff des Vektorfeldes auf regulär parametrisierte Flächenstücke erweitern.

Definition 1.6. *Sei $(M, U, \vec{r})$ ein regulär parametrisiertes Flächenstück. Unter einem* **Vektorfeld** *auf M verstehen wir eine Abbildung der Form*

$$p \mapsto \vec{V}(p) \in T_pM . \tag{16}$$

Wenn man ein Vektorfeld vorgibt, muss man gemäss Definition an jedem Punkt $p \in M$ einen Vektor aus dem zugehörigen Tangentialraum T_pM wählen. In der Praxis wird man diesen als Linearkombination der Koordinatenbasisvektoren schreiben, mit Koeffizienten, die wiederum von den Koordinaten abhängen, also

$$\vec{V}\left(y^1, y^2\right) = V^1\left(y^1, y^2\right)\vec{e}_1\left(y^1, y^2\right) + V^2\left(y^1, y^2\right)\vec{e}_2\left(y^1, y^2\right) . \tag{17}$$

Analytische Begriffe wie Stetigkeit oder Differenzierbarkeit können via die Koeffizientenfunktionen auch auf Vektorfelder angewendet werden. D.h. ein Vektorfeld ist z.B. stetig, wenn die Funktionen $V^1(y^1, y^2)$ und $V^2(y^1, y^2)$ stetig sind, etc...

1.2 Geometrische Grössen

1.2.1 Skalarprodukt, Metrik und Kurvenlänge

Wir wollen nun die Länge einer parametrisierten Kurve $\vec{\gamma} : [a, b] \to M$ auf einem regulär parametrisierten Flächenstück $(M, U, \vec{r}\,)$ berechnen. Die einfachste Methode ist, das Flächenstück zu vergessen und die Kurve als Kurve in $\mathbb{R}^3$ zu betrachten. Wir erhalten

$$\text{Länge}[\gamma] = \int_a^b \left|\dot{\vec{\gamma}}(t)\right| \, dt = \int_a^b \sqrt{\left\langle \dot{\vec{\gamma}}(t), \dot{\vec{\gamma}}(t) \right\rangle} \, dt \,. \tag{18}$$

Um dies auswerten zu können, müssen wir das Skalarprodukt des Tangentialvektors mit sich selbst berechnen. Ist die Kurve (wie meistens üblich) durch die Funktionen $y^1(t)$ und $y^2(t)$ gegeben, so können wir (12) in (18) einsetzen und erhalten unter Verwendung der Linearität des Skalarproduktes

$$\left\langle \dot{\vec{\gamma}}(t), \dot{\vec{\gamma}}(t) \right\rangle = \left\langle \sum_{\mu=1}^{2} \frac{dy^\mu}{dt} \, \vec{e}_\mu, \sum_{\nu=1}^{2} \frac{dy^\nu}{dt} \, \vec{e}_\nu \right\rangle = \sum_{\mu,\nu=1}^{2} \frac{dy^\mu}{dt} \frac{dy^\nu}{dt} \left\langle \vec{e}_\mu, \vec{e}_\nu \right\rangle \,. \tag{19}$$

Das heisst wir brauchen die Ableitungen von $y^1(t)$ und $y^2(t)$ sowie die Skalarprodukte der Koordinatenbasisvektoren untereinander.

Definition 1.7. *Sei $(M, U, \vec{r}\,)$ ein regulär parametrisiertes Flächenstück und $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$ die Koordinatenbasisvektorfelder. Die Koeffizienten*

$$g_{\mu\nu} := \left\langle \vec{e}_\mu, \vec{e}_\nu \right\rangle \;\; \textit{für alle} \;\; \mu, \nu \in \{1, 2\} \tag{20}$$

heissen **metrische Koeffizienten***, die zugehörige Matrix bezeichnet man als* **metrische Matrix***:*

$$[\, g_{\mu\nu} \,] := \begin{bmatrix} \langle \vec{e}_1, \vec{e}_1 \rangle & \langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle \\ \langle \vec{e}_2, \vec{e}_1 \rangle & \langle \vec{e}_2, \vec{e}_2 \rangle \end{bmatrix} \tag{21}$$

Mit Hilfe der Metrik bekommen wir also

$$\left\langle \dot{\vec{\gamma}}(t), \dot{\vec{\gamma}}(t) \right\rangle = \sum_{\mu,\nu=1}^{2} g_{\mu\nu} \frac{dy^\mu}{dt} \frac{dy^\nu}{dt} = \begin{bmatrix} \dfrac{dy^1}{dt} & \dfrac{dy^2}{dt} \end{bmatrix} \cdot [\, g_{\mu\nu} \,] \cdot \begin{bmatrix} \dfrac{dy^1}{dt} \\ \dfrac{dy^2}{dt} \end{bmatrix} \tag{22}$$

für das Skalarprodukt und für die Kurvenlänge erhalten wir

$$\text{Länge}[\gamma] = \int_a^b \sqrt{\sum_{\mu,\nu=1}^{2} g_{\mu\nu} \frac{dy^\mu}{dt} \frac{dy^\nu}{dt}} \, dt \,. \tag{23}$$

Das Skalarprodukt zweier beliebiger Tangentialvektoren $\vec{V} = \sum_{\mu=1}^{2} V^\mu \, \vec{e}_\mu$ und $\vec{W} = \sum_{\nu=1}^{2} W^\nu \, \vec{e}_\nu$ auf M lässt sich (Beweis analog zu (19)) ebenfalls durch die metrischen Koeffizienten ausdrücken, es gilt dann

$$\left\langle \vec{V}, \vec{W} \right\rangle = \sum_{\mu,\nu=1}^{2} g_{\mu\nu} \, V^\mu W^\nu = \begin{bmatrix} V^1 & V^2 \end{bmatrix} \cdot [\, g_{\mu\nu} \,] \cdot \begin{bmatrix} W^1 \\ W^2 \end{bmatrix} \,. \tag{24}$$

Die metrischen Koeffizienten stellen das Skalarprodukt dar und erben deshalb auch dessen algebraische Eigenschaften.

Lemma 1.1. *Sei $(M, U, \vec{r})$ ein regulär parametrisiertes Flächenstück und $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$ die Koordinatenbasisvektorfelder. Die metrische Matrix $[\, g_{\mu\nu} \,]$ ist dann symmetrisch und positiv definit.*

Beweis: Aus der Symmetrie des Skalarproduktes folgt für alle $\mu, \nu \in \{1, 2\}$, dass gilt

$$g_{\nu\mu} = \langle \vec{e}_\nu, \vec{e}_\mu \rangle = \langle \vec{e}_\mu, \vec{e}_\nu \rangle = g_{\mu\nu}\,, \tag{25}$$

also $[\, g_{\mu\nu} \,]^T = [\, g_{\mu\nu} \,]$. Da das Skalarprodukt positiv definit ist, erhalten wir aus (24) für alle Vektorfelder $\vec{V} = \sum_{\mu=1}^{2} V^\mu \, \vec{e}_\mu$, dass

$$\sum_{\mu,\nu=1}^{2} g_{\mu\nu} \, V^\mu V^\nu = \begin{bmatrix} V^1 & V^2 \end{bmatrix} \cdot [\, g_{\mu\nu} \,] \cdot \begin{bmatrix} V^1 \\ V^2 \end{bmatrix} = \left\langle \vec{V}, \vec{V} \right\rangle \geq 0 \tag{26}$$

und das Gleichheitszeichen gilt genau dann, wenn $\vec{V} = 0$. $\square$

In unserem Beispiel der 2-Sphäre ergibt sich

$$[\, g_{\mu\nu} \,] := \begin{bmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2 \sin^2(\theta) \end{bmatrix}. \tag{27}$$

Folglich lässt sich die Länge einer Kurve $\gamma : [a, b] \to S_R^2 \setminus \{(x, y, z) \in S_R^2 \mid x \geq 0,\ y = 0\}$, welche durch $\theta(t)$ und $\phi(t)$ gegeben ist, berechnen durch

$$\text{Länge}[\gamma] = R \int_a^b \sqrt{\dot{\theta}^2 + \sin^2(\theta)\dot{\phi}^2} \, dt\,. \tag{28}$$

1.2.2 Normalenvektor, Flächenelement und Integrale

Sei im folgenden $(M, U, \vec{r})$ ein regulär parametrisiertes Flächenstück und $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$ die Koordinatenbasisvektorfelder. Aus Analysis I+II (Siehe [1]) kennen wir das vektorielle und das skalare Flächenelement, gegeben durch die Definitionen

$$d\vec{M} := \vec{e}_1 \times \vec{e}_2 \, dy^1 dy^2 \quad \text{und} \quad dM := |\vec{e}_1 \times \vec{e}_2| \; dy^1 dy^2\,. \tag{29}$$

Ersteres verwendet man um Flussintegrale durch die Fläche zu berechnen und letzteres benötigt man für Integrale von skalaren Funktionen $f : M \to \mathbb{R}$ über die Fläche:

$$\int_M f \, dM = \int_U f\left(y^1, y^2\right) \, |\vec{e}_1 \times \vec{e}_2| \; dy^1 dy^2 \tag{30}$$

Insbesondere lässt sich der Flächeninhalt (Siehe [2]) gewinnen durch

$$\text{Fläche}[M] = \int_M 1 \, dM = \int_U |\vec{e}_1 \times \vec{e}_2| \; dy^1 dy^2\,. \tag{31}$$

