

<http://www.math.ethz.ch/~felder>

# Mathematische Methoden der Physik II

Vorlesungsnotizen

Giovanni Felder  
D-MATH, ETH Zürich, CH-8092 Zürich  
24. November 2018



Mathematische Methoden der Physik II ©2018 by Giovanni Felder is licensed under Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International. To view a copy of this license, visit <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>

# Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1. Gruppen	1
1.1. Grundbegriffe, Beispiele	1
1.2. Lie-Gruppen	6
Kapitel 2. Darstellungen von Gruppen	9
2.1. Definitionen und Beispiele	9
2.2. Zerlegung in irreduzible Darstellungen: ein Beispiel	10
2.3. Unitäre Darstellungen	11
2.4. Das Lemma von Schur	11
Kapitel 3. Darstellungstheorie von endlichen Gruppen	13
3.1. Orthogonalitätsrelationen der Matrixelemente	13
3.2. Charakteren	14
3.3. Der Charakter der regulären Darstellung	15
3.4. Orthogonalitätsrelationen der Charakteren	15
3.5. Zerlegung der regulären Darstellung	16
3.6. Die Charaktertafel einer endlichen Gruppe	17
3.7. Die kanonische Zerlegung einer Darstellung	18
3.8. Beispiel: die Diedergruppe $D_n$ , $n \geq 3$	20
3.9. Kompakte Gruppen	21
Kapitel 4. Eigenwertprobleme mit Symmetrie	23
4.1. Eigenwerte und Eigenvektoren	23
4.2. Kleine Schwingungen von Molekülen	25
4.3. Beispiel: Eigenfrequenzen von $\text{CH}_4$	27
Kapitel 5. Die Drehgruppe und die Lorentzgruppe	31
5.1. Isometrien des Euklidischen Raums	31
5.2. Die Drehgruppe $SO(3)$	31
5.3. Die Eulerwinkel	32
5.4. Der Homomorphismus $SU(2) \rightarrow SO(3)$	33
5.5. Der Minkowski-Raum	35
5.6. Die Lorentzgruppe	35
5.7. Beispiele von Lorentztransformationen	36
5.8. Struktur der Lorentzgruppe	37
5.9. Inertiale Bezugssysteme	38
5.10. Der Isomorphismus $SL(2, \mathbb{C})/\{\pm 1\} \rightarrow SO_+(1, 3)$	39
5.11. Die Lorentzgruppe und der Sternhimmel	40
Kapitel 6. Lie-Algebren	43
6.1. Exponentialabbildung	43
6.2. Einparametergruppen	45
6.3. Matrix-Lie-Gruppen	45
6.4. Die Campbell–Baker–Hausdorff Formel	47

Kapitel 7. Darstellungen von Lie-Gruppen	51
7.1. Definitionen	51
7.2. Beispiele	51
7.3. Darstellungen von Lie-Algebren	52
7.4. Irreduzible Darstellungen von $SU(2)$	54
7.5. Harmonische Polynome und Kugelfunktionen	58
7.6. Tensorprodukte von $SU(2)$ Darstellungen	62
Anhang A. Begriffe aus der linearen Algebra	65
A.1. Direkte Summen	65
A.2. Tensorprodukte	66
Literaturverzeichnis	71

Neu in dieser Fassung sind vor allem Ergänzungen im Kapitel 6. Ich danke den Studierenden, insbesondere Maximilian Daschner und Taro Spirig, für die Korrektur von zahlreichen Fehlern.



## KAPITEL 1

# Gruppen

Es werden hier kurz die Definitionen und Grundbegriffe der Gruppentheorie aufgeführt. Eine spezielle Rolle spielen für uns kontinuierliche oder Lie-Gruppen, wobei wir uns auf Matrix-Lie-Gruppen beschränken. Literatur: [4], [9].

### 1.1. Grundbegriffe, Beispiele

Eine *Gruppe*  $G$  ist eine Menge mit einem *Produkt* (Multiplikation)  $G \times G \rightarrow G$ ,  $(g, h) \mapsto gh$ , sodass (i)  $(gh)k = g(hk)$  für alle  $g, h, k \in G$ , (ii) es existiert ein *neutrales Element* (Einselement)  $1 \in G$  mit  $1g = g1 = g$  für alle  $g \in G$ , (iii) zu jedem  $g \in G$  existiert ein *Inverses*  $g^{-1} \in G$ , sodass  $gg^{-1} = g^{-1}g = 1$ .

Das neutrale Element ist eindeutig, denn aus  $1'1 = 1$  und  $1'1 = 1'$  folgt  $1 = 1'$ . Das Inverse eines Elements ist ebenfalls eindeutig. Sind nämlich  $g', g''$  zwei Inverse von  $g$  so gilt  $g' = g'1 = g'(gg'') = (g'g'')g'' = 1g'' = g''$ . Das Inverse von  $1$  ist  $1$ .

Die *Ordnung* einer Gruppe  $G$  ist die Anzahl Elemente  $|G|$  von  $G$ . Sie darf unendlich sein.

Eine Gruppe heisst *abelsch*, falls  $gh = hg$  für alle  $g, h \in G$ . In diesem Falle wird  $G$  oft *additiv* geschrieben: statt  $gh$  wird  $g+h$ , statt  $1$  wird  $0$  und statt  $g^{-1}$  wird  $-g$  verwendet. Man schreibt auch  $g-h$  statt  $g+(-h)$ . Wohlbekannte Beispiele sind die Gruppen  $\mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ .

Eine *Untergruppe*  $H$  einer Gruppe  $G$  ist eine nichtleere Teilmenge von  $G$ , so dass  $h_1, h_2 \in H \Rightarrow h_1h_2 \in H$  und  $h \in H \Rightarrow h^{-1} \in H$ . Eine Untergruppe einer Gruppe ist selbst eine Gruppe.

Das *direkte Produkt*  $G_1 \times G_2$  zweier Gruppen  $G_1, G_2$  ist das kartesische Produkt mit Multiplikation  $(g_1, g_2)(h_1, h_2) = (g_1h_1, g_2h_2)$ . Es ist eine Gruppe mit neutralem Element  $(1, 1)$  und Inversem  $(g_1, g_2)^{-1} = (g_1^{-1}, g_2^{-1})$ .

BEISPIEL 1.1.1. *Zyklische Gruppe der Ordnung  $n$* .  $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  (mit  $+$ ) ist eine abelsche Gruppe mit  $n$  Elementen.

BEISPIEL 1.1.2. *Symmetrische Gruppe*. Eine *Permutation* von  $n$  Elementen ist eine bijektive Abbildung  $\pi : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ . Die Permutationen von  $n$  Elementen bilden eine Gruppe mit der Zusammensetzung von Abbildungen als Produkt:  $(\pi_1\pi_2)(i) = (\pi_1 \circ \pi_2)(i) = \pi_1(\pi_2(i))$ . Das neutrale Element ist die Identität, und das Inverse von  $\pi$  ist die inverse Abbildung  $\pi^{-1}$ . Diese Gruppe heisst symmetrische Gruppe  $S_n$ . Sie hat Ordnung  $n!$ .

BEISPIEL 1.1.3. *Diedergruppen  $D_n$* .  $D_n$ ,  $n \geq 3$  besteht aus den orthogonalen Transformationen der Ebene, die ein reguläres im Ursprung zentriertes  $n$ -Eck invariant lassen. Sind die Ecken  $v_0, \dots, v_{n-1} \in \mathbb{R}^2$ , im Gegenuhrzeigesinn numeriert, so ist die Drehung  $R$  mit Winkel  $2\pi/n$  in  $D_n$  durch  $Rv_i = v_{i+1}$  ( $v_n \equiv v_0$ ) gegeben. Die Spiegelung  $S$  um die durch  $v_0$  und  $0$  gehende Achse ist auch in  $D_n$  und erfüllt  $Sv_i = v_{n-i}$ .

LEMMA 1.1.1. *Die Elemente von  $D_n$  sind*

$$1, R, R^2, \dots, R^{n-1}, S, RS, R^2S, \dots, R^{n-1}S.$$

*Insbesondere hat  $D_n$  Ordnung  $2n$ .*

BEWEIS. Diese Elemente sind Produkte von  $R$  und  $S$ , also in  $D_n$ . Es ist klar, dass sie alle verschieden sind, da sie  $v_0, v_1$  nach verschiedene Paare von Punkten abbilden. Ist  $X \in D_n$  so bildet  $X$  Ecken nach Ecken ab. Sei  $v_j = Xv_0$ . Dann ist entweder  $Xv_1 = v_{j+1}$  oder  $v_{j-1}$ . Im ersten Fall ist  $Xv_a = R^j v_a$  für  $a = 0, 1$ . Da  $v_0$  und  $v_1$  eine Basis von  $\mathbb{R}^2$  bilden, folgt  $X = R^j$ . Im zweiten Fall folgt in derselben Weise, dass  $X = R^j S$ .  $\square$

BEISPIEL 1.1.4. *Allgemeine lineare Gruppen*  $GL(n, \mathbb{R}), GL(n, \mathbb{C})$ .

$$\begin{aligned} GL(n, \mathbb{R}) &= \{\text{invertierbare reelle } n \times n \text{ Matrizen}\} \\ GL(n, \mathbb{C}) &= \{\text{invertierbare komplexe } n \times n \text{ Matrizen}\} \end{aligned}$$

Das Produkt ist die Matrizenmultiplikation, und das neutrale Element ist die Einheitsmatrix. Abstrakter, für jeden Vektorraum  $V$  (über  $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$ ) definiert man die Gruppe

$$GL(V) = \{\text{invertierbare lineare Abbildungen } V \rightarrow V\},$$

wobei das Produkt die Zusammensetzung von Abbildungen ist. Falls  $\dim V < \infty$ , wird  $V$  durch Wahl einer Basis mit  $\mathbb{R}^n$  oder  $\mathbb{C}^n$  identifiziert und  $GL(V)$  ist dann  $GL(n, \mathbb{R})$  bzw.  $GL(n, \mathbb{C})$ .

BEISPIEL 1.1.5. *Orthogonale Gruppe*  $O(n)$ . Eine  $n \times n$  Matrix  $A$  heisst *orthogonal*, falls  $A^T A = 1$ . Jede orthogonale Matrix ist invertierbar, denn

$$1 = \det A^T A = \det A^T \det A = (\det A)^2,$$

also  $\det A \neq 0$ . Es folgt, dass  $A^{-1} = A^T$ . Sind  $A, B$  orthogonal, so ist  $(AB)^T AB = B^T A^T AB = 1$  und  $AB$  ist orthogonal. Ist  $A$  orthogonal, so ist  $(A^T)^T A^T = AA^T = 1$  und  $A^{-1} = A^T$  ist orthogonal. Die orthogonalen  $n \times n$  Matrizen bilden also eine Untergruppe  $O(n)$  von  $GL(n, \mathbb{R})$

$$O(n) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) \mid A^T A = 1\}.$$

Besonders wichtig für die Physik ist die Gruppe  $O(3)$  der orthogonalen Transformationen des physikalischen Raumes  $\mathbb{R}^3$ .

BEISPIEL 1.1.6.  $O(n)$  ist die Gruppe der linearen Abbildungen  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , die das Skalarprodukt

$$(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

invariant lassen:  $O(n) = \{A \mid (Ax, Ay) = (x, y) \text{ für alle } x, y \in \mathbb{R}^n\}$ . Allgemeiner betrachten wir die symmetrische Bilinearform auf  $\mathbb{R}^{p+q}$

$$(x, y)_{p,q} = \sum_{i=1}^p x_i y_i - \sum_{i=p+1}^{p+q} x_i y_i$$

und definieren

$$O(p, q) = \{A \in GL(p+q, \mathbb{R}) \mid (Ax, Ay)_{p,q} = (x, y)_{p,q}\}.$$

Insbesondere ist  $O(n, 0) = O(n) = O(0, n)$ . Die Gruppe  $O(1, 3)$  ist die *Lorentzgruppe*. Sie erhält die "Minkowski Metrik"

$$(x, y)_{1,3} = x_0 y_0 - x_1 y_1 - x_2 y_2 - x_3 y_3$$

auf der Raumzeit  $\mathbb{R}^4$ .

BEISPIEL 1.1.7. *Unitäre Gruppe*  $U(n)$

$$\begin{aligned} U(n) &= \{A \in GL(n, \mathbb{C}) \mid A^*A = 1\} \\ &= \{A \in GL(n, \mathbb{C}) \mid (Az, Aw) = (z, w), \forall z, w \in \mathbb{C}^n\}, \end{aligned}$$

wobei  $(z, w) = \sum \bar{z}_i w_i$  das Skalarprodukt auf  $\mathbb{C}^n$  ist.

BEISPIEL 1.1.8. *Symplektische Gruppe*  $Sp(2n)$ . Betrachte die antisymmetrische Bilinearform auf  $\mathbb{R}^{2n}$

$$\omega(X, Y) = \sum_{i=1}^n (X_{2i-1}Y_{2i} - X_{2i}Y_{2i-1}),$$

wobei  $X_i$  die  $i$ -te Komponente von  $X \in \mathbb{R}^{2n}$  bezeichnet. Die symplektische Gruppe ist dann

$$Sp(2n) = \{A \in GL(2n, \mathbb{R}) \mid \omega(Ax, Ax') = \omega(x, x')\}.$$

In der klassischen Mechanik tritt diese Gruppe als Gruppe der linearen kanonischen Transformationen des Phasenraums  $\mathbb{R}^{2n}$  mit Ortskoordinaten  $q_i = X_{2i-1}$ ,  $p_i = X_{2i}$  auf.

