Komplexe Analysis : Zusammenfassung der Laplace Transformation

Francesca Da Lio

Definition 0.1. *(Originalfunktion)*

Eine Funktion

$$f : t \longmapsto f(t)$$

einer reellen Variable t mit reellen oder komplexen Werten, heisst ***Originalfunktion****, wenn sie folgende vier Bedingungen erfüllt.*

i) *f ist auf der ganzen reellen Achse definiert;*

ii) *f ist stückweise glatt;*

iii) *für $t < 0$ gilt $f(t) = 0$.*

iv) *f wächst für $t \to +\infty$ höchstens exponentiell, d.h. es gibt reelle Konstanten $\sigma \geq 0$ und $M \geq 0$, sodass*

$$|f(t)| \leq M\, e^{\sigma t} \quad \forall t \geq 0. \tag{0.1}$$

Die Menge aller Originalfunktionen heisst Originalraum der ***Laplace-Transformation****.*

Bemerkung 0.2.

1) Falls $f(t) \neq 0$ für $t < 0$, können wir stets eine zugehörige Originalfunktion g angeben, wir müssen dazu lediglich die Bedingung $g(t) = 0$ für $t < 0$ erzwingen. Die Funktion

$$g(t) = \begin{cases} f(t) & \text{für } t \geq 0 \\ 0 & \text{für } t < 0. \end{cases}$$

erfüllt dann offenbar iii). Wir werden die beiden Funktionen f und g meist miteinander identifizieren.

Wenn wir z.B. von der "Originalfunktion" $f(t) = \cos(\omega t)$ reden, meinen wir damit eigentlich die Funktion

$$f(t) = \begin{cases} \cos(\omega t)\,, & t > 0 \\ 0\,, & \text{sonst}\,. \end{cases}$$

2) Falls $\sigma' > \sigma$ ist, so ist stets $e^{\sigma t} < e^{\sigma' t}$, sodass falls $|f(t)| \leq M\, e^{\sigma t}$ auch $|f(t)| \leq M\, e^{\sigma' t}$ folgt. Die kleinste Zahl σ_0 mit der Eigenschaft, dass (0.1) gilt, heisst **Wachstumskoeffizient** von f (es ist wichtig anzumerken, dass falls σ_0 der Wachstumskoeffizient von f ist, $|f(t)| \leq M\, e^{\sigma_0 t}$ nicht unbedingt gelten muss).

Definition 0.3. *(Laplace-Transformation)*
Sei f eine Originalfunktion mit dem Wachstumskoeffizient σ_0. Die komplexe Funktion einer komplexen Variablen

$$\boxed{F:\ s \longmapsto \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt \in \mathbb{C} \quad (Re\, s > \sigma_0)}$$

heisst **Laplace-Transformation** *von f. Wir bezeichnen die Laplace-Transformation von f auch mit $\mathcal{L}[f]$.*

Rechenregeln

1. Linearität

$$\boxed{\mathcal{L}[\alpha f + \beta g] = \alpha \mathcal{L}[f] + \beta\, \mathcal{L}[g]\,, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}\,.}$$

2. Ähnlichkeit

Sei $a \in \mathbb{R}^+$ und sei $g(t) = f(at)$. Dann ist

$$\boxed{\mathcal{L}[g](s) = \frac{1}{a}\, \mathcal{L}[f]\left(\frac{s}{a}\right)}$$

3. Differentiationssatz

Sei f eine Orignalfunktion, sodass auch f' eine Originalfunktion ist. Dann ist

$$\boxed{\mathcal{L}[f'](s) = s\, \mathcal{L}[f](s) - \lim_{t\to 0^+} f(t).}$$

Falls auch die n-te Ableitung eine Originalfunktion ist, folgt weiterhin

$$\mathcal{L}[f^n](s) = s^n\, \mathcal{L}[f](s) - s^{n-1} \lim_{t\to 0^+} f(t)$$
$$- s^{n-2} \lim_{t\to 0^+} f'(t) - \cdots - \lim_{t\to 0^+} f^{(n-1)}(t).$$

4. Multiplikationssatz

Sei f eine Originalfunktion und $g(t) = t f(t)$. Dann ist $\mathcal{L}[g](s) = -\frac{d}{ds}\, \mathcal{L}[f](s)$ und

$$\boxed{\mathcal{L}[t^n\, f(t)](s) = (-1)^n\, \frac{d^n}{ds^n}\, \mathcal{L}[f](s)\,, \quad n = 0, 1, 2, \ldots\,.}$$

Insbesondere ist $\mathcal{L}[f]$ analytisch auf dem Halbraum $\{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} s > \sigma_0\}$, wobei σ_0 der Wachstumskoeffizient von f ist.

5. Verschiebungssatz

Für jedes $a > 0$ gilt:

$$\boxed{\mathcal{L}[f(t-a)](s) = e^{-as}\mathcal{L}[f](s).}$$

(Die Verschiebung im Originalraum um a entspricht einer Multiplikation mit dem Dämpfungsfaktor e^{-as} im Bildraum).

6. Dämpfungsregel

Für beliebiges $\alpha \in \mathbb{C}$ gilt

$$\boxed{\mathcal{L}[e^{\alpha t} f(t)](s) = \mathcal{L}[f](s-\alpha).}$$

(Einer Verschiebung um α im Bildraum entspricht also eine Multiplikation mit dem "Dämpfungsfaktor" $e^{\alpha t}$ im Originalraum).

Satz 0.4. *Seien f_1, f_2 zwei Orignalfunktionen mit Wachstumskoeffizienten σ_1, σ_2 und es sei*

$$\mathcal{L}[f_1](s) = \mathcal{L}[f_2](s), \quad \forall Re\, s > \max(\sigma_1, \sigma_2).$$

Dann ist $f_1(t) = f_2(t)$ an allen Stellen t, an denen f_1, f_2 stetig sind.

Definition 0.5. *(Inverse Laplace Transformation Eine Funktion $f(t)$ heisst inverse Laplace-Transformation einer Funktion $F(s)$, falls $F(s)$ die Laplace-Transformation von $f(t)$ ist. Wir schreiben dann $f = \mathcal{L}^{-1}(F)$.*

Bemerkung 0.6.

- $\mathcal{L}^{-1}$ ist linear!
- Eine Formel für $\mathcal{L}^{-1}[F]$ unter gewissen Annahmen über F kann mit Hilfe der Komplexen Analysis gegeben werden. In den Fällen, wo die Laplace-Transformation in Anwendungen auftritt, bestimmt man aber die inverse Laplace-Transformation einer Funktion effizienter durch Zurückführen auf einfachere Funktionen, von denen die Laplace-Transformation tabelliert ist.

Die Grundeigenschaften und einige der grundlegenden Beispiele der Laplacetransformation werden in der folgenden Tabelle zusammengefasst:

$f(t)$	$\mathcal{L}(f)(s) = F(s)$
1	$\frac{1}{s}, \quad s > 0$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}, \quad s > 0$
$\sin(at)$	$\frac{a}{s^2+a^2}, \quad s > 0$
$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2}, \quad s > 0$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}, \quad s > a$
$e^{at}\sin(bt)$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2} \quad s > a$
$e^{at}\cos(bt)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2} \quad s > a$
$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}} \quad s > a$
$af(t) + bg(t)$	$aF(s) + bG(s)$
$tf(t)$	$-F'(s)$
$t^n f(t)$	$(-1)^n F^{(n)}(s)$
$f'(t)$	$sF(s) - f(0)$
$f''(t)$	$s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$
$e^{at}f(t)$	$F(s-a)$