Wir werden nun sehen, dass sich beide Flächenelemente auch mit Hilfe der Metrik ausdrücken lassen. Dazu werden wir die Determinante der metrischen Matrix benötigen und definieren deshalb die Notation

$$g := \det\left([\, g_{\mu\nu}\,]\right) . \tag{32}$$

Lemma 1.2. *Sei* $(M, U, \vec{r})$ *ein regulär parametrisiertes Flächenstück und* $\vec{e}_1$ *und* $\vec{e}_2$ *die Koordinatenbasisvektorfelder. Dann gilt*

$$|\vec{e}_1 \times \vec{e}_2| = \sqrt{|g|} . \tag{33}$$

Beweis: Durch direkte Rechnung finden wir

$$\begin{aligned} |\vec{e}_1 \times \vec{e}_2| &= \sqrt{\langle \vec{e}_1 \times \vec{e}_2, \vec{e}_1 \times \vec{e}_2 \rangle} = \sqrt{\langle \vec{e}_1, \vec{e}_1 \rangle \langle \vec{e}_2, \vec{e}_2 \rangle - \langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle \langle \vec{e}_2, \vec{e}_1 \rangle} \\ &= \sqrt{g_{11} g_{22} - g_{12} g_{21}} = \sqrt{g} = \sqrt{|g|} . \end{aligned} \tag{34}$$

□

Wir betrachten das Normalenvektorfeld $\vec{N}$ des Flächenstücks. Dessen Name ist hier ein wenig verwirrend, da wir bisher unter Vektorfeldern immer Tangentialvektorfelder verstanden haben. Das Normalenvektorfeld ist deshalb auch kein Vektorfeld auf M im engeren Sinne, sondern auf $\mathbb{R}^3$ mit der Einschränkung, dass es nur auf $M \subset \mathbb{R}^3$ definiert ist. Wegen Lemma 1.2 gilt nun

$$\vec{N} := \frac{\vec{e}_1 \times \vec{e}_2}{|\vec{e}_1 \times \vec{e}_2|} = \frac{\vec{e}_1 \times \vec{e}_2}{\sqrt{|g|}} \tag{35}$$

und wir können die Flächenelemente schreiben als

$$dM := \sqrt{|g|}\, dy^1 dy^2 \quad \text{und} \quad d\vec{M} := \vec{N} \sqrt{|g|}\, dy^1 dy^2 . \tag{36}$$

Das Integral einer skalaren Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ lässt sich demnach berechnen durch

$$\int_M f \, dM = \int_U f\left(y^1, y^2\right) \sqrt{|g|}\, dy^1 dy^2 \tag{37}$$

und für den Flächeninhalt von M erhalten wir

$$\text{Fläche}[M] = \int_M 1 \, dM = \int_U \sqrt{|g|}\, dy^1 dy^2 . \tag{38}$$

In unserem Beispiel der 2-Sphäre finden wir

$$\sqrt{|g|} = R^2 \sin(\theta) \quad \text{und} \quad dM = R^2 \sin(\theta)\, d\theta\, d\phi \tag{39}$$

und folglich das bekannte Resultat

$$\text{Fläche}[S_R^2] = \text{Fläche}[M] = \int_M dM = R^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin(\theta)\, d\theta\, d\phi = 4\pi R^2 . \tag{40}$$

Ebenso ergibt sich

$$\vec{N} = \begin{bmatrix} \sin(\theta)\cos(\phi) \\ \sin(\theta)\sin(\phi) \\ \cos(\theta) \end{bmatrix} . \tag{41}$$

1.2.3 Divergenz und LAPLACE-Operator

Die Metrik ist das zentrale Objekt der Geometrie. Sämtliche Informationen, die irgend etwas mit Länge, Winkel oder Fläche zu tun haben, lassen sich mit ihrer Hilfe berechnen. Sie geht deshalb auch wesentlich in die Formel für die Divergenz eines Vektorfeldes und den LAPLACE-Operator ein. Um diese Grössen zu definieren benötigen wir zunächst die **inverse metrische Matrix** $[\, g^{\mu\nu} \,]$, d.h.

$$[\, g^{\mu\nu} \,] := [\, g_{\mu\nu} \,]^{-1} \,. \tag{42}$$

Ob es sich um Koeffizienten der Metrik oder der inversen Metrik handelt, wird in der Notation einzig mit der Stellung der Indizes angezeigt.

Definition 1.8. *Sei $(M, U, \vec{r}\,)$ ein regulär parametrisiertes Flächenstück, $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$ die Koordinatenbasisvektorfelder, $[\, g_{\mu\nu} \,]$ die metrische Matrix, g deren Determinante und $[\, g^{\mu\nu} \,]$ die inverse metrische Matrix. Die* **Divergenz** *eines stetig differenzierbaren Vektorfeldes $\vec{V} = \sum_{\mu=1}^{2} V^\mu \, \vec{e}_\mu$ ist definiert durch*

$$\operatorname{div}\left(\vec{V}\right) := \frac{1}{\sqrt{|g|}} \sum_{\mu=1}^{2} \frac{\partial}{\partial y^\mu} \left[\sqrt{|g|} \, V^\mu \right] \,. \tag{43}$$

Definition 1.9. *Sei $(M, U, \vec{r}\,)$ ein regulär parametrisiertes Flächenstück, $[\, g_{\mu\nu} \,]$ die metrische Matrix, g deren Determinante und $[\, g^{\mu\nu} \,]$ die inverse metrische Matrix. Die Anwendung des* LAPLACE-**Operator** $\mathbf{\Delta}_g$ *auf eine reellwertige zweifach stetig differenzierbare Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ ist definiert durch*

$$\mathbf{\Delta}_g f := \frac{1}{\sqrt{|g|}} \sum_{\mu,\nu=1}^{2} \frac{\partial}{\partial y^\nu} \left[\sqrt{|g|} \, g^{\mu\nu} \, \frac{\partial f}{\partial y^\mu} \right] \,. \tag{44}$$

In userem Beispiel der 2-Sphäre ist die inverse metrische Matrix gegeben durch

$$[\, g^{\mu\nu} \,] = \begin{bmatrix} \frac{1}{R^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R^2 \sin^2(\theta)} \end{bmatrix} \,. \tag{45}$$

Damit erhalten wir für die Anwendung des LAPLACE-**Operator** $\mathbf{\Delta}_g$ auf eine reellwertige zweifach stetig differenzierbare Funktion $f : M \subset S^2_R \to \mathbb{R}$ die Formel

$$\begin{aligned}
\mathbf{\Delta}_g f &= \frac{1}{\sqrt{|g|}} \sum_{\mu,\nu=1}^{2} \frac{\partial}{\partial y^\nu} \left[\sqrt{|g|} \, g^{\mu\nu} \, \frac{\partial f}{\partial y^\mu} \right] \qquad (46) \\
&= \frac{1}{R^2 \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[R^2 \sin(\theta) \, \frac{1}{R^2} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right] + \frac{1}{R^2 \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \phi} \left[R^2 \sin(\theta) \, \frac{1}{R^2 \sin^2(\theta)} \frac{\partial f}{\partial \phi} \right] \\
&= \frac{1}{R^2 \sin(\theta)} \left[\cos(\theta) \, \frac{\partial f}{\partial \theta} + \sin(\theta) \, \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} \right] + \frac{1}{R^2 \sin^2(\theta)} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} \\
&= \frac{\cot(\theta)}{R^2} \frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{1}{R^2 \sin^2(\theta)} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} \,.
\end{aligned}$$

Für $\boldsymbol{\Delta}_g$ als Differentialoperator resultiert daraus der Ausdruck

$$\boldsymbol{\Delta}_g = \frac{\cot(\theta)}{R^2}\,\partial_\theta + \frac{1}{R^2}\,\partial_{\theta\theta} + \frac{1}{R^2\sin^2(\theta)}\,\partial_{\phi\phi}\,. \tag{47}$$

2 Koordinatisierungen von offenen Teilmengen von $\mathbb{R}^n$

2.1 Grundbegriffe

2.1.1 Koordinatisierungen

In diesem Abschnitt wenden wir uns Koordinatisierungen von offenen Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ zu.

Definition 2.1. *Seien $U, M \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Eine* **Koordinatisierung** $(M, U, \vec{r})$ *ist eine unendlich oft stetig differenzierbare bijektive Abbildung $\vec{r} : U \to M$ mit unendlich oft stetig differenzierbarer Inversen (d.h. $\vec{r}$ ist ein unendlichfacher Diffeomorphismus).*

Die Definition 2.1 und die davon abgeleitete Notation $(M, U, \vec{r})$ ist bewusst ganz analog zu jener in Definition 1.1 gewählt worden. Der Unterschied liegt darin, dass M nun eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ ist und folglich auch mit n Koordinaten beschrieben werden muss. Grob gesagt heisst das, dass M die gleiche Dimension besitzt wie $\mathbb{R}^n$. Das einfachste Beispiel einer Koordinatisierung ist die Identität, also

$$U = M = \mathbb{R}^n \quad \text{und} \quad \vec{r} \equiv \mathbb{1}\,. \tag{48}$$

Im folgenden verwenden wir die Notationen

$$\begin{aligned} \left\{\hat{x}^1, \ldots, \hat{x}^n\right\} &\equiv \text{Kartesische Standardkoordinaten} \\ \left\{x^1, \ldots, x^n\right\} &\equiv \text{Satz beliebiger Koordinaten} \\ \left\{\tilde{x}^1, \ldots, \tilde{x}^n\right\} &\equiv \text{Satz beliebiger Koordinaten.} \end{aligned} \tag{49}$$

Die Abbildung $\vec{r}$ schreiben wir dabei jeweils in der Form

$$\vec{r}\left(x^1, \ldots, x^n\right) = \begin{bmatrix} \hat{x}^1\left(x^1, \ldots, x^n\right) \\ \vdots \\ \hat{x}^n\left(x^1, \ldots, x^n\right) \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \tilde{\vec{r}}\left(\tilde{x}^1, \ldots, \tilde{x}^n\right) = \begin{bmatrix} \hat{x}^1\left(\tilde{x}^1, \ldots, \tilde{x}^n\right) \\ \vdots \\ \hat{x}^n\left(\tilde{x}^1, \ldots, \tilde{x}^n\right) \end{bmatrix}. \tag{50}$$