BEMERKUNG 1.1.1. In den Beispielen 1.1.4–1.1.8 sind die Gruppen Untergruppen von  $GL(n, \mathbb{C})$  oder  $GL(n, \mathbb{R})$ , welche eine  $\mathbb{R}$ -Bilinearform  $B$  invariant lassen. Die Untergruppeneigenschaft ist dann automatisch erfüllt, denn: Lassen  $A_1, A_2, A$  die Bilinearform  $B$  invariant, so ist für beliebige  $x, y$

$$\begin{aligned} B(A_1A_2x, A_1A_2y) &= B(A_2x, A_2y) = B(x, y), \\ B(A^{-1}x, A^{-1}y) &= B(A(A^{-1}x), A(A^{-1}y)) = B(x, y). \end{aligned}$$

BEISPIEL 1.1.9. *Untergruppen der speziellen linearen Gruppen*. Sei  $G$  eine Untergruppe von  $GL(n, \mathbb{R})$  oder  $GL(n, \mathbb{C})$ . Wir definieren

$$SG = \{A \in G \mid \det A = 1\}.$$

$SG$  ist nicht leer denn  $1 \in SG$  und sind  $A, B \in SG$ , so gilt  $\det(AB) = \det A \det B = 1$  und  $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1} = 1$ . Also ist  $SG$  eine Gruppe. Beispiele ( $K = \mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$ )

$$\begin{aligned} SL(n, K) &= (SGL(n, K)) = \{A \in GL(n, K) \mid \det A = 1\} \\ SO(n) &= \{A \in SL(n, \mathbb{R}) \mid A^T A = 1\} \\ SU(n) &= \{A \in SL(n, \mathbb{C}) \mid A^* A = 1\}. \end{aligned}$$

Diese Gruppen heißen spezielle lineare -, spezielle orthogonale - bzw. spezielle unitäre Gruppe. Die Elemente der symplektischen Gruppen haben Determinante 1 (Übung).

Wir führen jetzt noch einige wichtige Begriffe ein.

Eine Gruppe  $G$  operiert auf einer Menge  $M$ , wenn eine Abbildung  $G \times M \rightarrow M$ ,  $(g, x) \mapsto gx$  gegeben ist, die der Eigenschaft  $g_1(g_2x) = (g_1g_2)x$  genügt für alle  $g_1, g_2 \in G$ ,  $x \in M$ .

Jede Gruppe operiert auf sich selbst durch Gruppenmultiplikation;  $GL(n, \mathbb{R})$  operiert auf  $\mathbb{R}^n$  durch Anwendung von Matrizen auf Vektoren;  $O(n)$  operiert auf  $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| = 1\}$  denn für  $A \in O(n)$  ist  $|Ax| = |x|$ .

Ein *Homomorphismus*  $\varphi : G \rightarrow H$  von einer Gruppe  $G$  nach einer Gruppe  $H$  ist eine Abbildung mit der Eigenschaft, dass  $\varphi(gh) = \varphi(g)\varphi(h)$ . Ist zusätzlich  $\varphi$  bijektiv, so heisst  $\varphi$  *Isomorphismus*. Sind  $\varphi : G \rightarrow H$ ,  $\psi : H \rightarrow K$  Homomorphismen, so ist  $\psi \circ \varphi : G \rightarrow K$  ein Homomorphismus. Die inverse Abbildung eines Isomorphismus  $\varphi$  ist ebenfalls ein Isomorphismus, denn  $\varphi^{-1}(gh) = \varphi^{-1}(\varphi(\varphi^{-1}(g))\varphi(\varphi^{-1}(h))) = \varphi^{-1}\varphi(\varphi^{-1}(g))\varphi^{-1}(h) = \varphi^{-1}(g)\varphi^{-1}(h)$ . Isomorphismen  $G \rightarrow G$  bilden also eine

Gruppe  $\text{Aut}(G)$ , die Gruppe der Automorphismen von  $G$ . Der *Kern* von  $\varphi$  ist die Menge

$$\text{Ker}\varphi = \{g \in G \mid \varphi(g) = 1\} \subset G.$$

Das *Bild* von  $\varphi$  ist die Menge

$$\text{Im}\varphi = \{\varphi(g) \mid g \in G\} \subset H.$$

SATZ 1.1.2. Sei  $\varphi : G \rightarrow H$  ein Homomorphismus.

- (i)  $\varphi(1) = 1$ ,  $\varphi(g)^{-1} = \varphi(g^{-1})$ ,
- (ii)  $\text{Ker}\varphi$  ist eine Untergruppe von  $G$ ,  $\text{Im}\varphi$  ist eine Untergruppe von  $H$ ,
- (iii)  $\varphi$  ist genau dann injektiv wenn  $\text{Ker}\varphi = \{1\}$ .

BEWEIS. (i)  $\varphi(1) = \varphi(1 \cdot 1) = \varphi(1)\varphi(1)$ . Die erste Behauptung folgt nach Multiplikation mit  $\varphi(1)^{-1}$ . Aus  $1 = \varphi(1) = \varphi(gg^{-1}) = \varphi(g)\varphi(g^{-1})$  folgt  $\varphi(g)^{-1} = \varphi(g^{-1})$ .

(ii)  $\text{Ker}\varphi, \text{Im}\varphi \neq \emptyset$ , denn  $1 \in \text{Ker}\varphi$ ,  $1 \in \text{Im}\varphi$ .  $g_1, g_2 \in \text{Ker}\varphi \Rightarrow \varphi(g_1g_2) = \varphi(g_1)\varphi(g_2) = 1 \Rightarrow g_1g_2 \in \text{Ker}\varphi$ .  $g \in \text{Ker}\varphi \Rightarrow \varphi(g^{-1}) = \varphi(g)^{-1} = 1 \Rightarrow g^{-1} \in \text{Ker}\varphi$ .  $h_1, h_2 \in \text{Im}\varphi \Rightarrow \exists g_1, g_2$  sodass  $h_1 = \varphi(g_1), h_2 = \varphi(g_2) \Rightarrow h_1h_2 = \varphi(g_1)\varphi(g_2) = \varphi(g_1g_2) \in \text{Im}\varphi$ .  $h = \varphi(g) \in \text{Im}\varphi \Rightarrow h^{-1} = \varphi(g^{-1}) \in \text{Im}\varphi$ .

(iii)  $\varphi$  injektiv,  $g \neq 1 \Rightarrow \varphi(g) \neq \varphi(1) = 1 \Rightarrow \text{Ker}\varphi = \{1\}$ .  $\text{Ker}\varphi = \{1\}$ ,  $g_1 \neq g_2 \in G \Rightarrow \varphi(g_1)\varphi(g_2)^{-1} = \varphi(g_1g_2^{-1}) \neq 1$  denn  $g_1g_2^{-1} \neq 1$ . Also  $\varphi(g_1) \neq \varphi(g_2)$  und  $\varphi$  ist injektiv.  $\square$

KOROLLAR 1.1.3. Ein Homomorphismus  $\varphi : G \rightarrow H$  ist genau dann ein Isomorphismus wenn  $\text{Ker}\varphi = \{1\}$  und  $\text{Im}\varphi = H$ .

DEFINITION 1.1.1. Zwei Gruppen  $G, H$  heißen isomorph ( $G \cong H$ ) falls ein Isomorphismus  $G \rightarrow H$  existiert.

DEFINITION 1.1.2. Sei  $H$  eine Untergruppe einer Gruppe  $G$ . Die Menge  $G/H$  der (Links-)Nebenklassen von  $H$  in  $G$  ist die Menge der Äquivalenzklassen bezüglich der Äquivalenzrelation

$$g_1 \sim g_2 \iff \exists h \in H \text{ mit } g_2 = g_1h.$$

(Verifiziere, dass  $\sim$  eine Äquivalenzrelation ist!)

DEFINITION 1.1.3. Ein *Normalteiler* von  $G$  ist eine Untergruppe  $H$  mit der Eigenschaft, dass  $ghg^{-1} \in H$  für alle  $g \in G, h \in H$ .

Für allgemeine Untergruppen  $H$  hat  $G/H$  keine natürliche Gruppenstruktur.

SATZ 1.1.4. Sei  $H$  ein Normalteiler von  $G$  und es bezeichne  $[g]$  die Klasse von  $g$  in  $G/H$ . Dann ist für alle  $g_1, g_2$  das Produkt

$$[g_1][g_2] = [g_1g_2]$$

wohldefiniert, und  $G/H$  ist mit diesem Produkt eine Gruppe, welche Faktorgruppe von  $G$  mod  $H$  heißt.

BEWEIS. Wir müssen zeigen, dass das Produkt  $[g_1][g_2]$  unabhängig von der Wahl der Repräsentanten  $g_1, g_2$  ist. Sind  $g_1h_1, g_2h_2$  andere Repräsentanten, so ist

$$g_1h_1g_2h_2 = g_1g_2 \underbrace{(g_2^{-1}h_1g_2)h_2}_{\in H} \in [g_1g_2].$$

Assoziativität folgt aus der Assoziativität in  $G$ , das neutrale Element ist  $[e]$  und  $[g]^{-1} = [g^{-1}]$ .  $\square$

BEISPIEL 1.1.10.  $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  (Jede Untergruppe einer abelschen Gruppe ist ein Normalteiler).

BEISPIEL 1.1.11. Es bezeichne  $\mathbf{1}$  die Einheitsmatrix. Die Teilmenge  $\{\mathbf{1}, -\mathbf{1}\} \subset SL(2, \mathbb{C})$  ist eine Untergruppe. Für alle  $A \in SL(2, \mathbb{C})$  gilt  $A(\pm\mathbf{1})A^{-1} = \pm\mathbf{1}$ , also ist  $\{\mathbf{1}, -\mathbf{1}\}$  ein Normalteiler. Die Gruppe  $SL(2, \mathbb{C})/\{\mathbf{1}, -\mathbf{1}\}$  ist isomorph zur Gruppe der *Möbiustransformationen* der Riemannschen Sphäre. Der Isomorphismus bildet die Äquivalenzklasse  $\pm \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  nach der Möbiustransformation

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}$$

ab. Siehe auch Abschnitt 5.11.

Für jeden Homomorphismus  $\varphi : G \rightarrow H$  ist  $\text{Ker}\varphi$  ein Normalteiler von  $G$ , denn aus  $\varphi(h) = 1$  folgt  $\varphi(ghg^{-1}) = \varphi(g)\varphi(h)\varphi(g^{-1}) = \varphi(g)\varphi(g)^{-1} = 1$ . Es gilt der Isomorphiesatz

SATZ 1.1.5. Sei  $\varphi : G \rightarrow H$  ein Homomorphismus von Gruppen. Dann gilt

$$G/\text{Ker}\varphi \cong \text{Im}\varphi.$$

Der Isomorphismus ist  $[g] \mapsto \varphi(g)$  für beliebige Wahl der Repräsentanten  $g$ .

BEWEIS. Übung. □

Der Begriff des *semidirekten Produkts* von Gruppen soll zunächst durch zwei Beispiele motiviert werden.

BEISPIEL 1.1.12. *Bewegungsgruppe von  $\mathbb{R}^3$* . Das ist die Gruppe der affinen Transformationen von  $\mathbb{R}^3$  der Form

$$x \mapsto Ax + b, \quad A \in O(3), \quad b \in \mathbb{R}^3.$$

Als Menge ist diese Gruppe  $O(3) \times \mathbb{R}^3$ . Das Produkt ist durch Zusammensetzung von Abbildungen gegeben:

$$\begin{aligned} (A_1, b_1)(A_2, b_2) &= (A_1A_2, A_1b_2 + b_1), \\ (A, b)^{-1} &= (A^{-1}, -A^{-1}b), \\ e &= (\mathbf{1}, 0). \end{aligned}$$

Diese Gruppe hat  $O(3) \cong O(3) \times \{0\}$  als Untergruppe und  $\mathbb{R}^3 \cong \{\mathbf{1}\} \times \mathbb{R}^3$  als Normalteiler. Sie heisst inhomogene orthogonale Gruppe  $IO(3)$ .

BEISPIEL 1.1.13. *Poincaré Gruppe*: Die Poincaré Gruppe  $IO(1, 3)$  ist die Gruppe der affinen Transformationen von  $\mathbb{R}^4$  der Form

$$x \mapsto Ax + b, \quad A \in O(1, 3), \quad b \in \mathbb{R}^4.$$

Wie oben, ist diese Gruppe  $O(1, 3) \times \mathbb{R}^4$  mit Multiplikation  $(A_1, b_1)(A_2, b_2) = (A_1A_2, A_1b_2 + b_1)$ . Sie tritt in der speziellen Relativitätstheorie als Gruppe von Transformationen auf, welche die Form der Wellengleichung erhalten: Eine Funktion  $u$  erfüllt genau dann die Wellengleichung  $u_{x_0x_0} - u_{x_1x_1} - u_{x_2x_2} - u_{x_3x_3} = 0$  wenn  $U(x) = u(Ax + b)$  die Wellengleichung erfüllt.

