Komplexe Ableitung und Analytische Funktionen

Definition 1 (Komplexe Ableitung). *Eine Funktion $f\colon \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, heisst differenzierbar in $z_0 \in \Omega$, falls*

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

existiert. Wir bezeichnen die komplexe Ableitung von f in z_0 durch $f'(z_0)$ oder $\frac{df}{dz}(z_0)$.

Definition 2 (Analytische Funktion). *Eine Funktion $f\colon \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, heisst analytisch oder holomorph in Ω, falls f in jedem $z_0 \in \Omega$ differenzierbar ist und die Ableitung ist stetig.*
Eine Funktion $f\colon \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, heisst analytisch oder holomorph in $z_0 \in \Omega$, falls f analytisch in einer Umgebung von z_0 ist.

Satz 1 (**Cauchy-Riemann Gleichungen**). *Eine Funktion* $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ *is differentierbar in* $z_0 = x_0 + y_0$ *genau dann , wenn* u *und* v *stetige partielle Ableitungen nach* x *und* y *haben und die Cauchy-Riemann Gleichungen*

$$\begin{cases} u_x(x_0,y_0) & = v_y(x_0,y_0) \\ u_y(x_0,y_0) & = -v_x(x_0,y_0) \end{cases}$$

gelten. Ferner gelten die Formeln

$$\begin{cases} f'(z_0) & = u_x(x_0,y_0) + iv_x(x_0,y_0) = f_x(x_0+iy_0) \\ f'(z_0) & = v_y(x_0,y_0) - iu_y(x_0,y_0) = -f_y(x_0+iy_0) \end{cases}$$

d.h.

$$\boxed{f_x(x_0+iy_0) + if_y(x_0+iy_0) = 0.}$$