Für den trivialen Fall, dass $\vec{r}$ die Identität ist, ergibt sich ganz einfach

$$\hat{r}\left(\hat{x}^1, \ldots, \hat{x}^n\right) = \begin{bmatrix} \hat{x}^1 \\ \vdots \\ \hat{x}^n \end{bmatrix}. \tag{51}$$

Eines der wichtigsten Beispiele sind die bekannten Kugelkoordinaten in $\mathbb{R}^3$, d.h. $(M, U, \vec{r})$ mit

$$\begin{aligned} M &:= \mathbb{R}^3 \setminus \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ \mid x \geq 0,\ y = 0\right\} \\ U &:= (0, \infty) \times (0, \pi) \times (0, 2\pi) \end{aligned} \tag{52}$$

und

$$\vec{r}(r,\theta,\phi) := \begin{bmatrix} x(r,\theta,\phi) \\ y(r,\theta,\phi) \\ z(r,\theta,\phi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r\sin(\theta)\cos(\phi) \\ r\sin(\theta)\sin(\phi) \\ r\cos(\theta) \end{bmatrix} . \tag{53}$$

Im Unterschied zur Situation bei regulär parametrisierten Flächenstücken, können wir hier, weil M eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ ist, auf die Diskussion über die Erweiterung der Begriffe Stetigkeit und Differenzierbarkeit auf Funktionen $f : \mathbb{R}^l \to M$ und $g : M \to \mathbb{R}^m$ verzichten. Da $\vec{r}$ ein unendlichfacher Diffeomorphismus sein muss, werden diese Eigenschaften automatisch auf die Kombinationen $\vec{r}^{\,-1} \circ f$ und $g \circ \vec{r}$ übertragen, wenn f bzw. g sie besitzen. Das heisst, wenn f bzw. g ausgedrückt in den einen Koordinaten stetig oder differenzierbar ist, dann gilt das auch in beliebigen andern Koordinaten. Stetigkeit und Differenzierbarkeit werden damit zu koordinatenunabhängigen Begriffen!

2.1.2 Koordinatenwechsel, partielle Ableitungen und Jacobi-Matrix

Sei $U, \tilde{U}, M \subseteq \mathbb{R}$ offen, $(M, U, \vec{r})$ und $\left(M, \tilde{U}, \tilde{\vec{r}}\right)$ zwei Koordinatisierungen von M und $f : M \to \mathbb{R}$ eine differenzierbar Funktion. Wir können f dann durch beide Koordinaten ausdrücken, nämlich

$$f\left(x^1, \ldots, x^n\right) \equiv f \circ \vec{r} \equiv \text{ Formel für } f \text{ mit } \left\{x^1, \ldots, x^n\right\} \tag{54}$$

$$f\left(\tilde{x}^1, \ldots, \tilde{x}^n\right) \equiv f \circ \tilde{\vec{r}} \equiv \text{ Formel für } f \text{ mit } \left\{\tilde{x}^1, \ldots, \tilde{x}^n\right\} . \tag{55}$$

Um die Notation möglichst einfach zu halten, schreiben wir

$$\frac{\partial f}{\partial x^\mu} := \frac{\partial\left(f \circ \vec{r}\right)}{\partial x^\mu} \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial \tilde{x}^\alpha} := \frac{\partial\left(f \circ \tilde{\vec{r}}\right)}{\partial \tilde{x}^\alpha} \quad \text{für alle } \mu, \alpha \in \{1, \ldots, n\}. \tag{56}$$

Gibt es einen einfachen Zusammenhang zwischen den partiellen Ableitungen einer Funktion bezüglich der verschiedenen Koordinaten? Da $\vec{r}$ und $\tilde{\vec{r}}$ beides unendlichfache Diffeomorphismen sein müssen, sind auch die Koordinatenwechselfunktionen

$$\vec{r} \circ \tilde{\vec{r}}^{\,-1} = \begin{bmatrix} x^1\left(\tilde{x}^1, \ldots, \tilde{x}^n\right) \\ \vdots \\ x^n\left(\tilde{x}^1, \ldots, \tilde{x}^n\right) \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \tilde{\vec{r}} \circ \vec{r}^{\,-1} = \begin{bmatrix} \tilde{x}^1\left(x^1, \ldots, x^n\right) \\ \vdots \\ \tilde{x}^n\left(x^1, \ldots, x^n\right) \end{bmatrix} \tag{57}$$

unendlichfache Diffeomorphismen und die Kettenregel liefert uns die Antwort. Für alle $\mu \in \{1, \ldots, n\}$ gilt

$$\frac{\partial f}{\partial x^\mu} = \frac{\partial\left(f \circ \vec{r}\right)}{\partial x^\mu} = \frac{\partial\left(f \circ \tilde{\vec{r}} \circ \tilde{\vec{r}}^{\,-1} \circ \vec{r}\right)}{\partial x^\mu} = \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial \tilde{x}^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial\left(f \circ \tilde{\vec{r}}\right)}{\partial \tilde{x}^\alpha} = \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial \tilde{x}^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial f}{\partial \tilde{x}^\alpha} . \tag{58}$$

Analog finden wir für alle $\alpha \in \{1, \ldots, n\}$ auch

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^\alpha} = \sum_{\mu=1}^{n} \frac{\partial x^\mu}{\partial \tilde{x}^\alpha} \frac{\partial}{\partial x^\mu} . \tag{59}$$

Dies lässt sich in Matrixschreibweise darstellen, mit Hilfe der JACOBI-Matrix[1]

$$\left[\frac{\partial x^\mu}{\partial \tilde{x}^\alpha}\right] := \frac{\partial(x^1,\ldots,x^n)}{\partial(\tilde{x}^1,\ldots,\tilde{x}^n)} := \begin{bmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial \tilde{x}^1} & \cdots & \frac{\partial x^n}{\partial \tilde{x}^1} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x^1}{\partial \tilde{x}^n} & \cdots & \frac{\partial x^n}{\partial \tilde{x}^n} \end{bmatrix} \tag{60}$$

und ihrer Inversen

$$\left[\frac{\partial \tilde{x}^\alpha}{\partial x^\mu}\right] := \frac{\partial(\tilde{x}^1,\ldots,\tilde{x}^n)}{\partial(x^1,\ldots,x^n)} := \begin{bmatrix} \frac{\partial \tilde{x}^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial \tilde{x}^n}{\partial x^1} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \tilde{x}^1}{\partial x^n} & \cdots & \frac{\partial \tilde{x}^n}{\partial x^n} \end{bmatrix}. \tag{61}$$

Wir schreiben die partiellen Ableitungen in die $n \times 1$-Matrizen

$$\left[\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^\alpha}\right] := \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^n} \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \left[\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right] := \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x^1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x^n} \end{bmatrix} \tag{62}$$

und finden dann

$$\left[\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^\alpha}\right] = \left[\frac{\partial x^\mu}{\partial \tilde{x}^\alpha}\right] \cdot \left[\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right] \quad \text{bzw.} \quad \left[\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right] = \left[\frac{\partial \tilde{x}^\alpha}{\partial x^\mu}\right] \cdot \left[\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^\alpha}\right]. \tag{63}$$

In unserem Beispiel von Kugelkoordinaten auf $M \subset \mathbb{R}^3$ finden wir

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\phi)} = \begin{bmatrix} \sin(\theta)\cos(\phi) & \sin(\theta)\sin(\phi) & \cos(\theta) \\ r\cos(\theta)\cos(\phi) & r\cos(\theta)\sin(\phi) & -r\sin(\theta) \\ -r\sin(\theta)\sin(\phi) & r\sin(\theta)\cos(\phi) & 0 \end{bmatrix} \tag{64}$$

und

$$\frac{\partial(r,\theta,\phi)}{\partial(x,y,z)} = \begin{bmatrix} \sin(\theta)\cos(\phi) & \frac{\cos(\theta)\cos(\phi)}{r} & -\frac{\sin(\phi)}{r\sin(\theta)} \\ \sin(\theta)\sin(\phi) & \frac{\cos(\theta)\sin(\phi)}{r} & \frac{\cos(\phi)}{r\sin(\theta)} \\ \cos(\theta) & -\frac{\sin(\theta)}{r} & 0 \end{bmatrix}. \tag{65}$$

2.1.3 Parametrisierte Kurven, Tangentialvektoren, Vektorfelder

Die Definitionen in diesem Abschnitt sind ganz analog zu jenen im entsprechenden Abschnitt über regulär parametrisierte Flächenstücke.

Definition 2.2. *Seien $U, M \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $(M, U, \vec{r})$ eine Koordinatisierung von M, $l \in \mathbb{N}$ und $b > a > 0$. Eine l-fach stetig differenzierbare Abbildung $\vec{\gamma} : [a,b] \to M$ heisst* **l-fach stetig differenzierbare parametrisierte Kurve auf M.**

[1] **Achtung:** In der Literatur wird manchmal auch die inverse oder die transponierte Matrix als JACOBI-Matrix bezeichnet! Es gibt diesbezüglich keine einheitlichen Konventionen!