Die allgemeine Formulierung dieses Begriffes ist folgende: Sei  $\text{Aut}(H)$  die Gruppe der Isomorphismen  $H \rightarrow H$  ("Automorphismen von  $H$ "), wobei die Multiplikation als Zusammensetzung von Isomorphismen definiert ist.

SATZ 1.1.6. Seien  $G$  und  $H$  Gruppen und  $\rho : G \rightarrow \text{Aut}(H)$ ,  $g \mapsto \rho_g$ , ein Homomorphismus. Dann ist  $G \times H$  mit Multiplikation

$$(g_1, h_1)(g_2, h_2) = (g_1g_2, h_1\rho_{g_1}(h_2))$$

eine Gruppe, das semidirekte Produkt  $G \rtimes_{\rho} H$ .

In den obigen Beispielen ist  $H$  eine abelsche, additiv geschriebene Gruppe.

BEWEIS. Es gilt  $\rho_{g_1}\rho_{g_2} = \rho_{g_1g_2}$  für alle  $g_1, g_2 \in G$ , weil  $\rho$  ein Homomorphismus ist, und  $\rho_g(h_1h_2) = \rho_g(h_1)\rho_g(h_2)$  für alle  $g \in G, h_1, h_2 \in H$ , weil  $\rho_g$  ein Isomorphismus ist. Die Assoziativität der Multiplikation in  $G \rtimes_\rho H$  folgt aus

$$\begin{aligned} ((g_1, h_1)(g_2, h_2))(g_3, h_3) &= (g_1g_2, h_1\rho_{g_1}(h_2))(g_3, h_3) \\ &= (g_1g_2g_3, h_1\rho_{g_1}(h_2)\rho_{g_1g_2}(h_3)) \\ &= (g_1g_2g_3, h_1\rho_{g_1}(h_2\rho_{g_2}(h_3))) \\ &= (g_1, h_1)(g_2g_3, h_2\rho_{g_2}(h_3)) \\ &= (g_1, h_1)((g_2, h_2)(g_3, h_3)), \end{aligned}$$

das neutrale Element ist  $(1, 1)$ , denn

$$(g, h)(1, 1) = (g, h\rho_g(1)) = (g, h),$$

und das Inverse von  $(g, h)$  ist  $(g^{-1}, \rho_{g^{-1}}(h^{-1}))$ , da

$$(g, h)(g^{-1}, \rho_{g^{-1}}(h^{-1})) = (1, h\rho_g(\rho_{g^{-1}}(h^{-1}))) = (1, 1).$$

□

## 1.2. Lie-Gruppen

Eine *Lie-Gruppe* ist eine Gruppe, die gleichzeitig eine  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit ist, so dass Multiplikation und Inversion  $C^\infty$ -Abbildungen sind. Beispiele von Lie-Gruppen sind  $GL(n, \mathbb{R})$ ,  $GL(n, \mathbb{C})$ ,  $O(p, q)$ ,  $U(p, q)$ ,  $SO(p, q)$ ,  $SU(p, q)$ ,  $SL(n, \mathbb{R})$ ,  $SL(n, \mathbb{C})$  und  $Sp(2n)$ . Da wir mit diesen Beispielen arbeiten werden, soll hier die allgemeine Definition nicht weiter erklärt werden; was wir brauchen ist der Begriff der Stetigkeit für Untergruppen von  $GL(n)$ . Wir fassen  $G \subset GL(n, \mathbb{R}), GL(n, \mathbb{C})$  als Teilmenge von  $\mathbb{C}^{n^2}$  auf, indem wir die Matrixelemente einer Matrix  $A \in G$  als Punkt  $(A_{11}, A_{12}, \dots, A_{nn})$  in  $\mathbb{R}^{n^2}$  bzw.  $\mathbb{C}^{n^2}$  schreiben. Diese Identifikation definiert die Struktur eines metrischen Raum auf  $G$ . Der Abstand  $d(A, B)$  zwischen zwei Matrizen aus  $G$  ist

$$d(A, B)^2 = \sum_{i,j=1}^n |A_{ij} - B_{ij}|^2 = \text{tr}(A - B)^*(A - B).$$

SATZ 1.2.1. *Sei  $G$  eine Untergruppe von  $GL(n, \mathbb{K})$ ,  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$ . Dann sind die Multiplikation  $G \times G \rightarrow G$ ,  $(A, B) \mapsto AB$  und die Inversion  $G \rightarrow G$ ,  $A \mapsto A^{-1}$  stetige Abbildungen.*

BEWEIS. Die Matrixelemente von  $AB$  sind Polynome in den Matrixelementen von  $A$  und  $B$  und somit stetig. Die Matrixelemente von  $A^{-1}$  sind nach der Cramerschen Regel rationale Funktionen in den Matrixelementen von  $A$ . Der Nenner ist das Polynom  $\det A$ , dass in  $GL(n, \mathbb{K})$  nie verschwindet. Also ist  $A \mapsto A^{-1}$  stetig. □

Wichtig in der Theorie der Lie-Gruppen ist der Begriff des Zusammenhangs. Sei  $G \subset GL(n, \mathbb{K})$ ,  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$ . Ein *Weg* in  $G$  ist eine stetige Abbildung  $w : [0, 1] \rightarrow G$ . Zwei Matrizen  $A_1, A_2$  in  $G$  heissen *verbindbar* ( $A_1 \sim A_2$ ), falls ein Weg  $w$  in  $G$  existiert, mit  $w(0) = A_1$  und  $w(1) = A_2$ . Alle  $A \in G$  sind mit sich selbst verbindbar (mit Weg  $w(t) = A$ ,  $t \in [0, 1]$ ). Weiter folgt aus  $A_1 \sim A_2$  mit Weg  $w$ , dass  $A_2 \sim A_1$  mit Weg  $\bar{w}(t) = w(1 - t)$ . Ist  $A_1$  mit  $A_2$  durch einen Weg  $w_1$  verbindbar und ist  $A_2$  mit  $A_3$  durch einen Weg  $w_2$  verbindbar, so verbindet der zusammengesetzte Weg

$$(w_1 \circ w_2)(t) = \begin{cases} w_1(2t), & 0 \leq t \leq 1/2 \\ w_2(2t - 1), & 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

$A_1$  mit  $A_3$ . Also ist  $\sim$  eine Äquivalenzrelation.

DEFINITION 1.2.1. Sei  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  oder  $\mathbb{R}$ . Die (Weg-)Zusammenhangskomponenten von  $G \subset GL(n, \mathbb{K})$ , sind die Äquivalenzklassen bezüglich  $\sim$ . Besteht  $G$  aus einer einzigen Zusammenhangskomponente, so heisst  $G$  (weg-)zusammenhängend.

SATZ 1.2.2. Sei  $G \subset GL(n, \mathbb{K})$  eine Untergruppe, und  $G_0$  die Zusammenhangskomponente, die  $\mathbf{1}$  enthält. Dann ist  $G_0$  ein Normalteiler von  $G$  und  $G/G_0 = \{\text{Zusammenhangskomponenten von } G\}$ .

BEWEIS. Übung. □

Als Beispiel, untersuchen wir die Zusammenhangseigenschaften von unitären und orthogonalen Gruppen.

SATZ 1.2.3.

- (i)  $SO(n), SU(n), U(n)$  sind zusammenhängend.
- (ii)  $O(n)$  besteht aus zwei Zusammenhangskomponenten:  $\{A \in O(n) \mid \det A = 1\}$  und  $\{A \in O(n) \mid \det A = -1\}$ .

BEWEIS. Unitärer Fall: Der Normalformensatz für unitäre Matrizen der linearen Algebra besagt, dass zu jeder Matrix  $A \in U(n)$  eine Matrix  $U \in U(n)$  existiert, mit  $A = UDU^{-1}$ , wobei  $D = \text{diag}(e^{i\varphi_1}, \dots, e^{i\varphi_n})$ ,  $\varphi_j \in \mathbb{R}$ . Die Abbildung  $[0, 1] \rightarrow U(n)$ ,  $w : t \mapsto U \text{diag}(e^{it\varphi_1}, \dots, e^{it\varphi_n})U^{-1}$  ist stetig, da die Multiplikationen mit  $U$  und  $U^{-1}$  nach Satz 1.2.1 stetige Abbildungen sind und  $t \mapsto e^{it\varphi}$  stetig ist. Der Weg  $w$  verbindet  $\mathbf{1}$  mit der beliebigen Matrix  $A \in U(n)$ . Hat  $A$  Determinante 1, so ist  $\det D = 1$  und  $\sum_i \varphi_i \in 2\pi\mathbb{Z}$ , o.E.d.A.  $\sum_i \varphi_i = 0$ . Daraus folgt, dass  $\det(w(t)) = 1$ , und  $w$  ist ein Weg in  $SU(n)$ . Also sind  $U(n)$  und  $SU(n)$  zusammenhängend.

Orthogonaler Fall: Die Normalform für orthogonale Matrizen  $A \in O(n)$  ist  $A = ODO^{-1}$ ,  $O \in O(n)$  und  $D$  hat Blockdiagonalform mit Blöcken

$$R(\varphi_1), \dots, R(\varphi_j), -1, \dots, -1, 1, \dots, 1,$$

wobei  $R(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$ . Für  $A \in SO(n)$  ist die Anzahl  $(-1)$ -Blöcke gerade, und da  $R(\pi) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ , dürfen wir annehmen, dass keine  $(-1)$  vorkommen. Sei  $D(t)$  die blockdiagonale Matrix mit Blöcken  $R(t\varphi_1), \dots, R(t\varphi_j), 1, \dots, 1$ . Der Weg  $w(t) = OD(t)O^{-1}$  verbindet  $\mathbf{1}$  mit  $A$ . Also ist  $SO(n)$  zusammenhängend.

Sei jetzt  $A \in O(n)$  und  $P$  die Spiegelung  $\text{diag}(1, \dots, 1, -1) \in O(n)$ . Ist  $\det A = 1$ , so ist  $A$  mit  $\mathbf{1}$  verbindbar. Ist  $\det A = -1$ , so ist  $\det(PA) = \det P \det A = 1$ , also existiert ein Weg  $w$  der  $\mathbf{1}$  mit  $PA$  verbindet. Der Weg  $Pw$  verbindet  $P$  mit  $A$ . Also fallen die Matrizen mit gleicher Determinante in die gleiche Zusammenhangskomponente. Es bleibt zu zeigen, dass  $\mathbf{1}$  mit  $P$  nicht verbindbar ist: sei  $w$  ein Weg mit  $w(0) = \mathbf{1}$  und  $w(1) = P$ . Die Funktion  $\delta : t \mapsto \det(w(t))$  ist stetig von  $[0, 1]$  nach  $\mathbb{R}$ , nimmt die Werte  $\pm 1$  und  $\delta(0) = 1$ ,  $\delta(1) = -1$ . Widerspruch. □



## Darstellungen von Gruppen

Wenn eine Gruppe auf einem Vektorraum durch linearen Abbildungen operiert, so spricht man von einer Darstellung. Die Grundlegende Eigenschaften von Darstellungen, und das wichtige Lemma von Schur werden hier diskutiert. Literatur: [4], [9], für Anwendungen [2], [8].

### 2.1. Definitionen und Beispiele

DEFINITION 2.1.1. Eine (reelle bzw. komplexe) *Darstellung* einer Gruppe  $G$  auf einem  $\mathbb{R}$ - (bzw.  $\mathbb{C}$ )-Vektorraum  $V \neq 0$  ist ein Homomorphismus  $\rho : G \rightarrow GL(V)$ . Der Vektorraum  $V$  heisst dann *Darstellungsraum* der Darstellung  $\rho$ .

Also ordnet eine Darstellung  $\rho$  jedem Element  $g$  von  $G$  eine invertierbare lineare Abbildung  $\rho(g) : V \rightarrow V$  zu, so dass für alle  $g, h \in G$  die ‘‘Darstellungseigenschaft’’  $\rho(gh) = \rho(g)\rho(h)$  gilt.

Wir werden im Falle von Lie-Gruppen nur *stetige* Darstellungen betrachten. Wir werden auch fast ausschliesslich komplexe endlichdimensionale Darstellungen anschauen.

Eine Darstellung  $\rho$  auf  $V$  wird mit  $(\rho, V)$  bezeichnet. Wenn keine Zweideutigkeit besteht, wird oft von einer Darstellung  $\rho$  oder einer Darstellung  $V$  gesprochen. Die *Dimension* einer Darstellung  $(\rho, V)$  ist die Dimension des Darstellungsraumes  $V$ .

BEISPIEL 2.1.1. Die *triviale* Darstellung:  $V = \mathbb{C}$ ,  $\rho(g) = 1$  für alle  $g \in G$ .

BEISPIEL 2.1.2.  $G = S_n$ ,  $V = \mathbb{C}^n$  mit Basis  $e_1, \dots, e_n$ ,  $\rho(g)e_i = e_{g(i)}$ ,  $g \in S_n$ .

