Isolierte Singularitäten

- Hebbarkeitsatz von Riemann: z_0 ist eine **hebbare Singularität** von $f \Leftrightarrow \lim_{z\to z_0} f(z)$ existiert in $\mathbb{C}$ $\Leftrightarrow f$ ist auf einer punktierten Kreisscheibe $B(z_0,\rho)\setminus\{z_0\}$, $\rho > 0$ beschränkt
- Pol: z_0 ist ein Pol von $f \Leftrightarrow$ es gilt $\lim_{z\to z_0} |f(z)| = \infty \Leftrightarrow$ es gibt ein $m \geq 1$, sodass

  $$\lim_{z\to z_0} (z-z_0)^m f(z) = \lambda \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$$

  $\Leftrightarrow f(z) = \frac{\phi(z)}{(z-z_0)^m}$, mit ϕ holomorph an der Stelle z_0 und $\phi(z_0) \neq 0$.
- z_0 ist eine wesentliche Singularität, falls der Hauptteil der Laurent-Entwicklung in einer Umgebung von z_0 aus unendlich vielen Termen besteht $\Leftrightarrow$ existiert $\lim_{z\to z_0} f(z)$ nicht, und in der Umgebung einer wesentlichen Singularität verhält sich eine Funktion f sehr unregelmäßig (sehen Satz von Picard).

Die Residuen

Sei f eine analytische Funktion auf $B(z_0, \rho)\backslash\{z_0\}$. Der Koeffizient c_{-1} der Laurent-Entwicklung mit Zentrum z_0, die f auf $B(z_0, \rho)\backslash\{z_0\}$ darstellt, heißt das Residuum $\mathrm{Res}(f, z_0)$ von f an der Stelle z_0. Wir können deshalb

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \;\mathrm{Res}(f, z_0)$$

schreiben, γ ist eine geschlossene Kurve im Gegenuhrzeigersinn, die in ihrem Inneren den Punkt z_0 enthält und in $B(z_0, \rho)$ enthalten ist).

Der Residuensatz

Sei $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ analytisch bis auf isolierte Singularitäten und sei $\gamma \subseteq \Omega$ eine Kurve, die die Singularitäten $\{z_1, \ldots, z_n\}$ in ihrem Inneren enthält und im Gegenuhrzeigersinn durchlaufen wird. Dann gilt:

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Res}(f, z_i).$$