Üblicherweise wird man eine parametrisierte Kurve $\vec{\gamma} : [\,a, b\,] \to M$ mit Hilfe der Koordinaten beschreiben, d.h. durch die Angabe von $\vec{r}^{\,-1} \circ \vec{\gamma}$. Wenn wir den reellen Parameter t nennen, schreibt sich dies als

$$\vec{r}^{\,-1} \circ \vec{\gamma}(t) = \begin{bmatrix} x^1(t) \\ \vdots \\ x^n(t) \end{bmatrix} . \tag{66}$$

Wir können die Koordinatenbasisvektorfelder

$$\vec{e}_\mu := \frac{\partial\, \vec{r}}{\partial x^\mu} \quad \text{für alle } \mu \in \{1, \ldots, n\} \tag{67}$$

benutzen, um den Tangentialvektor am Punkt $p := \vec{\gamma}(t) = \vec{r}\,(x^1(t), \ldots, x^n(t))$ auszudrücken. Durch Anwendung der Kettenregel bekommen wir nämlich

$$\dot{\vec{\gamma}}(t) = \frac{d}{dt}\,\vec{\gamma}(t) = \frac{d}{dt}\,\left(\vec{r} \circ \vec{r}^{\,-1} \circ \vec{\gamma}(t)\right) = \sum_{\mu=1}^{n} \frac{dx^\mu}{dt}\frac{\partial\,\vec{r}}{\partial x^\mu} = \sum_{\mu=1}^{n} \frac{dx^\mu}{dt}\,\vec{e}_\mu\,. \tag{68}$$

Da $\vec{r}$ als Diffeomorphismus vorausgesetzt wurde, folgt dass $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ linear unabhängig sind und für die kartesischen Standardkoordinaten erhalten wir, wie zu erwarten, die Standardbasis von $\mathbb{R}^n$, d.h.

$$\hat{e}_\mu = \frac{\partial\,\hat{r}}{\partial \hat{x}^\mu} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \ \mu\text{-te Zeile} \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} . \tag{69}$$

Definition 2.3. *Seien $U, M \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $(M, U, \vec{r}\,)$ eine Koordinatisierung von M und $p \in M$. Der* **Tangentialraum T_pM von M am Punkt** *$p = \vec{r}\,(x_0^1, \ldots, x_0^n)$ ist der n-dimensionale Vektorraum, der durch die* **Koordinatenbasisvektoren** *$\{\vec{e}_1\,(x_0^1, \ldots, x_0^n)\,, \ldots, \vec{e}_n\,(x_0^1, \ldots, x_0^n)\}$ aufgespannt wird, d.h.*

$$T_pM := \operatorname{span}\left\{\vec{e}_1\left(x_0^1, \ldots, x_0^n\right), \ldots, \vec{e}_n\left(x_0^1, \ldots, x_0^n\right)\right\} \ . \tag{70}$$

Im Prinzip könnte man T_pM auf natürliche Weise mit $\mathbb{R}^n$ identifizieren. Dies wollen wir aber (analog zum Fall der Tangentialebene an ein regulär parametrisiertes Flächenstück) hier nicht tun, sondern stellen uns T_pM als Kopie von $\mathbb{R}^n$ mit Ursprung am Punkte $p \in M$ vor. Ebenso soll ein Vektorfeld auf M bedeuten, an jedem Punkt $p \in M$ einen Tangentialvektor aus T_pM auszuwählen.

Definition 2.4. *Seien $U, M \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $(M, U, \vec{r}\,)$ eine Koordinatisierung von M. Unter einem* **Vektorfeld** *auf M verstehen wir eine Abbildung der Form*

$$p \mapsto \vec{V}(p) \in T_pM\,. \tag{71}$$

Wir untersuchen nun die Beziehung zwischen den Koordinatenbasisvektorfeldern zweier Koordinatisierungen der selben offenen Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}^n$.

Lemma 2.1. *Seien $U, \tilde{U}, M \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $(M, U, \vec{r})$ und $\left(M, \tilde{U}, \tilde{\vec{r}}\right)$ zwei Koordinatisierungen von M. Dann gelten zwischen den Koordinatenbasisvektorfeldern $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ und $\left\{\tilde{\vec{e}}_1, \ldots, \tilde{\vec{e}}_n\right\}$ die Beziehungen*

$$\tilde{\vec{e}}_\alpha = \sum_{\mu=1}^{n} \frac{\partial x^\mu}{\partial \tilde{x}^\alpha} \, \vec{e}_\mu \quad \textit{und} \quad \vec{e}_\mu = \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial \tilde{x}^\alpha}{\partial x^\mu} \, \tilde{\vec{e}}_\alpha \tag{72}$$

für alle $\mu, \alpha \in \{1, \ldots, n\}$.

Beweis: Mit Hilfe der Kettenregel finden wir

$$\begin{aligned} \tilde{\vec{e}}_\alpha = \frac{\partial \tilde{\vec{r}}}{\partial \tilde{x}^\alpha} = \frac{\partial \left(\vec{r} \circ \vec{r}^{\,-1} \circ \tilde{\vec{r}}\right)}{\partial \tilde{x}^\alpha} &= \sum_{\mu=1}^{n} \frac{\partial x^\mu}{\partial \tilde{x}^\alpha} \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^\mu} \\ &= \sum_{\mu=1}^{n} \frac{\partial x^\mu}{\partial \tilde{x}^\alpha} \, \vec{e}_\mu \quad \text{für alle } \alpha \in \{1, \ldots, n\}. \end{aligned} \tag{73}$$

Die umgekehrte Beziehung folgt sofort aus der Tatsache, dass $\left[\frac{\partial x^\mu}{\partial \tilde{x}^\alpha}\right]$ und $\left[\frac{\partial \tilde{x}^\alpha}{\partial x^\mu}\right]$ zueinander inverse Matrizen sind. □

Daraus lässt sich sofort das Transformationsverhalten der Komponenten eines Vektorfeldes unter Koordinatenwechsel gewinnen.

Lemma 2.2. *Seien $U, \tilde{U}, M \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $(M, U, \vec{r})$ und $\left(M, \tilde{U}, \tilde{\vec{r}}\right)$ zwei Koordinatisierungen von M und $\vec{V}$ ein Vektorfeld auf M mit folgenden Darstellungen bezüglich der Koordinatenbasisvektorfelder $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ und $\left\{\tilde{\vec{e}}_1, \ldots, \tilde{\vec{e}}_n\right\}$:*

$$\vec{V} = \sum_{\mu=1}^{n} V^\mu \, \vec{e}_\mu = \sum_{\alpha=1}^{n} \tilde{V}^\alpha \, \tilde{\vec{e}}_\alpha \tag{74}$$

Dann gelten zwischen den Koeffizienten die Beziehungen

$$\tilde{V}^\alpha = \sum_{\mu=1}^{n} \frac{\partial \tilde{x}^\alpha}{\partial x^\mu} \, V^\mu \quad \textit{und} \quad V^\mu = \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial x^\mu}{\partial \tilde{x}^\alpha} \, \tilde{V}^\alpha \tag{75}$$

für alle $\mu, \alpha \in \{1, \ldots, n\}$.

Beweis: Durch Einsetzen der Transformationsformel für die Koordinatenbasisvektorfelder aus Lemma 2.1 finden wir

$$\vec{V} = \sum_{\mu=1}^{n} V^\mu \, \vec{e}_\mu = \sum_{\mu=1}^{n} V^\mu \underbrace{\sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial \tilde{x}^\alpha}{\partial x^\mu} \, \tilde{\vec{e}}_\alpha}_{= \vec{e}_\mu} = \sum_{\alpha=1}^{n} \underbrace{\sum_{\mu=1}^{n} \frac{\partial \tilde{x}^\alpha}{\partial x^\mu} \, V^\mu}_{= \tilde{V}^\alpha} \, \tilde{\vec{e}}_\alpha \,. \tag{76}$$

Die Identifizierung der Klammer im letzten Term mit $\tilde{V}^\alpha$ ergibt sich aus der Eindeutigkeit der Darstellung eines Vektors bezüglich jeder Basis. Die umgekehrte Beziehung folgt sofort aus der Tatsache, dass $\left[\frac{\partial x^\mu}{\partial \tilde{x}^\alpha}\right]$ und $\left[\frac{\partial \tilde{x}^\alpha}{\partial x^\mu}\right]$ zueinander inverse Matrizen sind. □

In unserem Beispiel von Kugelkoordinaten auf $M \subset \mathbb{R}^3$ sind die Koordinatenbasisvektorfelder

$$\vec{e}_r = \begin{bmatrix} \sin(\theta)\cos(\phi) \\ \sin(\theta)\sin(\phi) \\ \cos(\theta) \end{bmatrix}, \ \vec{e}_\theta = \begin{bmatrix} r\cos(\theta)\cos(\phi) \\ r\cos(\theta)\sin(\phi) \\ -r\sin(\theta) \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{e}_\phi = \begin{bmatrix} -r\sin(\theta)\sin(\phi) \\ r\sin(\theta)\cos(\phi) \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{77}$$

2.2 Geometrische Grössen

2.2.1 Skalarprodukt, Metrik und Kurvenlänge

Definition 2.5. *Seien $U, M \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $(M, U, \vec{r})$ eine Koordinatisierung von M und $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ die Koordinatenbasisvektorfelder. Die Koeffizienten*

$$g_{\mu\nu} := \langle \vec{e}_\mu, \vec{e}_\nu \rangle \quad \textit{für alle} \quad \mu, \nu \in \{1, \ldots, n\} \tag{78}$$

heissen **metrische Koeffizienten**, *die zugehörige Matrix bezeichnet man als* **metrische Matrix** *und die dazu inverse Matrix heisst* **inverse metrische Matrix***:*

$$[\, g_{\mu\nu} \,] := \begin{bmatrix} \langle \vec{e}_1, \vec{e}_1 \rangle & \ldots & \langle \vec{e}_1, \vec{e}_n \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle \vec{e}_n, \vec{e}_1 \rangle & \ldots & \langle \vec{e}_n, \vec{e}_n \rangle \end{bmatrix} \quad \textit{und} \quad [\, g^{\mu\nu} \,] := [\, g_{\mu\nu} \,]^{-1} \tag{79}$$

Ganz analog zur Situation auf einem regulär parametrisierten Flächenstück bekommen wir für das Skalarprodukt zweier Vektorfelder $\vec{V} = \sum_{\mu=1}^n V^\mu \, \vec{e}_\mu$ und $\vec{W} = \sum_{\nu=1}^n W^\nu \, \vec{e}_\nu$ den Ausdruck

$$\left\langle \vec{V}, \vec{W} \right\rangle = \sum_{\mu,\nu=1}^n g_{\mu\nu} \, V^\mu W^\nu = \begin{bmatrix} V^1 & \ldots & V^n \end{bmatrix} \cdot [\, g_{\mu\nu} \,] \cdot \begin{bmatrix} W^1 \\ \vdots \\ W^n \end{bmatrix} \tag{80}$$

und die algebraischen Eigenschaften des Skalarproduktes werden auf die metrischen Koeffizienten vererbt.

