Komplexe Analysis : Zusammenfassung der Fourier-Transformation

Francesca Da Lio

Definition 0.1. *(Fourier-Transformation) Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine absolut integrierbare Funktion. Die Fourier-Transformation von f ist die Funktion*

$$\boxed{\mathcal{F}[f](y) = \widehat{f}(\omega) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\, e^{-i\omega y} dy.}$$

*Die Fourier-Transformation einer Funktion wird auch **Spektralfunktion** genannt.*

Definition 0.2. *(Inverse Fourier-Transformation)*

Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine absolut integrierbare Funktion . Die inverse Fourier-Transformation von f ist die Funktion

$$\boxed{\mathcal{F}^{-1}[f](y) = \check{f}(y) := \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(w) e^{iwy} dw\,.}$$

Satz 0.3. *(Fourier Integralsatz) Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine absolut integrierbare Funktion mit absolut integrierbarer Fourier-Transformation ($\int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}(w)| dw < +\infty$). Dann ist f stetig und gilt*

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(w)\, e^{iwt} dw\,.$$

Satz 0.4. *(Allgemeinere Version von Fourier Integralsatz oder Satz von Dirichlet) Die Funktion f sei absolut integrierbar und stückweise stetig differenzierbar. Dann gilt für jedes $t \in \mathbb{R}$:*

$$\begin{aligned}\frac{f(t^-) + f(t^+)}{2} &= pv\, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\omega)\, e^{i\omega t} d\omega \\ &= \lim_{R \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-R}^{R} \widehat{f}(\omega)\, e^{i\omega t} d\omega\end{aligned}$$

(die Existenz von $pv(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\omega)\, e^{i\omega t} d\omega)$ ist dabei eine Konsequenz der Voraussetzungen).

Rechenregeln

Seien f, h absolut integrierbare Funktionen (ebenso ggf. $f', tf, \widehat{f}, \dots$).

a) $(\widehat{\alpha f + \beta h}) = a\widehat{f} + \beta\widehat{h}\,, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ (Linearität).

b) $g(t) = T_a\, f(f) := f(t-a) \Longrightarrow \widehat{g}(\omega) = \widehat{f}(\omega)\, e^{-ia\omega}$.

c) $g(t) := f\left(\dfrac{t}{\alpha}\right),\ \alpha > 0 \Longrightarrow \widehat{g}(\omega) = \alpha\widehat{f}(\alpha\omega)$.

d) $g(t) := e^{i\omega_0 t} f(t)\,, \omega_0 \in \mathbb{R} \Longrightarrow \widehat{g}(\omega) = \widehat{f}(\omega - \omega_0)$.

e)

$$
\begin{aligned}
g(t) := f'(t) \quad &\Longrightarrow \quad \widehat{g}(\omega) = i\omega\, \widehat{f}(\omega) \\
g(t) := f''(t) \quad &\Longrightarrow \quad \widehat{g}(\omega) = -\omega^2\, \widehat{f}(\omega) \\
g(t) := f^{(k)}(t) \quad &\Longrightarrow \quad \widehat{g}(\omega) = (i\omega)^k\, \widehat{f}(\omega)\,.
\end{aligned}
$$

f) $\quad g(t) := t\, f(t) \Longrightarrow \widehat{g}(\omega) = i\, \dfrac{d}{d\omega}\, \widehat{f}(\omega)$.