BEISPIEL 2.1.3.  $G = O(3)$ ,  $V = C^\infty(\mathbb{R}^3)$ ,  $(\rho(g)f)(x) = f(g^{-1}x)$ .

4)  $G = \mathbb{Z}_n$ ,  $V = \mathbb{C}$ ,  $\rho(m) = e^{\frac{2\pi i}{n}m}$ , wobei  $GL(\mathbb{C})$  ist mit  $\mathbb{C} - \{0\}$  identifiziert.

LEMMA 2.1.1. Sei  $\rho : G \rightarrow GL(V)$  eine Darstellung. Dann ist  $\rho(1) = 1_V$ , die Identitätsabbildung  $V \rightarrow V$  und  $\rho(g)^{-1} = \rho(g^{-1})$ .

BEWEIS.  $\rho(g) = \rho(g1) = \rho(g)\rho(1)$ , Da  $\rho(g)$  invertierbar ist, folgt dass  $\rho(1)$  die Identität ist. Es gilt  $1_V = \rho(1) = \rho(gg^{-1}) = \rho(g)\rho(g^{-1})$ , also  $\rho(g)^{-1} = \rho(g^{-1})$ .  $\square$

Operiert eine Gruppe  $G$  auf einer Menge  $X$  so hat man eine Darstellung auf dem Vektorraum aller komplex- oder reellwertigen Funktionen auf  $X$ :  $(\rho(g)f)(x) = f(g^{-1}x)$ . Ein wichtiger Spezialfall ist die reguläre Darstellung einer endlichen Gruppe:

DEFINITION 2.1.2. Die *reguläre* Darstellung einer endlichen Gruppe  $G$  ist die Darstellung auf dem Raum  $\mathbb{C}(G)$  aller Funktionen von  $G$  nach  $\mathbb{C}$ ,

$$(\rho_{\text{reg}}(g)f)(h) = f(g^{-1}h), \quad f \in \mathbb{C}(G), g, h \in G.$$

Diese Darstellung hat folgende alternative Beschreibung:  $\mathbb{C}(G)$  hat eine Basis  $(\delta_g)_{g \in G}$  von ‘‘delta-Funktionen’’:  $\delta_g(g) = 1$ ,  $\delta_g(h) = 0$  wenn  $h \neq g$ . Dann ist  $\rho_{\text{reg}}$  die Darstellung, so, dass  $\rho_{\text{reg}}(g)\delta_h = \delta_{gh}$ .

DEFINITION 2.1.3. Ein *Homomorphismus* von Darstellungen  $(\rho_1, V_1) \rightarrow (\rho_2, V_2)$  ist eine lineare Abbildung  $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$  so, dass  $\varphi\rho_1(g) = \rho_2(g)\varphi$ , für alle  $g \in G$ . Zwei Darstellungen  $(\rho_1, V_1), (\rho_2, V_2)$  sind *äquivalent* (oder isomorph) falls ein bijektiver Homomorphismus von Darstellungen  $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$  existiert. Der Vektorraum aller Homomorphismen  $(\rho_1, V_1) \rightarrow (\rho_2, V_2)$  wird mit  $\text{Hom}_G(V_1, V_2)$  oder  $\text{Hom}_G((\rho_1, V_1), (\rho_2, V_2))$  bezeichnet.

DEFINITION 2.1.4. Ein *invarianter Unterraum* einer Darstellung  $(\rho, V)$  ist ein Unterraum  $W \subset V$  mit  $\rho(g)W \subset W \forall g \in G$ . Eine Darstellung  $(\rho, V)$  heisst *irreduzibel*, falls sie keine invarianten Unterräume ausser  $V$  und  $\{0\}$  besitzt, sonst *reduzibel*. Ist  $W \neq \{0\}$  ein invarianter Unterraum, so ist die Einschränkung  $\rho|_W : G \rightarrow GL(W), g \mapsto \rho(g)|_W$  eine Darstellung:  $(\rho|_W, W)$  ist eine *Unterdarstellung* von  $(\rho, V)$ .

DEFINITION 2.1.5. Eine Darstellung  $(\rho, V)$  heisst *vollständig reduzibel*, falls invariante Unterräume  $V_1, \dots, V_n$  existieren, so dass  $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_n$  und die Unterdarstellungen  $(\rho|_{V_i}, V_i)$  irreduzibel sind.

Eine solche Zerlegung von  $V$  heisst Zerlegung in irreduzible Darstellungen.

BEMERKUNG 2.1.1. Nicht jede reduzible Darstellung ist vollständig reduzibel. Zum Beispiel ist die Darstellung von  $\mathbb{Z}$  auf  $\mathbb{C}^2, n \mapsto \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  reduzibel (mit invariantem Unterraum  $\mathbb{C} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ) nicht aber vollständig reduzibel, denn  $\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  ist für  $n \neq 0$  nicht diagonalisierbar.

LEMMA 2.1.2. Sei  $(\rho, V)$  eine endlichdimensionale Darstellung so dass zu jedem invarianten Unterraum  $W \subset V$  ein invarianter Unterraum  $W'$  existiert mit  $V = W \oplus W'$ . Dann ist  $(\rho, V)$  vollständig reduzibel.

BEWEIS. Durch Induktion nach der Dimension  $d$  von  $V$ . Für  $d = 1$  ist nichts zu beweisen. Ist  $\dim V = d + 1$ , dann ist entweder  $V$  irreduzibel oder es existiert ein invarianter Unterraum  $W$  der Dimension  $1 \leq \dim W \leq d$ . Sei  $W'$  invariant mit  $W \oplus W' = V$ . Dann ist  $1 \leq \dim W' \leq d$ . Wir zeigen dass  $W$  und  $W'$  vollständig reduzibel sind. Sei  $U \subset W$  ein invarianter Unterraum positiver Dimension. Dann gibt es nach Annahme eine Zerlegung  $V = U \oplus U'$  mit  $U'$  invariant. Insbesondere lässt sich jedes  $w \in W$  eindeutig zerlegen als  $w = u + u'$  mit  $u \in U, u' \in U'$ . Da  $u' = w - u$  und  $w, u \in W$  gilt  $u' \in U' \cap W$ , und wir erhalten die Zerlegung in invariante Unterräume

$$W = U \oplus (U' \cap W).$$

Nach Induktionsannahme ist also  $W$ , und analog auch  $W'$ , vollständig reduzibel, also auch  $V$ .  $\square$

## 2.2. Zerlegung in irreduzible Darstellungen: ein Beispiel

Wir betrachten die Darstellung  $\rho$  der Gruppe  $S_3$  der Permutationen von  $\{1, 2, 3\}$  auf  $\mathbb{C}^3$  so dass  $\rho(\sigma)e_i = e_{\sigma(i)}, \sigma \in S_3$ . Hier ist  $\{e_1, e_2, e_3\}$  die Standardbasis von  $\mathbb{C}^3$ .

Also für  $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{C}^3$  haben wir

$$\rho(\sigma)x = (x_{\sigma^{-1}(1)}, x_{\sigma^{-1}(2)}, x_{\sigma^{-1}(3)}).$$

Diese Darstellung hat zwei invariante Unterräume  $V_1 = \{(z, z, z), z \in \mathbb{C}\}$  und  $V_2 = \{x \in \mathbb{C}^3, x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$ . Die Einschränkung von  $\rho$  auf  $V_1$  ist irreduzibel denn  $\dim(V_1) = 1$ . Die Unterdarstellung  $\rho|_{V_2}$  ist zweidimensional und irreduzibel. Ist nämlich  $W \subset V_2$  ein invarianter Unterraum mit  $W \neq 0, V_2$ , so ist  $W$  eindimensional, also von einem nichtverschwindenden Vektor  $x = (x_1, x_2, x_3) \in V_2$  aufgespannt. Da  $W$  invariant ist, müssen die Vektoren  $(x_2, x_1, x_3)$  und  $(x_1, x_3, x_2)$  proportional zu  $x$

sein. Es folgt dass  $x_1 = x_2 = x_3$ . Da aber die Summe der Komponenten 0 ist, folgt dass  $x = 0$ , ein Widerspruch. Folglich ist  $V_2$  irreduzibel.

Also ist  $\rho$  vollständig reduzibel, mit Zerlegung  $V = V_1 \oplus V_2$  in irreduzible Darstellungen.

### 2.3. Unitäre Darstellungen

Wir betrachten in diesem Abschnitt ausschliesslich endlichdimensionale komplexe Darstellungen.

DEFINITION 2.3.1. Eine Darstellung  $\rho$  auf einem Vektorraum  $V$  mit Skalarprodukt heisst *unitär* falls  $\rho(g)$  für alle  $g \in G$  unitär ist.

Also gilt für eine unitäre Darstellung  $\rho(g)^* = \rho(g)^{-1}$  für alle  $g \in G$ . Mit Lemma 2.1.1 kann diese Bedingung als  $\rho(g^{-1}) = \rho(g)^*$  geschrieben werden.

SATZ 2.3.1. *Unitäre Darstellungen sind vollständig reduzibel.*

BEWEIS. Sei  $W$  ein invarianter Unterraum einer unitären Darstellung  $(\rho, V)$ , und

$$W^\perp = \{v \in V \mid (v, w) = 0 \forall w \in W\}.$$

Dann ist  $W^\perp$  auch invariant, denn

$$v \in W^\perp, g \in G \Rightarrow (\rho(g)v, w) = (v, \rho(g)^*w) = (v, \rho(g)^{-1}w) = 0$$

für alle  $w \in W$ , und also ist  $\rho(g)v \in W^\perp$ . Nach Lemma 2.1.2 ist also  $(\rho, V)$  vollständig reduzibel.  $\square$

SATZ 2.3.2. *Sei  $(\rho, V)$  eine Darstellung einer endlichen Gruppe  $G$ . Dann existiert ein Skalarprodukt  $(\cdot, \cdot)$  auf  $V$ , so dass  $(\rho, V)$  unitär ist.*

BEWEIS. Sei  $(\cdot, \cdot)_0$  irgendein Skalarprodukt auf  $V$ . Setze

$$(v, w) = \sum_{g \in G} (\rho(g)v, \rho(g)w)_0.$$

Zuerst zeigen wir, dass  $(\cdot, \cdot)$  ein Skalarprodukt ist: Es ist klar dass  $(\lambda v + \mu w, u) = \lambda(v, u) + \mu(w, u)$ , und dass  $\overline{(v, w)} = (w, v)$ . Ist  $v \neq 0$  so ist  $\rho(g)v \neq 0$  ( $\rho(g)$  ist invertierbar) und  $(\rho(g)v, \rho(g)v)_0 > 0$  für alle  $g$ . Also  $(v, v) > 0$ . dass  $\rho(g)$  unitär ist, folgt aus

$$\begin{aligned} (\rho(g)v, \rho(g)w) &= \sum_{h \in G} (\rho(h)\rho(g)v, \rho(h)\rho(g)w)_0 = \sum_{h \in G} (\rho(hg)v, \rho(hg)w)_0 \\ &\stackrel{h \rightarrow hg^{-1}}{=} \sum_{h \in G} (\rho(h)v, \rho(h)w)_0 = (v, w). \end{aligned}$$

$\square$

KOROLLAR 2.3.3. *Darstellungen von endlichen Gruppen sind vollständig reduzibel.*

### 2.4. Das Lemma von Schur

Seien  $(\rho_1, V_1), (\rho_2, V_2)$  komplexe endlichdimensionale Darstellungen einer Gruppe  $G$ . Wir untersuchen den Raum  $\text{Hom}_G(V_1, V_2)$  der linearen Abbildungen  $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$  so dass  $\varphi \rho_1(g) = \rho_2(g) \varphi \forall g \in G$ .

BEISPIEL 2.4.1.  $(\rho_1, V_1) = (\rho_2, V_2) = (\rho, V)$ ,  $\varphi : V \rightarrow V$  Hamiltonoperator eines quantenmechanischen Systems mit Symmetriegruppe  $G$ .

SATZ 2.4.1. (*Lemma von Schur*) *Seien  $(\rho_1, V_1), (\rho_2, V_2)$  irreduzible komplexe endlichdimensionale Darstellungen von  $G$ .*

- (i)  $\varphi \in \text{Hom}_G(V_1, V_2) \Rightarrow \varphi \equiv 0$  oder  $\varphi$  ist ein Isomorphismus.
- (ii)  $\varphi \in \text{Hom}_G(V_1, V_1)$ . Dann ist  $\varphi = \lambda \text{Id}$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$ .

BEWEIS. (i) Sei  $\varphi \in \text{Hom}_G(V_1, V_2)$ ,  $V_1 \neq \{0\}$ . Wir zeigen:  $\text{Ker}\varphi$  und  $\text{Im}\varphi$  sind invariante Unterräume:

$$\begin{aligned} v \in \text{Ker}\varphi &\Rightarrow \varphi(\rho_1(g)v) = \rho_2(g)\varphi(v) = 0 \Rightarrow \rho_1(g)v \in \text{Ker}\varphi, \\ v = \varphi(u) \in \text{Im}\varphi &\Rightarrow \rho_2(g)v = \varphi(\rho_1(g)u) \in \text{Im}\varphi. \end{aligned}$$

Also ist entweder  $\text{Ker}\varphi = V_1$  und  $\varphi = 0$ , oder  $\text{Ker}\varphi = 0$  und  $\varphi$  ist injektiv. Im letzteren Fall ist  $\text{Im}\varphi = V_2$ , da  $\text{Im}\varphi$  invariant und  $\neq \{0\}$  ist.