Lemma 2.3. *Seien $U, M \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $(M, U, \vec{r})$ eine Koordinatisierung von M und $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ die Koordinatenbasisvektorfelder. Die metrische Matrix $[\, g_{\mu\nu} \,]$ ist dann symmetrisch und positiv definit.*

Beweis: Siehe Lemma 1.1. □

Ebenso gilt die analoge Formel für die Länge einer parametrisierten Kurve $\gamma : [\, a, b \,] \to M$ mit $(\vec{r}^{\,-1} \circ \gamma)\,(t) = (x^1(t), \ldots, x^n(t))$, nämlich

$$\text{Länge}[\gamma] = \int_a^b \sqrt{\sum_{\mu,\nu=1}^n g_{\mu\nu} \, \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt}} \, dt \,. \tag{81}$$

Wir betrachten nun die Beziehung zwischen den metrischen Koeffizienten zweier Koordinatisierungen der selben offenen Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}^n$.

Lemma 2.4. *Seien $U, \tilde{U}, M \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $(M, U, \vec{r})$ und $\left(M, \tilde{U}, \tilde{\vec{r}}\right)$ zwei Koordinatisierungen von M und $g_{\mu\nu}$ und $\tilde{g}_{\alpha\beta}$ die zugehörigen metrischen Koeffizienten. Dann gilt*

$$\tilde{g}_{\alpha\beta} = \sum_{\mu,\nu=1}^{n} \frac{\partial x^\mu}{\partial \tilde{x}^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial \tilde{x}^\beta} g_{\mu\nu} \quad \text{und} \quad g_{\mu\nu} = \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} \frac{\partial \tilde{x}^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \tilde{x}^\beta}{\partial x^\nu} \tilde{g}_{\alpha\beta} \tag{82}$$

für alle $\mu, \nu, \alpha, \beta \in \{1, \ldots, n\}$.

Beweis: Durch Einsetzen der Transformationsformel für die Koordinatenbasisvektorfelder aus Lemma 2.1 finden wir

$$\begin{aligned} \tilde{g}_{\alpha\beta} &= \left\langle \tilde{\vec{e}}_\alpha, \tilde{\vec{e}}_\beta \right\rangle = \left\langle \sum_{\mu=1}^{n} \frac{\partial x^\mu}{\partial \tilde{x}^\alpha} \vec{e}_\mu, \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial x^\nu}{\partial \tilde{x}^\beta} \vec{e}_\nu \right\rangle = \sum_{\mu,\nu=1}^{n} \frac{\partial x^\mu}{\partial \tilde{x}^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial \tilde{x}^\beta} \langle \vec{e}_\mu, \vec{e}_\nu \rangle \\ &= \sum_{\mu,\nu=1}^{n} \frac{\partial x^\mu}{\partial \tilde{x}^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial \tilde{x}^\beta} g_{\mu\nu} \end{aligned} \tag{83}$$

für alle $\alpha, \beta \in \{1, \ldots, n\}$. Die umgekehrte Beziehung folgt aus einer analogen Rechnung oder aus der Tatsache, dass $\left[\frac{\partial x^\mu}{\partial \tilde{x}^\alpha}\right]$ und $\left[\frac{\partial \tilde{x}^\alpha}{\partial x^\mu}\right]$ zueinander inverse Matrizen sind. □

Diese Transformationsregeln lassen sich auch in Matrixschreibweise angeben, man bekommt

$$[\,\tilde{g}_{\alpha\beta}\,] = \frac{\partial(x^1, \ldots, x^n)}{\partial(\tilde{x}^1, \ldots, \tilde{x}^n)} \cdot [\,g_{\mu\nu}\,] \cdot \frac{\partial(x^1, \ldots, x^n)}{\partial(\tilde{x}^1, \ldots, \tilde{x}^n)}^T \tag{84}$$

und

$$[\,g_{\mu\nu}\,] = \frac{\partial(\tilde{x}^1, \ldots, \tilde{x}^n)}{\partial(x^1, \ldots, x^n)} \cdot [\,\tilde{g}_{\alpha\beta}\,] \cdot \frac{\partial(\tilde{x}^1, \ldots, \tilde{x}^n)}{\partial(x^1, \ldots, x^n)}^T . \tag{85}$$

In kartesischen Standardkoordinaten bilden die metrischen Koeffizienten einfach die Einheitsmatrix, d.h.

$$[\,\hat{g}_{\mu\nu}\,] = [\,\hat{g}^{\mu\nu}\,] = \mathbb{1}\,. \tag{86}$$

Bei einem Wechsel von kartesischen Standardkoordinaten zu einem Satz beliebiger Koordinaten ergibt sich folglich die sehr einfache Transformationsformel

$$[\,g_{\mu\nu}\,] = \frac{\partial(\hat{x}^1, \ldots, \hat{x}^n)}{\partial(x^1, \ldots, x^n)} \cdot \frac{\partial(\hat{x}^1, \ldots, \hat{x}^n)}{\partial(x^1, \ldots, x^n)}^T . \tag{87}$$

Für unser Beispiel von Kugelkoordinaten in $M \subset \mathbb{R}^3$ erhalten wir

$$[\,g_{\mu\nu}\,] := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\sin^2(\theta) \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad [\,g^{\mu\nu}\,] := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2\sin^2(\theta)} \end{bmatrix} . \tag{88}$$

Folglich lässt sich die Länge einer Kurve $\gamma : [a,b] \to M$, welche durch $r(t)$, $\theta(t)$ und $\phi(t)$ gegeben ist, berechnen durch

$$\text{Länge}[\gamma] = \int_a^b \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2(\theta)\dot{\phi}^2}\, dt\,. \tag{89}$$

2.2.2 Volumenelement und Integrale

Seien $U, M \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $V \subseteq M$ offen. Aus Analysis I+II wissen wir (Siehe [1]), wie das Integral einer integrierbaren Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ über V zu berchnen ist. In kartesischen Standardkoordinaten erhält man

$$\int_V f\, dM = \int_V f\left(\hat{x}^1, \ldots, \hat{x}^n\right)\, d\hat{x}^1 \cdot \ldots \cdot d\hat{x}^n \tag{90}$$

und beim Wechsel zu einer beliebigen Koordinatisierung $(M, U, \vec{r})$ ergibt sich aus der Variablensubstitutionsregel die Formel

$$\int_V f\, dM = \int_{\vec{r}^{\,-1}(V)} f\left(x^1, \ldots, x^n\right) \left|\det\left(\frac{\partial(\hat{x}^1, \ldots, \hat{x}^n)}{\partial(x^1, \ldots, x^n)}\right)\right| dx^1 \cdot \ldots \cdot dx^n\,. \tag{91}$$

Dies lässt sich wieder mit Hilfe der Metrik ausdrücken. Dazu benötigen wir die Determinante der metrischen Matrix

$$g := \det\left([\, g_{\mu\nu}\,]\right)\,. \tag{92}$$

Lemma 2.5. *Seien $U, \tilde{U}, M \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $(M, U, \vec{r})$ und $\left(M, \tilde{U}, \tilde{\vec{r}}\right)$ zwei Koordinatisierungen von M und $g := \det\left([\, g_{\mu\nu}\,]\right)$ und $\tilde{g} := \det\left([\, \tilde{g}_{\alpha\beta}\,]\right)$ die Determinanten der metrischen Matrizen. Dann gilt*

$$\sqrt{|\tilde{g}|} = \left|\det\left(\frac{\partial(x^1, \ldots, x^n)}{\partial(\tilde{x}^1, \ldots, \tilde{x}^n)}\right)\right| \sqrt{|g|}\,. \tag{93}$$

Beweis: Durch Einsetzen der Transformationsformel für die metrische Matrix aus Lemma 2.4 finden wir

$$\begin{aligned}\tilde{g} &= \det\left(\frac{\partial(x^1, \ldots, x^n)}{\partial(\tilde{x}^1, \ldots, \tilde{x}^n)} \cdot [\, g_{\mu\nu}\,] \cdot \frac{\partial(x^1, \ldots, x^n)}{\partial(\tilde{x}^1, \ldots, \tilde{x}^n)}^T\right) \\ &= \det{}^2\left(\frac{\partial(x^1, \ldots, x^n)}{\partial(\tilde{x}^1, \ldots, \tilde{x}^n)}\right) \det\left([\, g_{\mu\nu}\,]\right) = \det{}^2\left(\frac{\partial(x^1, \ldots, x^n)}{\partial(\tilde{x}^1, \ldots, \tilde{x}^n)}\right) g\,.\end{aligned} \tag{94}$$

Durch ziehen der Wurzel erhalten wir sofort die Behauptung. □

Mit Hilfe von Lemma 2.5 können wir nun das Volumenelement in beliebigen Koordinaten ausdrücken.

