Komplexe Analysis : Zusammenfassung der Fourier-Reihen

Francesca Da Lio

Definition 0.1. *[Periodische Funktionen] Falls es ein reelles $p > 0$ gibt, sodass*

$$f(x+p) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}\,.$$

Definition 0.2. *[Trigonometrische Polynom und Reihe] Ein trigonometrisches Polynom vom Grad N ist eine Linearkombination*

$$\sum_{k=-N}^{N} c_k\, e^{ikt} \quad \textit{oder} \quad \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N} a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)\,,$$

wobei c_N oder c_{-N} bzw. a_N oder b_N ungleich null sind. Die Reihen

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k\, e^{ikt} \quad \textit{oder} \quad \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)$$

*heissen **trigonometrische Reihen**.*

Satz 0.3. *Sei f eine 2π-periodische Funktion, die durch eine trigonometrische Reihe dargestellt werden kann, d.h. sei*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$$

oder

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_k\, e^{ikx}.$$

Dann gilt:

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos\, kx\, dx \qquad k \geq 0 \tag{0.1}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin\, kx\, dx \qquad k \geq 1 \tag{0.2}$$

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx}\, dx \qquad k \in \mathbb{Z}\,. \tag{0.3}$$

Die Integrale können auf einem beliebigen Intervall der Länge 2π berechnet werden.

Beziehung zwischen den Koeffizienten a_k, b_k, c_k :

$$\boxed{a_k = c_k + c_{-k},\ b_k = i(c_k - c_{-k})\,, \quad k > 0;}$$

$$\boxed{c_k = \frac{1}{2}\,(a_k - ib_k), \quad c_{-k} = \frac{1}{2}\,(a_k + ib_k)\,, \quad k > 0.}$$

$$\boxed{\text{Im Fall } k = 0 \text{ folgt unmittelbar } b_0 = 0 \text{ und } a_0 = 2c_0.}$$

Definition 0.4. *[Fourier-Reihe] Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine 2π-periodische Funktion. Die Reihe*

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k\, e^{ikt} \quad \Big(bzw \quad \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)\Big) \tag{0.4}$$

wobei c_k (bzw a_k, b_k) wie in Satz 0.3 sind, heisst die komplexe Fourier-Reihe (bwz die reelle Fourier-Reihe) von f .

Haupteigenschaften:

1) Falls $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (d.h. f ist reellwertig) ist $c_{-k} = \overline{c}_k$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ und $a_k \in \mathbb{R}$, $b_k \in \mathbb{R}$ für alle $k \geq 0$.

2) Falls f eine **gerade** Funktion ist, gilt $b_k = 0$ für alle $k > 0$ und

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x)\, \cos(kx)\, dx\,, \quad k \geq 0\,.$$

Falls f eine **ungerade** Funktion ist, gilt $a_k = 0$ für alle $k \geq 0$ und

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(kx)\, dx\,, \quad k > 0\,.$$

3) Ist die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ periodisch mit einer gewissen Periode $p > 0$ (anstelle von 2π), dann ist ihre Fourier-Reihe gegeben durch:

$$f(t) \rightsquigarrow \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k\, e^{\frac{2\pi i k t}{p}}$$

$$f(t) \rightsquigarrow \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos\left(\frac{2k\pi t}{p}\right) + b_k \sin\left(\frac{2k\pi t}{p}\right),$$

wobei

$$c_k = \frac{1}{p} \int_{-p/2}^{p/2} f(x)\, e^{\frac{-2k\pi i x}{p}} dx\,,$$

$$a_k = \frac{2}{p} \int_{-p/2}^{p/2} f(x)\, \cos\left(\frac{2k\pi x}{p}\right) dx\,,$$

$$b_k = \frac{2}{p} \int_{-p/2}^{p/2} f(x)\, \sin\left(\frac{2k\pi x}{p}\right) dx\,.$$

Satz 0.5. *[Konvergenz] Sei f eine auf $[-\pi,\pi]$ definiert 2π-periodische Funktion, die stückweise stetig ist und für die in jedem Punkt in $[-\pi,\pi]$ die linke und die rechte Ableitung existiert. Dann ist die Fourier-Reihen-Entwicklung von f auf $[-\pi,\pi]$ konvergent. Die Summe der Fourier-Reihe ist*

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k\, e^{ikx} = f(x)\,, \quad \textit{bzw.}$$

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) = f(x)\,,$$

in allen Punkten $x \in [-\pi,\pi]$, in denen f stetig ist, und

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k\, e^{ikx_0} = \frac{1}{2}\Big[\lim_{k\to x_0^+} f(x) + \lim_{x\to x_0^-} f(x)\Big] \quad \textit{bzw.}$$

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx_0) + b_k \sin(kx_0) = \frac{1}{2}\Big[\lim_{k\to x_0^+} f(x) + \lim_{x\to x_0^-} f(x)\Big]$$

für alle Sprungstellen $x_0 \in [-\pi,\pi]$.

Satz 0.6. *[Parsevalsche Gleichung] Sei f eine 2π-periodische Funktion mit ; $\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx < \infty$ und es seien $\{c_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$, $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, $\{b_k\}_{k>0}$ die Fourier-Koeffizienten von f. Dann gilt*

$$\boxed{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k|^2 = \frac{|a_0|^2}{4} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{|a_k|^2 + |b_k|^2}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx.}$$