(ii) Da jeder lineare Endomorphismus von endlichdimensionalen komplexen Vektorräumen einen Eigenvektor hat, existiert ein  $\lambda \in \mathbb{C}$  mit

$$\text{Ker}(\varphi - \lambda \text{Id}) \neq \{0\}.$$

Da  $\varphi - \lambda \text{Id} \in \text{Hom}_G(V_1, V_1)$  ist  $\ker(\varphi - \lambda \text{Id})$  invariant, also nach (i)  $\varphi - \lambda \text{Id} = 0$ .  $\square$

KOROLLAR 2.4.2. *Jede irreduzible endlichdimensionale komplexe Darstellung einer abelschen Gruppe ist eindimensional.*

BEWEIS. Sei  $G$  abelsch,  $(\rho, V)$  irreduzibel. Für alle  $g \in G$  ist dann  $\rho(g) : V \rightarrow V$  in  $\text{Hom}_G(V, V)$ . Also ist  $\rho(g) = \lambda(g)\mathbf{1}$ ,  $\lambda(g) \in \mathbb{C}^*$ . Jeder eindimensionale Unterraum ist also invariant. Dies ist aber nur möglich wenn  $V$  selbst eindimensional ist.  $\square$

## Darstellungstheorie von endlichen Gruppen

Wir studieren die Darstellungstheorie von endlichen Gruppen und folgen den ersten Teil von [6]. Die grundlegende Bemerkung ist, dass jede irreduzible Darstellung einer endlichen Gruppe in der Zerlegung der “regulären” Darstellung vorkommt. Die technischen Hilfsmittel sind die Orthogonalitätsrelationen und die Charakteren (= Spuren von Darstellungsmatrizen).

In diesem Kapitel bezeichnet  $G$ , ausser im letzten Abschnitt, stets eine endliche Gruppe. Alle Darstellungen werden endlichdimensional und komplex angenommen.

### 3.1. Orthogonalitätsrelationen der Matrixelemente

Sei  $\rho : G \rightarrow GL(V)$  eine irreduzible Darstellung der Gruppe  $G$  der Dimension  $d$ . Wir haben im Satz 2.3.2 gesehen, dass dann ein Skalarprodukt auf  $V$  existiert, so dass  $\rho$  unitär ist. Also ist für alle  $g \in G$  die Matrix  $(\rho_{ij}(g))$  von  $\rho(g)$  bezüglich einer beliebigen orthonormierten Basis unitär:  $\rho_{ij}(g^{-1}) = \overline{\rho_{ji}(g)}$ .

**SATZ 3.1.1.** *Seien  $\rho : G \rightarrow GL(V)$ ,  $\rho' : G \rightarrow GL(V')$  irreduzible unitäre Darstellungen einer endlichen Gruppe  $G$ . Es bezeichnen  $(\rho_{ij}(g))$ ,  $(\rho'_{kl}(g))$  die Matrizen von  $\rho(g)$ ,  $\rho'(g)$  bezüglich orthonormierten Basen von  $V$ , bzw.  $V'$ .*

(i) *Sind  $\rho$ ,  $\rho'$  inäquivalent, so gilt für alle  $i, j, k, l$ ,*

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\rho_{ij}(g)} \rho'_{kl}(g) = 0$$

(ii) *Für alle  $i, j, k, l$  gilt*

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\rho_{ij}(g)} \rho_{kl}(g) = \frac{1}{\dim V} \delta_{ik} \delta_{jl}$$

Der Beweis beruht auf dem Schur’schen Lemma. Sei  $\phi$  irgendeine lineare Abbildung  $V \rightarrow V'$ . mit Matrix  $(\phi_{jk})$ ,  $1 \leq j \leq \dim V'$ ,  $1 \leq k \leq \dim V$  und betrachte

$$\phi_G = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho'(g^{-1}) \phi \rho(g).$$

Die Matrixelemente von  $\phi_G$  bezüglich der gewählten Basen sind dann

$$(\phi_G)_{jl} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \sum_{i,k} \overline{\rho'_{ij}(g)} \phi_{ik} \rho_{kl}(g) = \sum_{i,k} \phi_{ik} \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\rho'_{ij}(g)} \rho_{kl}(g),$$

so dass der Koeffizient von  $\phi_{ik}$  gerade die linke Seite der zu beweisenden Identitäten ist. Wir haben hier die Unitarität verwendet, um  $\rho'_{ji}(g^{-1})$  durch  $\overline{\rho'_{ij}(g)}$  zu ersetzen.

Andererseits erfüllt  $\phi_G$  die Annahme des Schur'schen Lemmas:

$$\begin{aligned}
\phi_G \rho(h) &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho'(g^{-1}) \phi \rho(g) \rho(h) \\
&= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho'(g^{-1}) \phi \rho(gh) \\
&= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho'((gh^{-1})^{-1}) \phi \rho(g) \\
&= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho'(hg^{-1}) \phi \rho(g) \\
&= \rho'(h) \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho'(g^{-1}) \phi \rho(g) \\
&= \rho'(h) \phi_G.
\end{aligned}$$

Somit ist  $\phi_G = 0$  wenn  $\rho, \rho'$  inäquivalent sind, und (i) ist bewiesen, denn wir können für gegebene  $i, k, \phi$  so wählen, dass  $\phi_{rs} = 1$  falls  $r = i$  und  $s = k$  und  $\phi_{rs} = 0$  sonst.

Ist  $\rho = \rho'$ , so gilt nach dem Lemma von Schur  $\phi_G = \lambda(\phi) 1$ . Um die Konstante  $\lambda(\phi)$  auszuwerten nehmen wir die Spur von  $\phi_G$ : da allgemein  $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$  hat man  $\text{tr}(\rho(g^{-1})\phi\rho(g)) = \text{tr}(\phi)$ . Andererseits ist  $\text{tr}(1_V) = \dim V$ . Also, mit der Linearität der Spur, erhalten wir  $\text{tr}(\phi_G) = \lambda(\phi) \dim V$ , also

$$\phi_G = \frac{1}{\dim V} \text{tr}(\phi) 1_V, \quad \text{oder} \quad (\phi_G)_{jl} = \frac{1}{\dim V} \text{tr}(\phi) \delta_{jl}$$

Wählt man, für gegebene  $i, k, \phi$  wie oben, so ist die Spur null wenn  $i \neq k$  und 1 wenn  $i = k$ . Es gilt also

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\rho_{ij}(g)} \rho_{kl}(g) = \frac{1}{\dim V} \delta_{ik} \delta_{jl}.$$

Der Satz ist somit bewiesen.

### 3.2. Charakteren

Der *Charakter* einer endlichdimensionalen Darstellung  $\rho : G \rightarrow GL(V)$  einer Gruppe  $G$  ist die komplexwertige Funktion auf  $G$ :

$$\chi_\rho(g) = \text{tr}(\rho(g)) = \sum_{j=1}^{\dim V} \rho_{jj}(g).$$

Hier sind  $\rho_{ij}(g)$  die Matrixelemente bezüglich einer beliebigen Basis von  $G$ . Aus der grundlegenden Eigenschaft  $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$  der Spur folgt:

SATZ 3.2.1.

- (i)  $\chi_\rho(g) = \chi_\rho(hgh^{-1})$
- (ii) Sind  $\rho, \rho'$  äquivalente Darstellungen, so gilt  $\chi_\rho = \chi_{\rho'}$

Eine *Konjugationsklasse* von  $G$  ist eine Teilmenge von  $G$  der Form  $\{hgh^{-1}, h \in G\}$ . Die Gruppe  $G$  zerfällt in Konjugationsklassen, der Äquivalenzklassen bezüglich der Äquivalenzrelation  $\sim: g \sim g'$  ("g ist konjugiert zu g'") falls ein  $h \in G$  existiert, so dass  $g' = hgh^{-1}$ . Dann bedeutet (i), dass  $\chi_\rho$  einen konstanten Wert auf jeder Konjugationsklasse annimmt.

Weitere elementare Eigenschaften sind

LEMMA 3.2.2.

- (i)  $\chi_\rho(1) = \dim V$ ,

- (ii)  $\chi_{\rho \oplus \rho'} = \chi_{\rho} + \chi_{\rho'}$   
 (iii)  $\chi_{\rho}(g^{-1}) = \overline{\chi_{\rho}(g)}$ ,  $\forall g \in G$ .

BEWEIS. (i)  $\chi_{\rho}(1) = \text{tr}(1_V) = \dim V$ . (ii) Bezüglich einer Basis von  $V \oplus V'$  so dass die ersten  $\dim V$  Basiselemente zu  $V$  gehören und die restlichen zu  $V'$ , hat  $(\rho \oplus \rho')(g)$  die Blockform

$$\begin{pmatrix} \rho(g) & 0 \\ 0 & \rho'(g) \end{pmatrix}.$$

Es ist also klar dass die Spur gleich der Summe der Spuren ist. (iii) Wir wissen, dass es ein Skalarprodukt auf dem Darstellungsraum gibt, so dass die Darstellung unitär ist (Satz 2.3.2). Wir können also die Spur bezüglich einer orthonormierten Basis ausrechnen. Die diagonalen Matrixelemente bezüglich einer orthonormierten Basis erfüllen  $\rho_{jj}(g^{-1}) = \overline{\rho_{jj}(g)}$ . Die Behauptung folgt durch Summation über  $j$ .  $\square$

### 3.3. Der Charakter der regulären Darstellung

Wir wählen die Basis  $(\delta_g)_{g \in G}$  des Raumes  $\mathbb{C}(G)$ . Es gilt  $\rho_{\text{reg}}(g)\delta_h = \delta_{gh}$ . Da  $gh \neq h$  für  $g \neq 1$  hat  $\rho(g)$  in diesem Falle keine nichtverschwindenden diagonalen Matrixelemente, und die Spur ist somit null. Andererseits ist  $\text{tr}(\rho(1)) = \dim \mathbb{C}(G) = |G|$ , also ist der Charakter von  $\rho_{\text{reg}}$

$$\chi_{\text{reg}}(g) = \begin{cases} |G|, & \text{falls } g = 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

### 3.4. Orthogonalitätsrelationen der Charakteren

Aus den Orthogonalitätsrelationen von Matrixelementen folgen Orthogonalitätsrelationen der Charakteren von irreduziblen Darstellungen. Wir führen das Skalarprodukt

$$(3.1) \quad (f_1, f_2) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{f_1(g)} f_2(g)$$

auf dem Raum  $\mathbb{C}(G)$  aller komplexwertigen Funktionen auf  $G$  ein.

SATZ 3.4.1. Seien  $\rho, \rho'$  irreduzible Darstellungen der endlichen Gruppe  $G$ , und seien  $\chi_{\rho}, \chi_{\rho'}$  ihre Charakteren. Dann gilt

- (i) Sind  $\rho, \rho'$  inäquivalent, so gilt  $(\chi_{\rho}, \chi_{\rho'}) = 0$ .  
 (ii) Sind  $\rho, \rho'$  äquivalent, so gilt  $(\chi_{\rho}, \chi_{\rho'}) = 1$ .

Im Falle (i) gilt nach Satz 3.1.1  $(\chi_{\rho}, \chi_{\rho'}) = \sum_{i,j} (\rho_{ii}, \rho'_{jj}) = 0$ . Im Falle (ii) dürfen wir nach Satz 3.2.1 (ii) annehmen dass  $\rho = \rho'$ . Es gilt dann  $(\chi_{\rho}, \chi_{\rho}) = \sum_{i,j} (\rho_{ii}, \rho_{jj}) = \sum_{i=1}^{\dim V} (\dim V)^{-1} = 1$ .

KOROLLAR 3.4.2. Ist  $\rho = \rho_1 \oplus \dots \oplus \rho_n$  eine Zerlegung einer Darstellung  $\rho$  in irreduzible Darstellungen, und  $\sigma$  eine irreduzible Darstellung, so ist die Anzahl  $\rho_i$  die äquivalent zu  $\sigma$  gleich  $(\chi_{\rho}, \chi_{\sigma})$

Insbesondere ist  $(\chi_{\rho}, \chi_{\sigma})$  stets eine nichtnegative ganze Zahl, und  $(\chi_{\rho}, \chi_{\rho}) = 1$  genau dann, wenn  $\rho$  irreduzibel ist.