Lemma 2.6. *Seien $U, M \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $(M, U, \vec{r}\,)$ eine Koordinatisierung von M und $g := \det([\,g_{\mu\nu}\,])$ die Determinante der metrischen Matrix. Dann gilt*

$$dM = \sqrt{|g|}\, dx^1 \cdot \ldots \cdot dx^n \,.$$

Beweis: In kartesischen Standardkoordinaten gilt dies trivialerweise, denn es ist $\sqrt{|\hat{g}|} = \hat{g} = 1$ und folglich

$$dM = d\hat{x}^1 \cdot \ldots \cdot d\hat{x}^n = \underbrace{\sqrt{|\hat{g}|}}_{=1}\, d\hat{x}^1 \cdot \ldots \cdot d\hat{x}^n \,. \tag{95}$$

Transformieren wir dies mit Hilfe von Lemma 2.5 in die neuen Koordinaten und benutzen (91), so erhalten wir

$$\begin{aligned} dM &= \left| \det \left(\frac{\partial(\hat{x}^1, \ldots, \hat{x}^n)}{\partial(x^1, \ldots, x^n)} \right) \right| dx^1 \cdot \ldots \cdot dx^n & (96) \\ &= \underbrace{\left| \det \left(\frac{\partial(\hat{x}^1, \ldots, \hat{x}^n)}{\partial(x^1, \ldots, x^n)} \right) \right| \underbrace{\sqrt{|\hat{g}|}}_{=1}}_{=\sqrt{|g|}} dx^1 \cdot \ldots \cdot dx^n = \sqrt{|g|}\, dx^1 \cdot \ldots \cdot dx^n \,. \end{aligned}$$

□

Das Integral einer integrierbaren Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ über V lässt sich also ausdrücken durch

$$\int_V f\, dM = \int_{\vec{r}^{\,-1}(V)} f\left(x^1, \ldots, x^n\right)\, \sqrt{|g|}\, dx^1 \cdot \ldots \cdot dx^n \,. \tag{97}$$

Insbesondere können wir nun das Volumen von V berechnen durch

$$\mathrm{Vol}[V] = \int_V 1\, dM = \int_{\vec{r}^{\,-1}(V)} \sqrt{|g|}\, dx^1 \cdot \ldots \cdot dx^n \,. \tag{98}$$

In unserem Beispiel von Kugelkoordinaten auf $M \subset \mathbb{R}^3$ finden wir

$$\sqrt{|g|} = r^2 \sin(\theta) \quad \text{und} \quad dM = r^2 \sin(\theta)\, dr\, d\theta\, d\phi \,. \tag{99}$$

2.2.3 Divergenz und Laplace-Operator

Definition 2.6. *Seien $U, M \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $(M, U, \vec{r}\,)$ eine Koordinatisierung von M, $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ die Koordinatenbasisvektorfelder, $[\,g_{\mu\nu}\,]$ die metrische Matrix, g deren Determinante und $[\,g^{\mu\nu}\,]$ die inverse metrische Matrix. Die* **Divergenz** *eines stetig differenzierbaren Vektorfeldes $\vec{V} = \sum_{\mu=1}^n V^\mu\, \vec{e}_\mu$ ist definiert durch*

$$\mathrm{div}\left(\vec{V}\right) := \frac{1}{\sqrt{|g|}} \sum_{\mu=1}^n \frac{\partial}{\partial y^\mu} \left[\sqrt{|g|}\, V^\mu\right] \,. \tag{100}$$

Definition 2.7. *Seien $U, M \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $(M, U, \vec{r})$ eine Koordinatisierung von M, $[\, g_{\mu\nu} \,]$ die metrische Matrix, g deren Determinante und $[\, g^{\mu\nu} \,]$ die inverse metrische Matrix. Die Anwendung des* LAPLACE-**Operator** $\boldsymbol{\Delta}_g$ *auf eine reellwertige zweifach stetig differenzierbare Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ ist definiert durch*

$$\boldsymbol{\Delta}_g f := \frac{1}{\sqrt{|g|}} \sum_{\mu,\nu=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left[\sqrt{|g|}\, g^{\mu\nu} \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \right] . \tag{101}$$

Mit diesen Definitionen sind Divergenz und LAPLACE-Operator unter Koordinatenwechsel invariante Grössen, wie das folgende Lemma zeigt:

Lemma 2.7. *Seien $U, \tilde{U}, M \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $(M, U, \vec{r})$ und $\left(M, \tilde{U}, \tilde{\vec{r}}\right)$ zwei Koordinatisierungen von M, $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ und $\left\{\tilde{\vec{e}}_1, \ldots, \tilde{\vec{e}}_n\right\}$ die Koordinatenbasisvektorfelder, $[\, g^{\mu\nu} \,]$ und $[\, g^{\alpha\beta} \,]$ die metrischen Matrizen, g und $\tilde{g}$ deren Determinanten, $f : M \to \mathbb{R}$ eine reellwertige zweifach stetig differenzierbare Funktion auf M und $\vec{V} = \sum_{\mu=1}^n V^\mu\, \vec{e}_\mu = \sum_{\alpha=1}^n \tilde{V}^\alpha\, \tilde{\vec{e}}_\alpha$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf M. Dann gelten*

$$\frac{1}{\sqrt{|\tilde{g}|}} \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \tilde{y}^\alpha} \left[\sqrt{|\tilde{g}|}\, \tilde{V}^\alpha \right] = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \sum_{\mu=1}^{n} \frac{\partial}{\partial y^\mu} \left[\sqrt{|g|}\, V^\mu \right] \tag{102}$$

und

$$\frac{1}{\sqrt{|\tilde{g}|}} \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^\beta} \left[\sqrt{|\tilde{g}|}\, \tilde{g}^{\alpha\beta} \frac{\partial f}{\partial \tilde{x}^\alpha} \right] = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \sum_{\mu,\nu=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left[\sqrt{|g|}\, g^{\mu\nu} \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \right] . \tag{103}$$

Beweis: Der Beweis dieses Satzes kann durch Einsetzen der bereits bekannten Transformationsformeln für die metrische Matrix und deren Determinate geführt werden. Die Rechnungen sind nicht besonders lehrreich aber ziemlich lang (Siehe [5] oder [6]). □

In kartesischen Standardkoordinaten stimmt diese Definition mit der aus Analysis I+II überein, denn für $[\, g_{\mu\nu} \,] = \mathbb{1}$ ergibt sich

$$\boldsymbol{\Delta}_g f := \frac{1}{\sqrt{|1|}} \sum_{\mu,\nu=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \hat{x}^\nu} \left[\sqrt{|1|}\, \delta^{\mu\nu} \frac{\partial f}{\partial \hat{x}^\mu} \right] = \sum_{\mu=1}^{n} \partial_{\hat{x}^\mu \hat{x}^\mu} f\, . \tag{104}$$

In unserem Beispiel von Kugelkoordinaten auf $M \subset \mathbb{R}^3$ finden wir

$$\begin{aligned}
\mathbf{\Delta}_g f &= \frac{1}{\sqrt{|g|}} \sum_{\mu,\nu=1}^{3} \frac{\partial}{\partial y^\nu} \left[\sqrt{|g|}\, g^{\mu\nu} \frac{\partial f}{\partial y^\mu} \right] \qquad (105) \\
&= \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \sin(\theta)\, 1 \frac{\partial f}{\partial r} \right] + \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[r^2 \sin(\theta) \frac{1}{r^2} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right] \\
&\quad + \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \phi} \left[r^2 \sin(\theta) \frac{1}{r^2 \sin^2(\theta)} \frac{\partial f}{\partial \phi} \right] \\
&= \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \left[2r \sin(\theta) \frac{\partial f}{\partial r} + r^2 \sin(\theta) \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} \right] + \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \left[\cos(\theta) \frac{\partial f}{\partial \theta} + \sin(\theta) \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} \right] \\
&\quad + \frac{1}{r^2 \sin^2(\theta)} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} \\
&= \frac{2}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\partial^2 f}{\partial r} + \frac{\cot(\theta)}{r^2} \frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2(\theta)} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} \,.
\end{aligned}$$

Für $\mathbf{\Delta}_g$ als Differentialoperator erhalten wir daraus den Ausdruck

$$\mathbf{\Delta}_g = \frac{2}{r}\, \partial_r + \partial_{rr} + \frac{\cot(\theta)}{r^2}\, \partial_\theta + \frac{1}{r^2}\, \partial_{\theta\theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2(\theta)}\, \partial_{\phi\phi} \,. \tag{106}$$

3 Anwendungen

3.1 Methode der Charakteristiken

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen, $a, b, c : U \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ drei stetige Funktionen und $u : U \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion, welche die quasi lineare Differentialgleichung

$$a(x, y, u) \frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y, u) \frac{\partial u}{\partial y} = c(x, y, u) \tag{107}$$

erfüllt. Wir betrachten nun den Graphen von u, die sogenannte **Integralfläche** von (107), als regulär parametrisiertes Flächenstück, d.h. $(M, U, \vec{r}\,)$ mit

$$M := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ \mid z = u(x, y),\ (x, y) \in U \right\} \quad \text{und} \quad \vec{r}(x, y) := \begin{bmatrix} x \\ y \\ u(x, y) \end{bmatrix} . \tag{108}$$

Die Koordinatenbasisvektorfelder sind

$$\vec{e}_1 = \frac{\partial\, \vec{r}(x, y)}{\partial x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ u_x \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{e}_2 = \frac{\partial\, \vec{r}(x, y)}{\partial y} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ u_y \end{bmatrix} \tag{109}$$

und für das Normalenvektorfeld erhalten wir

$$\vec{N} := \frac{\vec{e}_1 \times \vec{e}_2}{\sqrt{|g|}} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \begin{bmatrix} -\,u_x \\ -\,u_y \\ 1 \end{bmatrix} . \tag{110}$$

