Der Integralsatz von Cauchy

Ω sei ein einfach zusammenhängendes Gebiet und f sei darin holomorph. Dann gilt, sofern alle betrachteten Wege ganz in Ω liegen:

- *Für jeden geschlossenen Weg γ ist*

$$\int_\gamma f(z)dz = 0.$$

- *Für zwei beliebige Wege γ_1 und γ_2 mit gleichem Anfangs- und Endpunkt ist*

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz \quad .$$

- *Zu $f(z)$ existiert eine Stammfunktion $F(z)$ mit $F'(z) = f(z)$ und*

$$\int_\gamma f(z)dz = F(B) - F(A)$$

  für jede Kurve $\gamma\colon [a,b] \to \Omega$, $\gamma(a) = A$, $\gamma(b) = B$.

Anmerkung 1

- Die Grundidee des Integralsatzes von Cauchy ist, dass **das Kurvenintegral einer holomorphen Funktion invariant unter Homotopie ist und jede geschlossene Kurve homotop zu einem Punkt ist**
- **Es ist wesentlich, dass ein einfach zusammenhängendes Gebiet und eine holomorphe Funktion vorausgesetzt werden.**

  1. Die Funktion $f(z) = \frac{1}{z}$ etwa ist in jedem Punkt mit Ausnahme von $z = 0$ holomorph, und trotzdem ergibt das Integral auf einem Kreis um den Ursprung nicht den Wert Null.

  2. Die Funktion $f(z) = \bar{z}$ ist nicht analytisch und das Integral auf dem Einheitskreis ist nicht null.

Anmerkung 2

Im Falle holomorpher Integranden kann man mit Hilfe des Cauchyschen Integralsatzes die Berechnung von Kurvenintegralen stark vereinfachen: **Es genügt ja, eine Stammfunktion aufzufinden und dort Anfangs- und Endpunkte der Kurve einzusetzen.**
Auch bei einem Integranden, der nicht überall holomorph ist, kann man immer noch im Holomorphiegebiet die Integrationswege geeignet verformen und sich so das Leben oft erheblich erleichtern.