BEWEIS. Nach Satz 3.2.2 (ii) ist  $\chi_{\rho} = \chi_{\rho_1} + \dots + \chi_{\rho_n}$ . Also ist  $(\chi_{\rho}, \chi_{\sigma}) = \sum (\chi_{\rho_i}, \chi_{\sigma})$ . Nur die zu  $\sigma$  äquivalenten  $\rho_i$  tragen nach Satz 3.4.1 der Summe bei, und zwar mit Beitrag eins. Das Korollar ist bewiesen.  $\square$

Aus diesem Korollar folgt, dass für jede Zerlegung  $\rho = \rho_1 \oplus \dots \oplus \rho_n$  in irreduzible Darstellungen, die Anzahl  $\rho_i$  die äquivalent zu einer vorgegebenen irreduziblen

Darstellung  $\sigma$  unabhängig von der Wahl der Zerlegung ist. Ist diese Zahl  $m$ , so sagt man, dass die irreduzible Darstellung  $\sigma$   $m$  mal in der Darstellung  $\rho$  vorkommt.

### 3.5. Zerlegung der regulären Darstellung

Folgender Satz zeigt, dass jede irreduzible Darstellung im Prinzip aus der Zerlegung der regulären Darstellung gewonnen werden kann.

**SATZ 3.5.1.** *Jede irreduzible Darstellung einer endlichen Gruppe  $G$  kommt in der regulären Darstellung vor. Hat eine irreduzible Darstellung die Dimension  $d$ , so kommt sie  $d$  mal in der regulären Darstellung vor.*

Nach Korollar 3.4.2 bedeutet dies, dass für jede irreduzible Darstellung  $\sigma$  der Dimension  $d$ ,  $(\chi_\sigma, \chi_{\text{reg}}) = d$ . Das ergibt sich aus folgender Rechnung

$$(\chi_\sigma, \chi_{\text{reg}}) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\chi_\sigma(g)} \chi_{\text{reg}}(g) = \chi_\sigma(1) = d.$$

**KOROLLAR 3.5.2.** *Eine endliche Gruppe  $G$  besitzt endlich viele Äquivalenzklassen irreduzibler Darstellungen. Ist  $\rho_1, \dots, \rho_k$  eine Liste von irreduziblen inäquivalenten Darstellungen, eine in jeder Äquivalenzklasse, so gilt für ihre Dimensionen  $d_i$*

$$d_1^2 + \dots + d_k^2 = |G|.$$

Es gilt  $\chi_{\text{reg}}(g) = \sum_i d_i \chi_{\rho_i}(g)$ . Insbesondere für  $g = 1$  erhalten wir  $|G| = \sum_i d_i^2$ . Da  $|G|$  endlich ist, muss die Anzahl Summanden endlich sein.

**KOROLLAR 3.5.3.** *Sei  $\rho_1, \dots, \rho_k$  eine Liste irreduzibler inäquivalenter unitärer Darstellungen wie im vorherigen Korollar. Es bezeichnen  $\rho_{\alpha,ij}(g)$ ,  $\alpha = 1, \dots, k$ ,  $1 \leq i, j \leq d_\alpha$  die Matrixelemente von  $\rho_\alpha(g)$  bezüglich einer orthonormierten Basis. Dann bilden die Funktionen  $\rho_{\alpha,ij}$  eine orthogonale Basis von  $\mathbb{C}(G)$ .*

**BEWEIS.** Wir haben schon bewiesen, dass diese Matrixelemente orthogonal zueinander sind, also sind sie insbesondere linear unabhängig. Die Dimension von  $\mathbb{C}(G)$  ist die Ordnung  $|G|$  der Gruppe. Sie stimmt mit der Anzahl Matrixelemente  $\sum_{\alpha=1}^k d_\alpha^2$  überein. Also bilden sie eine Basis.  $\square$

**DEFINITION 3.5.1.** Eine Funktion  $f: G \rightarrow \mathbb{C}$  heisst *Klassenfunktion* falls

$$f(ghg^{-1}) = f(h)$$

für alle  $g, h \in G$ .

Nach Lemma 3.2.2 sind Charakteren Klassenfunktionen und nach Satz 3.4.1 bilden sie ein orthonormiertes System bezüglich des Skalarprodukts (3.1). Sie bilden sogar eine Basis des Unterraums der Klassenfunktionen:

**KOROLLAR 3.5.4.** *Sei  $G$  eine endliche Gruppe. Die Charakteren  $\chi_1, \dots, \chi_k$  der irreduziblen Darstellungen von  $G$  bilden eine orthonormierte Basis des Hilbertraums der Klassenfunktionen.*

**BEWEIS.** Es bleibt zu zeigen, dass jede Klassenfunktion eine Linearkombination von Charakteren irreduzibler Darstellungen ist. Wir verwenden nochmals die Idee der Mittelbildung. Sei  $f: G \rightarrow \mathbb{C}$  eine Klassenfunktion. Insbesondere gilt

$$(3.2) \quad f(g) = \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} f(hgh^{-1})$$

für alle  $g \in G$ , da alle Summanden gleich  $f(g)$  sind. Die Matrixelemente  $\rho_{\alpha,ij}$  von irreduziblen Darstellungen  $\rho_\alpha$  bezüglich beliebigen orthonormierten Basen der

Darstellungsräume bilden nach Korollar 3.5.3 eine Basis von  $L^2(G)$ . Insbesondere lässt sich  $f$  als Linearkombination von den Funktionen  $\rho_{ij}$  schreiben. Wegen (3.2), können wir in dieser Linearkombination  $\rho_{\alpha,ij}(g)$  durch ihren Mittelwert

$$\frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} \rho_{\alpha,ij}(hgh^{-1})$$

ersetzen. Dieser Ausdruck lässt sich mit Hilfe der Darstellungseigenschaft und der Orthogonalitätsrelationen für Matrixelemente berechnen:

$$\begin{aligned} \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} \rho_{\alpha,ij}(hgh^{-1}) &= \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} \sum_{k,l=1}^{\dim(\rho_\alpha)} \rho_{\alpha,ik}(h) \rho_{\alpha,kl}(g) \rho_{\alpha,lj}(h^{-1}) \\ &= \sum_{k,l=1}^{\dim(\rho_\alpha)} \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} \rho_{\alpha,ik}(h) \rho_{\alpha,kl}(g) \overline{\rho_{\alpha,jl}(h)} \\ &= \delta_{ij} \sum_{k=1}^{\dim(\rho_\alpha)} \rho_{\alpha,kk}(g) = \delta_{ij} \chi_\alpha(g). \end{aligned}$$

Also ist  $f$  eine Linearkombination von Charakteren.  $\square$

Eine Klassenfunktion ist eine Funktion, die konstant auf jeder Konjugationsklasse ist. Also ist die Dimension des Raums der Klassenfunktionen gleich der Anzahl Konjugationsklassen. Es folgt:

**KOROLLAR 3.5.5.** *Eine endliche Gruppe hat so viele Äquivalenzklassen irreduzibler Darstellungen wie Konjugationsklassen.*

### 3.6. Die Charaktertafel einer endlichen Gruppe

Die Charaktertafel einer endlichen Gruppe  $G$  ist eine Liste der Werte der Charakteren aller irreduziblen Darstellungen. Nach Korollar 3.4.2 können diese Tafeln dazu verwendet werden, um die irreduziblen Bestandteile jeder gegebenen Darstellung zu bestimmen. Charaktertafeln vieler endlichen Gruppen findet man in Büchern, z.B. [5], [1], oder in Programmen für algebraischen Rechnungen wie GAP.

Da Charakteren konstante Werte auf Konjugationsklassen annehmen, genügt es, die Werte der Charakteren für ein Element in jeder Konjugationsklasse anzugeben. Die Charaktertafel ist dann die — nach Korollar 3.5.5 quadratische — Matrix  $(\chi_i(C_j))_{i,j=1}^k$  der Werte der Charakteren  $\chi_i$  auf den Konjugationsklassen  $C_j$ .

Als einfaches Beispiel wollen wir die Charaktertafel der Gruppe  $S_3$  konstruieren. Wir haben schon zwei irreduzible Darstellungen von  $S_3$  im Abschnitt 2.2 gefunden. Nebst der eindimensionalen trivialen Darstellung  $\rho_1$ , haben wir die zweidimensionale Darstellung  $\rho_2$  auf  $V_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{C}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$ , die durch Permutation der Koordinaten gegeben ist. Da die Ordnung der Gruppe  $3! = 6$  ist, und  $1^2 + 2^2 = 5$ , fehlt uns eine eindimensionale Darstellung. Diese ist die Signumdarstellung oder alternierende Darstellung  $\rho_\epsilon = \text{sign}$ : allgemein definiert man bekanntlich das *Signum* einer Permutation  $\sigma \in S_n$  als  $\text{sign}(\sigma) = (-1)^{N(\sigma)}$ , wobei  $N(\sigma)$  die Anzahl Paare  $i < j$  mit  $\sigma(i) > \sigma(j)$ . Es gilt  $\text{sign}(\sigma\tau) = \text{sign}(\sigma)\text{sign}(\tau)$  also definiert  $\text{sign} : S_n \rightarrow \mathbb{C} - \{0\} = GL(\mathbb{C})$  eine irreduzible Darstellung von  $S_n$ . Diese Darstellung ist (für  $n > 1$ ) nicht äquivalent zur trivialen Darstellung, denn sie nimmt auch den Wert  $-1$  an.

In unserem Spezialfall der Gruppe  $S_3$  haben wir also eine Liste  $\rho_1, \rho_2, \rho_\epsilon$  aller (bis auf Äquivalenz) irreduziblen Darstellungen. Wir zerlegen nun  $S_3$  in Konjugationsklassen: Sei  $s$  die Permutation  $1 \mapsto 2, 2 \mapsto 1, 3 \mapsto 3$ , und  $t$  die Permutation

$1 \mapsto 2, 2 \mapsto 3, 3 \mapsto 1$ . Dann ist

$$S_3 = \{1, s, tst^{-1}, t^2st^{-2}, t, sts^{-1}\},$$

wie leicht nachzuweisen ist. Also zerfällt  $S_3$  in drei Konjugationsklassen: die Klasse  $[1]$ , die nur aus 1 besteht, die Klasse  $[s]$  von  $s$  mit drei Elementen, und die Klasse  $[t]$  von  $t$ , mit zwei Elementen. Die Klassen  $[s]$  und  $[t]$  sind verschieden da  $\text{sign}(s) \neq \text{sign}(t)$ .

Wir bezeichnen mit  $\chi_1, \chi_2, \chi_\epsilon$  die Charakteren von  $\rho_1, \rho_2, \rho_\epsilon$ . Die Charakteren der eindimensionalen Darstellungen sind Spuren von  $1 \times 1$  Darstellungsmatrizen, unterscheiden sich also nicht von den Darstellungsmatrizen: wir haben  $\chi_1(g) = 1$  für alle  $g \in S_3$  und  $\chi_\epsilon(1) = 1, \chi_\epsilon(s) = -1, \chi_\epsilon(t) = 1$ . Zur Berechnung von  $\chi_2$  führen wir die Basis  $(1, -1, 0), (0, 1, -1)$  von  $V_2$  ein und berechnen die Matrizen von  $s$  und  $t$ :

$$\rho(s) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \rho(t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

also sind die Spuren  $\chi_2(s) = 0, \chi_2(t) = -1$ . Ausserdem ist  $\chi_2(1) = \dim V_2 = 2$ .

Wir fassen diese Rechnungen in der Charaktertafel von  $S_3$  zusammen:

$6 S_3$	$[1]$	$3[s]$	$2[t]$
$\chi_1$	1	1	1
$\chi_2$	2	0	-1
$\chi_\epsilon$	1	-1	1

Neben jeder Konjugationsklasse ist auch die Anzahl Elemente dieser Klasse angegeben, und die 6 steht für die Ordnung der Gruppe. In der ersten Spalte stehen die Dimensionen der irreduziblen Darstellungen (vgl. Lemma 3.2.2) und die erste Zeile besteht aus 1, da sie der trivialen Darstellung entspricht.

Für eine allgemeine Gruppe  $G$  folgt aus der Orthogonalitätsrelation der Charakteren

$$\sum_{\alpha=1}^k \frac{|C_\alpha|}{|G|} \overline{\chi_i(C_\alpha)} \chi_j(C_\alpha) = \delta_{i,j}.$$

Also ist die Matrix  $(\sqrt{|C_j|/|G|} \chi_i(C_j))_{i,j=1}^k$  unitär. Es folgt, dass nicht nur ihre Zeilen sondern auch ihre Spalten orthonormiert sind. Daraus folgt die Orthogonalität der Spalten der Charaktertafel:

$$\sum_{j=1}^k \overline{\chi_j(C_\alpha)} \chi_j(C_\beta) = \frac{|G|}{|C_\alpha|} \delta_{\alpha,\beta}.$$

Wir bemerken noch, dass die Einträge  $\chi_i(C_j)$  im Allgemeinen (algebraische) komplexe Zahlen sind. Dass sie für  $S_3$  ganz sind ist eine spezielle Eigenschaft der symmetrischen Gruppen.

### 3.7. Die kanonische Zerlegung einer Darstellung

Sei  $G$  eine endliche Gruppe, und  $\rho_i : G \rightarrow GL(V_i), i = 1, \dots, k$  eine Liste aller inäquivalenten irreduziblen Darstellungen von  $G$ , d.h. eine Liste von irreduziblen Darstellungen, mit der Eigenschaft dass jede irreduzible Darstellung äquivalent zu genau einer aus der Liste ist.