Aus den Koeffizientenfunktionen in (107) bilden wir das **charakteristische Vektorfeld** $\overrightarrow{ch}: U \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, definiert durch

$$\overrightarrow{ch}(x,y,z) := \begin{bmatrix} a(x,y,z) \\ b(x,y,z) \\ c(x,y,z) \end{bmatrix} . \tag{111}$$

Die zentrale Erkenntnis ist nun, dass auf M, d.h. für $z = u(x,y)$, die Differentialgleichung (107) äquivalent ist zu

$$\left\langle \overrightarrow{ch}, \vec{N} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \left[-a(x,y,u)\, u_x - b(x,y,u)\, u_y + c(x,y,u) \right] = 0\,. \tag{112}$$

Die Einschränkung des charakteristischen Vektorfeldes $\overrightarrow{ch}$ auf M ist also ein Tangentialvektorfeld auf M. Die parametrisierten Kurven des Typs $\vec{\alpha} : t \mapsto \vec{\alpha}(t) \in M$ auf M, deren Tangentialvektoren an jedem Punkt der Kurve mit $\overrightarrow{ch}$ übereinstimmen, d.h. für die gilt

$$\dot{\vec{\alpha}}(t) = \overrightarrow{ch}\left(x(t), y(t), u(x(t), y(t))\right) , \tag{113}$$

heissen **Charakteristiken** von (107). Schreiben wir

$$\vec{\alpha}(t) = \vec{r}(x(t), y(t)) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ u(t) := u(x(t), y(t)) \end{bmatrix} , \tag{114}$$

dann wird klar, dass die Charakteristiken die Lösungen des charakteristischen Differentialgleichungssystems

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a(x,y,u) \\ \dot{y} &= b(x,y,u) \\ \dot{u} &= c(x,y,u) \end{aligned} \tag{115}$$

sind. Sind a, b und c genügend anständige Funktionen, dann verläuft durch jeden Punkt von M genau eine Charakteristik[2]. Auf jeder Charakteristik lässt sich der Punkt frei wählen[3], an welchem $t = 0$ gelten soll. Wir treffen diese Wahl so, dass alle diese Punkte auf einer parametrisierten Kurve $\vec{\beta} : s \mapsto \vec{\beta}(s) \in M$ liegen, welche alle Charakteristiken transversal schneidet, d.h. für jedes s darf am Punkt $\vec{\beta}(s)$ der Winkel zwischen dem Tangentialvektor an die Kurve $\vec{\beta}$ und dem Tangentialvektor an die dort schneidende Charakteristik $\vec{\alpha}_s$ mit

$$\vec{\alpha}_s(0) = \vec{\beta}(s) \tag{116}$$

nicht Null sein. Es lässt sich zeigen, dass in so einem Fall ein offenes $\tilde{U} \subseteq \mathbb{R}^2$ und ein $\tilde{M} \subseteq M$ gefunden werden kann, so dass $\left(\tilde{M}, \tilde{U}, \tilde{\vec{r}}\right)$ mit

$$\tilde{\vec{r}}(s,t) := \vec{\alpha}_s(t) \tag{117}$$

ein regulär parametrisiertes Flächenstück ist.

[2]Dies lässt sich immer durch eine Reduktion der Form $U \mapsto \bar{U} \subset U$ bzw. $M \mapsto \bar{M} \subset M$ erreichen!

[3]Jede parametrisierte Kurve (die im allg. keine Charakteristik zu sein braucht) lässt sich in der Form $t \mapsto \tilde{t} := t + t_0$ so reparametrisieren, dass an einem beliebigen Punkt ein beliebig vorgegebener Wert des Kurvenparameters justiert werden kann.

Daraus lassen sich folgende Erkenntnisse gewinnen:

i) Um ein vollständiges und eindeutig lösbares Problem zu bekommen, muss, als Nebenbedingung zu (107), u entlang einer Kurve in U vorgegeben werden, welche an keinem Punkt von U parallel zur Projektion der Charakteristik durch den unmittelbar darüber liegenden Punkt in M verläuft.

ii) Die Lösung eines solchen Problems kann gefunden werden, indem man eine der Nebenbedingung entsprechende spezielle Lösung von (115) bestimmt, daraus $\tilde{\vec{r}}(s,t)$ berechnet und anschliessend die Parameter t und s eliminiert.

Als typisches Beispiel betrachten wir $G := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; |x| > 1,\ 0 < y < \ln\left(\frac{1}{4x^2} + 1\right)\right\}$ und $U := G \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| > 1,\ y = 0\}$, sowie eine Funktion $u : U \to \mathbb{R}$, die folgende Bedingungen erfüllt:

$$\left\{ \begin{array}{r|l} x^2 \dfrac{\partial u}{\partial x} - u \dfrac{\partial u}{\partial y} - u^2 = 0 & \text{für } (x,y) \in G \\ u(x,0) = \frac{1}{x} & \text{für } x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty) \end{array} \right. \tag{118}$$

Aus der partiellen Differentialgleichung lässt sich das charakteristische Vektorfeld ablesen, es ist demnach

$$\overrightarrow{ch} = \begin{bmatrix} x^2 \\ -u \\ u^2 \end{bmatrix} . \tag{119}$$

Wir suchen nun eine Parametrisierung $\tilde{\vec{r}}(t,s) = (x(t,s), y(t,s), u(t,s))$ der Integralfläche, so dass $\partial_t \tilde{\vec{r}}(t,s) = \overrightarrow{ch}$. Dies führt auf das charakteristische Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x^2 \\ \dot{y} &= -u \\ \dot{u} &= u^2 . \end{aligned} \tag{120}$$

Die erste und dritte Gleichung in (120) können unabhängig von den andern behandelt werden. Wir betrachten die Differentialgleichung

$$\frac{dz}{dt} = z^2 . \tag{121}$$

Die Variablen können separiert werden, d.h. es gilt

$$\frac{dz}{z^2} = dt \;\Rightarrow\; \int \frac{dz}{z^2} = \int dt \;\Rightarrow\; -\frac{1}{z} = t - a \tag{122}$$

und wir erhalten die allgemeine Lösung

$$z(t) = \frac{1}{a-t} . \tag{123}$$

Für die Lösung der zweiten Gleichung in (120) berechnen wir

$$\int z(t)\,dt = \int \frac{dt}{a-t} = -\,\ln(a-t) + b\,. \tag{124}$$

Die gesuchte Parametrisierung hat also die Form

$$\tilde{\vec{r}}(t,s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{A(s)-t} \\ \ln(C(s)-t) + B(s) \\ \frac{1}{C(s)-t} \end{bmatrix}. \tag{125}$$

Die s-Abhängigkeit lässt sich mit Hilfe der Nebenbedingung in (118) bestimmen, welche auf Teilen der x-Achse gegeben ist. Es ist deshalb sinnvoll, die Kurve auf der Integralfläche oberhalb der x-Achse durch den Parameter s zu parametrisieren:

$$\vec{\beta}(s) := \begin{bmatrix} s \\ 0 \\ \frac{1}{s} \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad s \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty) \tag{126}$$

Wir können auf jeder Charakteristik den Punkt, an welchem $t = 0$ gilt festlegen, müssen dabei aber darauf achten, dass alle diese Punkte auf einer glatten Kurve liegen. Als besonders geschickte Wahl bietet sich $\vec{\beta}(s)$ an. Es soll also gelten

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{A(s)} \\ \ln(C(s)) + B(s) \\ \frac{1}{C(s)} \end{bmatrix} = \tilde{\vec{r}}(0,s) = \vec{\beta}(s) = \begin{bmatrix} s \\ 0 \\ \frac{1}{s} \end{bmatrix}. \tag{127}$$

Für die Parametrisierung $\tilde{\vec{r}}(t,s)$ erhalten wir

$$\tilde{\vec{r}}(t,s) = \begin{bmatrix} x(t,s) \\ y(t,s) \\ u(t,s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\frac{1}{s}-t} \\ \ln(s-t) - \ln(s) \\ \frac{1}{s-t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\frac{1}{s}-t} \\ \ln\left(1 - \frac{t}{s}\right) \\ \frac{1}{s-t} \end{bmatrix}. \tag{128}$$

Um daraus eine explizite Lösung von (118) zu bekommen, müssen wir die Parameter s und t in (128) eliminieren. Wir finden zunächst

$$t = \frac{1}{s} - \frac{1}{x} = s - \frac{1}{u} \tag{129}$$

sowie

$$\frac{t}{s} = 1 - \mathrm{e}^{y} = 1 - \frac{1}{us} \;\Rightarrow\; s = \frac{1}{u}\,\mathrm{e}^{-y}\,. \tag{130}$$

Daraus lässt sich für u die quadratische Gleichung

$$\mathrm{e}^{y} u^2 - \frac{u}{x} + 1 - \mathrm{e}^{-y} = 0 \tag{131}$$

gewinnen. Deren beiden Lösungen sind

$$u(x,y) = \frac{\frac{1}{x} \pm \sqrt{\frac{1}{x^2} + 4\,(1-\mathrm{e}^y)}}{2\mathrm{e}^y}\,. \tag{132}$$

Um zu entscheiden, für welches Vorzeichen wir tatsächlich eine Lösung des Problems (118) bekommen, vergleichen wir dies mit der Nebenbedingung:

$$u(x,0) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{x} \pm \left|\frac{1}{x}\right|\right] = \frac{1}{x} \tag{133}$$

Die Wahl des Vorzeichens in (132) hängt also offenbar vom Vorzeichen von x ab. Wegen $x = \mathrm{sgn}(x)|x|$ muss die Lösung von (118) lauten

$$u(x,y) = \frac{\frac{1}{x} + \mathrm{sgn}(x)\sqrt{\frac{1}{x^2} + 4\,(1-\mathrm{e}^y)}}{2\mathrm{e}^y}\,. \tag{134}$$

3.2 Graf mit minimaler Fläche

Aufgabe:
Es seien $b > a > 0$, $d > c > 0$, $Q := [\,a,b\,] \times [\,c,d\,] \subset \mathbb{R}^2$ ein Rechteck und $g : \partial Q \to \mathbb{R}$ ein stetige Funktion auf dessen Rand. Wir suchen mit Hilfe von Variationsrechnung eine partielle Differentialgleichung für die Funktion $u : Q \to \mathbb{R}$ mit $u \equiv g$ auf dem Rand ∂Q so, dass der Graph von u eine möglichst kleine Fläche aufweist!

Lösung:
Wir parametrisieren den Graph einer Funktion $u : Q \to \mathbb{R}$, mit $u \equiv g$ auf dem Rand ∂Q, durch die Variablen x und y mit

$$\vec{r}(x,y) = \begin{bmatrix} x \\ y \\ u(x,y) \end{bmatrix}. \tag{135}$$

Sei $U := (a,b) \times (c,d) \subset \mathbb{R}^2$ und $M := \{\,(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = u(x,y),\ (x,y) \in U\}$, dann ist $(M, U, \vec{r}\,)$ ein regulär parametrisiertes Flächenstück. Die beiden Koordinatenbasisvektorfelder sind

$$\vec{e}_1 = \frac{\partial\,\vec{r}(x,y)}{\partial x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ u_x \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{e}_2 = \frac{\partial\,\vec{r}(x,y)}{\partial y} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ u_y \end{bmatrix}. \tag{136}$$

Daraus erhalten wir die Komponenten der Metrik

$$[g_{\mu\nu}] = \begin{bmatrix} \langle\vec{e}_1,\vec{e}_1\rangle & \langle\vec{e}_1,\vec{e}_2\rangle \\ \langle\vec{e}_2,\vec{e}_1\rangle & \langle\vec{e}_2,\vec{e}_2\rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+u_x^2 & u_x u_y \\ u_x u_y & 1+u_y^2 \end{bmatrix}, \tag{137}$$

das Flächenelement

$$dM = \sqrt{|g|}\,dQ = \sqrt{\left|(1+u_x^2)(1+u_y^2) - u_x^2 u_y^2\right|}\,dx\,dy \tag{138}$$

$$= \sqrt{1+u_x^2+u_y^2}\,dx\,dy = \sqrt{1+\left\langle\vec{\nabla}u,\vec{\nabla}u\right\rangle}\,dQ$$

und das Flächenfunktional

$$A[u] = \int_Q \sqrt{1 + \left\langle \vec{\nabla} u, \vec{\nabla} u \right\rangle}\, dQ = \int_c^d \int_a^b \sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}\, dx\, dy\,. \tag{139}$$

Um die kritischen Punkte von $A[u]$ zu finden, betrachten wir Variationen der Form $u + \lambda\phi$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$ und allen im Innern von Q genügend oft differenzierbaren Funktionen $\phi : Q \to \mathbb{R}$ mit $\phi \equiv 0$ auf dem Rand ∂Q. Es muss dann für alle derartigen ϕ gelten

$$\begin{aligned} 0 &= \left.\frac{d}{d\lambda}\right|_{\lambda=0} A[u + \lambda\phi] = \int_Q \left.\frac{d}{d\lambda}\right|_{\lambda=0} \sqrt{1 + \left\langle \vec{\nabla}(u + \lambda\phi), \vec{\nabla}(u + \lambda\phi) \right\rangle}\, dQ \\ &= \int_Q \left.\frac{d}{d\lambda}\right|_{\lambda=0} \sqrt{1 + \left\langle \vec{\nabla} u, \vec{\nabla} u \right\rangle + 2\lambda \left\langle \vec{\nabla} u, \vec{\nabla} \phi \right\rangle + \lambda^2 \left\langle \vec{\nabla} \phi, \vec{\nabla} \phi \right\rangle}\, dQ \\ &= \int_Q \frac{\left\langle \vec{\nabla} u, \vec{\nabla} \phi \right\rangle}{\sqrt{1 + \left\langle \vec{\nabla} u, \vec{\nabla} u \right\rangle}}\, dQ = \int_c^d \int_a^b \frac{u_x \phi_x + u_y \phi_y}{\sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}}\, dx\, dy\,. \end{aligned} \tag{140}$$

Durch Aufteilen des Integranden und partielle Integration erhalten wir

$$\begin{aligned} 0 &= \int_c^d \int_a^b \frac{u_x \phi_x}{\sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}}\, dx\, dy + \int_b^a \int_c^d \frac{u_y \phi_y}{\sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}}\, dy\, dx \\ &= \int_c^d \underbrace{\left. \frac{u_x \phi}{\sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}} \right|_a^b}_{=0} dy + \int_a^b \underbrace{\left. \frac{u_y \phi}{\sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}} \right|_c^d}_{=0} dx \\ &\quad - \int_c^d \int_a^b \left[\frac{d}{dx} \left[\frac{u_x}{\sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}} \right] \right] \phi\, dx\, dy \\ &\quad - \int_c^d \int_a^b \left[\frac{d}{dy} \left[\frac{u_y}{\sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}} \right] \right] \phi\, dx\, dy \\ &= - \int_c^d \int_a^b \left[\frac{u_{xx}}{\sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}} - \frac{u_x^2 u_{xx} + u_x u_y u_{yx}}{\left(1 + u_x^2 + u_y^2\right)^{\frac{3}{2}}} \right] \phi\, dx\, dy \\ &\quad - \int_c^d \int_a^b \left[\frac{u_{yy}}{\sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}} - \frac{u_y^2 u_{yy} + u_y u_x u_{xy}}{\left(1 + u_x^2 + u_y^2\right)^{\frac{3}{2}}} \right] \phi\, dx\, dy\,. \end{aligned} \tag{141}$$

Sei H die HESSE-Matrix von u. Die Terme lassen sich dann neu ordnen zu

$$
\begin{aligned}
0 = &-\int_c^d\int_a^b \left[\frac{u_{xx}\left(1+u_x^2+u_y^2\right)-u_x^2u_{xx}-u_xu_yu_{yx}}{\left(1+u_x^2+u_y^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right]\phi\,dx\,dy \\
&-\int_c^d\int_a^b \left[\frac{u_{yy}\left(1+u_x^2+u_y^2\right)-u_y^2u_{yy}-u_yu_xu_{xy}}{\left(1+u_x^2+u_y^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right]\phi\,dx\,dy \\
= &-\int_c^d\int_a^b \left[\frac{u_{xx}+u_{yy}+u_y^2u_{xx}+u_x^2u_{yy}-2u_xu_yu_{xy}}{\left(1+u_x^2+u_y^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right]\phi\,dx\,dy \\
= &-\int_c^d\int_a^b \left[\frac{\Delta u\left[1+\left\langle\vec{\nabla}u,\vec{\nabla}u\right\rangle\right]-\left\langle\vec{\nabla}u,H\left(\vec{\nabla}u\right)\right\rangle}{\left[1+\left\langle\vec{\nabla}u,\vec{\nabla}u\right\rangle\right]^{\frac{3}{2}}}\right]\phi\,dx\,dy\,.
\end{aligned}
\tag{142}
$$

Es folgt, dass u im Innern von Q die partielle Differentialgleichung

$$u_{xx}+u_{yy}+u_y^2u_{xx}+u_x^2u_{yy}-2u_xu_yu_{xy}=0 \tag{143}$$

oder äquivalent

$$\Delta u\left[1+\left\langle\vec{\nabla}u,\vec{\nabla}u\right\rangle\right]-\left\langle\vec{\nabla}u,H\left(\vec{\nabla}u\right)\right\rangle=0 \tag{144}$$

erfüllen muss. Dies ist die sogenannte *Minimalflächengleichung* und kann auch geschrieben werden als[4]

$$\operatorname{div}_Q\left(\frac{\vec{\nabla}u}{\sqrt{1+\left\langle\vec{\nabla}u,\vec{\nabla}u\right\rangle}}\right)=0\,. \tag{145}$$

Zu Beginn haben wir u als Funktion der Form $u : Q \to \mathbb{R}$ definiert. Die Sichtweise lässt sich aber auch umkehren und wir können die Einschränkung $u|_U$ als Funktion der Form $u : M \to \mathbb{R}$ auffassen. Die Minimalflächengleichung (143) kann dann auch mit Hilfe des LAPLACE-Operators $\boldsymbol{\Delta}_g$ auf M ausgedrückt werden. Sie ist nämlich äquivalent[5] zu

$$\boldsymbol{\Delta}_g u = 0\,. \tag{146}$$

[4] **Achtung:** Mit $\operatorname{div}_Q(.)$ ist hier die Divergenz in Q gemeint, d.h. $\operatorname{div}_Q\left(\vec{V}\right) := \frac{\partial V^1}{\partial x}+\frac{\partial V^2}{\partial y}$.

[5] Die Minimalflächengleichung wird nur selten in dieser Form angegeben, da die nichtlineare Abhängigkeit des LAPLACE-Operators von u darin nicht explizit erscheint. Insbesondere vermittelt diese Darstellung fälschlicherweise den Eindruck einer linearen Gleichung!

Literatur

[1] Blatter, Christian, *Analysis 1* und *Analysis 2*, Springer, 1992.

[2] Do Carmo, Manfredo P., *Differentialgeometrie von Kurven und Flächen*, Vieweg Studium, 1982.

[3] Hungerbühler, Norbert, *Einführung in partielle Differentialgleichungen*, VDF, 2005.

[4] Jänich, Klaus, *Topologie*, Springer, 1998.

[5] Jänich, Klaus, *Vektoranalysis*, Springer, 1993.

[6] Jost, Jürgen, *Riemannian Geometry and Geometric Analysis*, Springer, 2002.