Sei jetzt eine Darstellung  $\rho$  auf einem Vektorraum  $V$  gegeben. Es sei  $V = U_1 \oplus \dots \oplus U_n$  eine Zerlegung in irreduzible invarianten Unterräumen. Für jedes  $i = 1, \dots, k$  definieren wir  $W_i$  als die direkte Summe all derjenigen  $U_j$ , so dass  $\rho|_{U_j}$  äquivalent zu  $\rho_i$  ist. Dann ist

$$(3.3) \quad V = W_1 \oplus \dots \oplus W_k,$$

wobei  $W_i = 0$  sein darf. Wir zeigen nun, dass diese Zerlegung rein aus den Charakteren  $\chi_i$  der irreduziblen Darstellungen  $\rho_i$  erhalten werden kann.

**SATZ 3.7.1.** *Die Zerlegung (3.3) ist unabhängig von der Wahl der Zerlegung von  $V$  in irreduziblen Darstellungen. Die Projektion  $p_i : V \rightarrow W_i$ ,  $w_1 \oplus \cdots \oplus w_k \mapsto w_i$  ist durch die Formel*

$$(3.4) \quad p_i(v) = \frac{\dim V_i}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\chi_i(g)} \rho(g)v$$

gegeben.

**BEWEIS.** Es genügt die zweite Aussage zu beweisen, da die Unterräume  $W_i$  dann als Bilder von  $p_i$  unabhängig von jeder Wahl von Zerlegungen gegeben sind.

Wir zeigen zuerst, dass die durch (3.4) definierte Abbildung  $p_i$  die Annahme des Lemmas von Schur erfüllt: einerseits ist mit der Variablensubstitution  $g \rightarrow gh^{-1}$ ,

$$\begin{aligned} p_i(\rho(h)v) &= \frac{\dim V_i}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\chi_i(g)} \rho(gh)v \\ &= \frac{\dim V_i}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\chi_i(gh^{-1})} \rho(g)v, \end{aligned}$$

für alle  $h \in G$ ,  $v \in V$  Andererseits ist

$$\begin{aligned} \rho(h)p_i(v) &= \frac{\dim V_i}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\chi_i(g)} \rho(hg)v \\ &= \frac{\dim V_i}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\chi_i(h^{-1}g)} \rho(g)v. \end{aligned}$$

Da  $\chi(gh^{-1}) = \chi(h^{-1}g)$  ist also  $p_i\rho(h) = \rho(h)p_i$  für alle  $h \in G$ . Gegeben eine Zerlegung  $V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_n$  in irreduziblen Darstellungen, Wir betrachten die Einschränkung von  $p_i$  auf einem  $U_j$ . Der Charakter der Einschränkung von  $\rho$  auf  $U_j$  sei  $\chi$ . Für  $v \in U_j$  ist  $p_i(v)$  eine Linearkombination von Elementen aus dem invarianten Unterraum  $U_j$ . Also ist  $p_i(v)$  ebenfalls in  $U_j$ ; wir haben also eine lineare Abbildung  $p_i|_{U_j} : U_j \rightarrow U_j$ , die die Annahme des Lemmas von Schur erfüllt. Also existiert eine komplexe Zahl  $c = c_{ij}$  mit  $p_i|_{U_j} = c1_{U_j}$ . Diese Zahl rechnen wir, indem wir die Spur auf beiden Seiten der Gleichung nehmen. Wir erhalten

$$\operatorname{tr}(p_i|_{U_j}) = \dim U_j(\chi_i, \chi) = c \dim U_j$$

Also ist  $c = 1$  wenn  $\rho|_{U_j}$  äquivalent zu  $\rho_i$  ist und null sonst. Wir sehen also, dass  $p_i(v) = v$  falls  $v \in W_i$  und  $p_i(v) = 0$  falls  $v \in W_j$ ,  $j \neq i$ , was zu beweisen war.  $\square$

Die Zerlegung (3.3) heisst *kanonische Zerlegung*. Die Unterräume  $W_i$  heissen *isotypische Komponenten*.

**BEISPIEL 3.7.1.**  $G = \{1, -1\}$ . Diese zu  $\mathbb{Z}_2$  isomorphe Gruppe hat zwei irreduzible eindimensionale Darstellungen: die triviale Darstellung  $\rho_1$  und die Darstellung  $\rho_2(\pm 1) = \pm 1$ . Sei  $d \geq 1$  und  $\rho$  die Darstellung auf dem Raum  $V$  aller Polynome in einer Unbekannten vom Grad  $\leq d$ :  $\rho(g)f(z) = f(gz)$ ,  $g = \pm 1$ . Die kanonische Zerlegung ist die Zerlegung  $V = V_+ \oplus V_-$  in gerade und ungerade Polynomen:  $V_{\pm} = \{f \mid f(-z) = \pm f(z)\}$ . Eine Zerlegung in irreduzible Unterräumen ist einer Wahl einer Basis von  $V_+$  und einer Basis von  $V_-$  gleichbedeutend, und ist daher i.a. nicht eindeutig.

### 3.8. Beispiel: die Diedergruppe $D_n$ , $n \geq 3$

Wir wollen hier alle irreduziblen Darstellungen von  $D_n$  klassifizieren. Da jedes Element von  $D_n$  sich als Produkt  $R^a S^b$  darstellen lässt (Lemma 1.1.1), ist eine Darstellung  $\rho$  von  $\bar{R} := \rho(R)$  und  $\bar{S} := \rho(S)$  vollständig bestimmt. Diese erfüllen dann die Relationen

$$(3.5) \quad \bar{R}^n = \bar{S}^2 = 1, \quad \bar{S}\bar{R} = \bar{R}^{-1}\bar{S}$$

denn die Drehung  $R$  und die Spiegelung  $S$  erfüllen diese Relationen.

Umgekehrt: sind  $\bar{R}, \bar{S} \in GL(V)$  lineare invertierbare Selbstabbildungen eines komplexen Vektorraums  $V$ , die (3.5) erfüllen, so definiert  $\rho(R^a S^b) = \bar{R}^a \bar{S}^b$ ,  $a = 0, \dots, n, b = 0, 1$  eine Darstellung von  $D_n$  auf  $V$ . Die Produktregeln  $R^a S^b R^{a'} S^{b'} = R^{a+a'-2a'b} S^{b+b'}$  werden nämlich dank der Relationen respektiert.

Eine Darstellung von  $D_n$  auf  $V$  ist also dasselbe wie ein Paar linearer Abbildungen  $\bar{R}, \bar{S}$  in  $GL(V)$ , die die Relationen (3.5) erfüllen.

Wir fangen an, eindimensionale Darstellungen zu klassifizieren. Gesucht werden zwei  $1 \times 1$  Matrizen, also Zahlen  $\bar{R}, \bar{S} \neq 0$  die (3.5) erfüllen. Wir haben also  $\bar{R}^n = \bar{S}^2 = 1$  und von der letzten Relation  $\bar{R}^2 = 1$ . Ist also  $n$  gerade, so hat man 4 eindimensionale Darstellungen, wobei  $\bar{R}$  und  $\bar{S}$  die Werte  $\pm 1$  annehmen. Nennen wir diese Darstellungen  $\rho_{++}, \rho_{+-}, \rho_{-+}, \rho_{--}$ , je nach Vorzeichen von  $\bar{R}$  und  $\bar{S}$ . Wenn  $n$  ungerade ist, muss  $\bar{R} = 1$  und wir haben 2 Darstellungen  $\rho_{\pm}$  mit  $\rho_{\pm}(S) = \pm 1$ .

Wir betrachten jetzt zweidimensionale irreduzible Darstellungen. Nehmen wir an,  $\rho$  ist eine zweidimensionale Darstellung und setzen  $\bar{R} = \rho(R)$  und  $\bar{S} = \rho(S)$ . Sei  $v$  ein Eigenvektor von  $\bar{R}$  mit Eigenwert  $\epsilon$ . Da  $\bar{R}^n = 1$ , muss  $\epsilon^n = 1$  also von der Form  $\epsilon = \exp(2\pi i j/n)$  mit  $j$  ganz sein. Aus der Relation  $\bar{S}\bar{R} = \bar{R}^{-1}\bar{S}$  folgt, dass  $\bar{S}v$  ebenfalls ein Eigenvektor von  $R$  ist, aber mit Eigenwert  $\epsilon^{-1}$ . Ist  $\bar{S}v$  proportional zu  $v$ , so erzeugt  $v$  einen invarianten Unterraum der Dimension 1, im Widerspruch mit der Irreduzibilität. Seien also  $v$  und  $\bar{S}v$  linear unabhängig. Bezüglich der Basis  $v, \bar{S}v$  haben wir dann

$$\bar{R} = \begin{pmatrix} \epsilon & 0 \\ 0 & \epsilon^{-1} \end{pmatrix}, \quad \bar{S} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

und es ist leicht nachzuprüfen, dass diese zwei Matrizen die Relationen erfüllen, also eine Darstellung definieren. Diese Darstellungen sind irreduzibel wenn  $\epsilon \neq \epsilon^{-1}$ , denn ein invarianter eindimensionaler Unterraum muss aus simultanen Eigenvektoren von  $\bar{R}$  und  $\bar{S}$  sein, was unmöglich ist.

Wir bezeichnen mit  $\rho_j$  diese zweidimensionale Darstellung, wobei  $\epsilon = e^{\frac{2\pi i j}{n}}$ . Beschränken wir uns auf die Werte  $j = 1, \dots, [(n-1)/2]$  ( $[x]$  ist die grösste ganze Zahl  $\leq x$ ), so sind die Darstellungen  $\rho_j$  irreduzibel und paarweise inäquivalent, letzteres weil  $\rho_j(R)$  verschiedene Eigenwerte für verschiedene  $j$  in diesem Bereich hat.

Wir zeigen jetzt unter Verwendung von Satz 3.5.2, dass wir schon alle irreduziblen Darstellungen (bis auf Äquivalenz) gefunden haben. Im geraden Fall hat man 4 eindimensionale Darstellungen und  $[(n-1)/2] = n/2 - 1$  zweidimensionale Darstellungen  $\rho_j$ . Die Summe der Quadrate der Dimensionen ist also  $4 \cdot 1^2 + (n/2 - 1) \cdot 2^2 = 2n$ . Im ungeraden Fall hat man 2 eindimensionale und  $[(n-1)/2] = (n-1)/2$  zweidimensionale Darstellungen, und  $2 \cdot 1^2 + ((n-1)/2) \cdot 2^2 = 2n$ . In beiden Fällen bekommen wir also die Ordnung  $2n$  der Gruppe  $D_n$  und wir haben alle irreduziblen Darstellungen gefunden.

Ganz explizit, haben wir folgende Beschreibung aller irreduziblen Darstellungen von  $D_n$ .

(a)  $n$  gerade.

Eindimensionale Darstellungen:

$$\rho_{++}(R^a S^b) = 1, \rho_{+-}(R^a S^b) = (-1)^b, \rho_{-+}(R^a S^b) = (-1)^a, \rho_{--}(R^a S^b) = (-1)^{a+b}.$$

Zweidimensionale Darstellungen:

$$\rho_j(R^a) = \begin{pmatrix} e^{2\pi i j a/n} & 0 \\ 0 & e^{-2\pi i j a/n} \end{pmatrix}, \quad \rho_j(R^a S) = \begin{pmatrix} 0 & e^{2\pi i j a/n} \\ e^{-2\pi i j a/n} & 0 \end{pmatrix},$$

wobei  $j \in \{1, 2, \dots, \frac{n}{2} - 1\}$ .

(b)  $n$  ungerade.

Eindimensionale Darstellungen:  $\rho_{\pm}(R^a S^b) = (\pm 1)^b$

Zweidimensionale Darstellungen:  $\rho_j, j \in \{1, \dots, (n-1)/2\}$ , mit denselben Formeln wie im geraden Fall.

Die Charakteren der zweidimensionalen Darstellungen sind

$$\chi_j(R^a) = 2 \cos(2\pi a j/n), \quad \chi_j(R^a S) = 0.$$

(Der Charakter einer eindimensionalen Darstellungen stimmt mit der Darstellung überein). Die Orthogonalitätsrelationen entsprechen nicht ganz offensichtlichen trigonometrischen Identitäten, etwa:

$$\frac{2}{n} \sum_{a=0}^{n-1} \cos(2\pi a j/n) \cos(2\pi a l/n) = \delta_{jl}$$

für  $1 \leq j, l \leq [(n-1)/2]$ .

### 3.9. Kompakte Gruppen

Die oben entwickelte Darstellungstheorie endlicher Gruppen stützt sich auf die Existenz einer Mittelung  $\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G}$ . Mit deren Hilfe konnten wir die vollständige Reduzibilität und die Orthogonalitätsrelationen herleiten.

Bei *kompakten Gruppen* hat man ebenfalls eine Mittelung, die uns erlaubt, im Wesentlichen die gleiche Darstellungstheorie zu entwickeln wie bei endlichen Gruppen. Genauer, kann man zeigen, dass für jede kompakte Gruppe  $G$  existiert eine eindeutige lineare Funktion  $C(G) \rightarrow \mathbb{C}$ ,

$$f \mapsto \int_G f(g) dg$$

auf dem Raum  $C(G)$  der stetigen komplexwertigen Funktionen  $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ , so dass (i)  $\int_G f(g) dg \geq 0$  falls  $f \geq 0$ , (ii) für alle  $h \in G$ ,  $\int_G f(hg) dg = \int_G f(g) dg$ , (iii)  $\int_G 1 dg = 1$ .

Wie die Notation suggeriert, ist tatsächlich diese Linearform gleich der Integration bezüglich eines Masses, des *Haar'schen Masses*.

Wir verzichten auf der allgemeine Definition einer kompakten Gruppe. Die Beispiele, die uns interessieren sind, nebst der endlichen Gruppen, die kompakten Untergruppen von  $GL(n, K)$ ,  $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ . In diesem Fall bedeutet kompakt abgeschlossen und beschränkt in der Menge  $K^{n^2}$  aller  $n \times n$  Matrizen. So sind die Gruppen  $U(n), SU(n), O(n), SO(n)$  kompakt.

Zum Beispiel ist  $U(n) = f^{-1}(\{0\})$  abgeschlossen, denn es ist das Urbild der abgeschlossenen Menge  $\{0\}$  unter der stetigen Selbstabbildung  $f: A \mapsto A^*A - \mathbf{1}$  des Raums aller  $n \times n$  Matrizen. Sie ist beschränkt, denn insbesondere gilt für  $A = (A_{ij}) \in U(n)$ ,  $\sum_{ij} |A_{ij}|^2 = \text{tr}(A^*A) = n$ , also ist  $U(n)$  enthalten in einer Sphäre vom Radius  $\sqrt{n}$  in  $\mathbb{C}^{n^2}$ .

Dagegen sind z.B.  $GL(n, \mathbb{R}), SL(n, \mathbb{R}), O(p, q)$  ( $p, q \neq 0$ ) nicht kompakt, denn diese Gruppen enthalten Matrizen mit beliebig grossen Matrixelementen (Beispiel:

Lorentzboosts in der Lorentzgruppen mit grossem Rapiditätsparameter, siehe Abschnitt 5.11).

Ein einfaches Beispiel eines Haar'schen Mass ist das Haars'sche Mass von  $U(1)$ , der Gruppe der komplexen Zahlen mit Betrag 1: die entsprechende Mittelung ist gegeben durch:

$$f \mapsto \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\phi}) d\phi.$$

Die Theorie der endlichdimensionalen komplexen stetigen Darstellungen einer kompakten Gruppe  $G$  kann dann im wesentlichen mit den gleichen Sätzen und Beweisen wie bei endlichen Gruppen geschrieben werden. Dabei muss jeweils  $\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G}$  durch  $\int_G$  ersetzt werden.

So hat man Orthogonalitätsrelationen für Matrixelemente und Charakteren bezüglich des Skalarproduktes

$$(f_1, f_2) = \int_G \overline{f_1(g)} f_2(g) dg.$$

Alle Resultate von 3.1, 3.2, 3.4, 3.6 gelten, mit denselben Beweisen, auch bei allgemeinen kompakten Gruppen. Die restlichen Resultate, die die reguläre Darstellung betreffen, gelten mit kleinen Änderungen: so definiert man für eine kompakte Gruppe  $G$  die reguläre Darstellung als die Darstellung auf dem Hilbertraum  $L^2(G)$  der bezüglich des Haar'schen Mass quadratintegrierbaren Funktionen, mit  $\rho_{\text{reg}}(g)f(h) = f(g^{-1}h)$ . Diese Darstellung ist unendlichdimensional und ihr Charakter ist nicht definiert. Trotzdem gilt das Peter-Weyl Theorem, das besagt, dass jede endlichdimensionale irreduzible Darstellung so oft vorkommt in der regulären Darstellung wie ihre Dimension, und dass die Matrixelemente aller inäquivalenten irreduziblen Darstellungen eine orthonogonale Basis (im Sinne der Hilbertraumtheorie) von  $L^2(G)$  bilden.

**BEISPIEL 3.9.1.**  $G = U(1)$ , eine abelsche Gruppe. Die endlichdimensionalen Darstellungen sind eindimensional, gegeben durch  $\rho_n(e^{i\phi}) = e^{in\phi}$ . Diese Funktionen  $\rho_n$  bilden eine orthonormierte Basis von  $L^2(G) = L^2([0, 2\pi])$ . In diesem Falle reduziert sich also das Peter-Weyl Theorem auf die  $L^2$ -Theorie der Fourierreihe.

## Eigenwertprobleme mit Symmetrie

Hier wird die Gruppentheorie auf Eigenwertprobleme mit Symmetrie angewendet. Diese kommen z.B. in der Molekularphysik und der Festkörperphysik vor, wo das Spektrum von Schwingungsfrequenzen und die Energieniveaus von Elektronen durch die Symmetrie der Molekülen/ Kristallen stark eingeschränkt werden. Nach einer allgemeinen Betrachtung, betrachten wir speziell den Fall eines schwingendes Moleküls. Literatur: [5], [2], [8]. In 4.3 folgen wir [8].

### 4.1. Eigenwerte und Eigenvektoren

Eine der wichtigsten Anwendungen der Gruppentheorie in der Physik ist auf Eigenwertprobleme mit Symmetrie.

Sei  $A : V \rightarrow V$  eine lineare Abbildung auf einem komplexen Vektorraum  $V$ . Wir nehmen an, dass  $V$  der Darstellungsraum einer Darstellung  $\rho : G \rightarrow GL(V)$  einer Gruppe  $G$  ist, und dass  $A$  die Symmetrieeigenschaft

$$\rho(g)A = A\rho(g), \quad \forall g \in G,$$

besitzt, d.h.  $A \in \text{Hom}_G(V, V)$ . Was können wir über Eigenwerte und Eigenvektoren von  $A$  sagen? Im Falle, wo  $\rho$  *irreduzibel* ist, wissen wir nach dem Schur'schen Lemma, dass  $A = \lambda 1_V$ , also dass  $A$  einen einzigen Eigenwert mit Eigenraum  $V$  hat.

Im Folgenden wollen wir den allgemeinen Fall betrachten. Wir werden aber zur Vereinfachung annehmen, dass  $A$  diagonalisierbar ist, und  $\rho$  eine endlichdimensionale Darstellung einer kompakten Gruppe ist. Also ist  $\rho$  vollständig reduzibel.

Zunächst eine qualitative Aussage. Wir benützen die Notation  $\text{diag}(a_1, \dots, a_d)$  um die diagonale  $d \times d$  Matrix mit diagonalen Matrixelementen  $a_1, \dots, a_d$  zu bezeichnen.

**SATZ 4.1.1.** *Sei  $\rho : G \rightarrow GL(V)$  eine endlichdimensionale komplexe Darstellung einer kompakten Gruppe  $G$ , und  $A : V \rightarrow V$  eine diagonalisierbare lineare Selbstabbildung, so dass  $\rho(g)A = A\rho(g), \forall g \in G$ . Sei  $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_n$  eine Zerlegung von  $V$  in irreduzible Darstellungen. Dann hat  $A$  höchstens  $n$  verschiedene Eigenwerte. Bezeichnet  $d_i$  die Dimension von  $V_i$ , so hat  $A$  bezüglich einer passenden Basis die Diagonalform*

$$\text{diag}(\underbrace{\lambda_1, \dots, \lambda_1}_{d_1 \text{ mal}}, \dots, \underbrace{\lambda_n, \dots, \lambda_n}_{d_n \text{ mal}}),$$

für gewisse (nicht notwendigerweise verschiedene) komplexe Zahlen  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ .

**BEWEIS.** Seien  $E_1, \dots, E_m$  die Eigenräume der Abbildung  $A$  und seien  $\mu_1, \dots, \mu_m$  die entsprechenden Eigenwerte. Also besteht  $E_i$  aus allen Vektoren  $v$  in  $V$ , so dass  $Av = \mu_i v$  und die Diagonalisierbarkeit von  $A$  bedeutet, dass  $V = E_1 \oplus \dots \oplus E_m$ .

Ist  $v \in E_i$ , so gilt für alle  $g \in G$ ,

$$\begin{aligned} A\rho(g)v &= \rho(g)Av \\ &= \rho(g)\mu_i v \\ &= \mu_i \rho(g)v. \end{aligned}$$

Also ist  $\rho(g)v \in E_i$ , d.h.  $E_i$  ist ein invarianter Unterraum für die Darstellung  $\rho$ .

Zerlegen wir die Einschränkung von  $\rho$  auf jedem  $E_i$  in irreduzible Darstellungen und benützen die Diagonalisierbarkeit von  $A$ , so erhalten wir eine Zerlegung

$$V = V'_1 \oplus \cdots \oplus V'_n$$

in irreduzible Darstellungen, so dass jeder  $V'_i$  in einem Eigenraum enthalten ist. Die Anzahl  $n$  Summanden und die Dimensionen der  $V'_i$  sind dieselben (bis auf Permutationen) wie in der gegebenen Zerlegung  $V_1 \oplus \cdots \oplus V_n$ , wie wir in der Charaktertheorie gesehen haben. In einer Basis von  $V$ , die aus Vektoren in  $\cup_i V'_i$  besteht, hat also  $A$  die gewünschte Diagonalf orm. Es ist dann klar, dass  $A$  höchstens  $n$  (verschiedene) Eigenwerte hat.  $\square$

Diese qualitative Aussage über die Eigenwerte ist oft für Anwendungen ausreichend. So können beispielsweise die Schwingungsfrequenzen eines symmetrischen Moleküls durch die Eigenwerte einer linearen Abbildung mit derselben Symmetrie ausgedrückt werden (siehe unten). Die experimentell bestimmbare Anzahl Eigenfrequenzen gibt also Auskunft über die Symmetrie des Moleküls.

Präzisere Aussagen über Eigenwerte und Eigenvektoren gewinnt man mit Hilfe des Lemma von Schur. Der einfachste Fall ist, wenn die Darstellung in einer Summe paarweise inäquivalenten Darstellungen zerfällt. Das Lemma von Schur gibt dann (Übung):

**SATZ 4.1.2.** *Seien  $G, V, A$  wie im vorherigen Satz. Seien für alle  $i \neq j$  die Darstellungen  $V_i, V_j$  nicht äquivalent. Dann ist, für alle  $i$ ,  $AV_i \subset V_i$  und die Einschränkung von  $A$  auf  $V_i$  ist  $A|_{V_i} = \lambda_i 1_{V_i}$  für ein  $\lambda_i \in \mathbb{C}$*

Also ist  $A$  bezüglich einer Basis von  $V$  mit Basisvektoren in  $\cup_i V_i$  bereits diagonal.

Im allgemeinen Fall können die Eigenvektoren wie folgt bestimmt werden. Sei  $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k$  die kanonische Zerlegung der Darstellung  $\rho$ . Also fasst man alle zueinander äquivalenten in  $V$  vorkommenden irreduziblen Darstellungen zusammen. Nach dem Lemma von Schur, Teil (i), ist  $AW_i \subset W_i$ . Also können wir  $A$  separat in jedem  $W_i$  diagonalisieren, und wir haben das Problem auf den Fall reduziert, wo  $V$  eine direkte Summe von zueinander äquivalenten irreduziblen Darstellungen ist.

Betrachten wir zunächst den Fall wo  $V = V_1 \oplus V_2$  wobei  $\rho|_{V_1} \cong \rho|_{V_2}$  äquivalente irreduzible  $d$ -dimensionale Darstellungen sind. Wir wählen eine Basis  $(e_i^1)_{i=1 \dots d}$  von  $V_1$  und bezeichnen mit  $\rho_1(g)$  die Matrix von  $\rho|_{V_1}(g)$  bezüglich dieser Basis. Die Basis  $(e_i^2)$  von  $V_2$  wählen wir als das Bild der Basis von  $V_1$  durch den Isomorphismus  $V_1 \rightarrow V_2$ . Also hat die Darstellung bezüglich der Basis  $e_1^1, \dots, e_d^1, e_1^2, \dots, e_d^2$  die Kästchenform

$$\rho(g) = \begin{pmatrix} \rho_1(g) & 0 \\ 0 & \rho_1(g) \end{pmatrix}.$$

Die Matrix von  $A$  habe bezüglich derselben Basis die Form

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}.$$

Die  $d \times d$  Kästchen  $A_{ij}$  erfüllen dann  $\rho_1(g)A_{ij} = A_{ij}\rho_1(g)$ , also nach Schur  $A_{ij} = a_{ij}\mathbf{1}$ ,  $a_{ij} \in \mathbb{C}$ . Es ist dann nützlich, die Basis umzunummerieren: bezüglich der Basis  $e_1^1, e_1^2, \dots, e_d^1, e_d^2$  hat  $A$  die Form

$$(4.1) \quad \begin{pmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a \end{pmatrix},$$

wobei  $a$  die zwei mal zwei Matrix mit Matrixelementen  $a_{ij}$  bezeichnet. Das Problem ist dann auf die Diagonalisierung einer zwei mal zwei Matrix reduziert. Ist  $(v_1, v_2)$  ein Eigenvektor von  $a$  zum Eigenwert  $\lambda$  so sind die Vektoren  $v_1 e_i^1 + v_2 e_i^2$ ,  $i = 1, \dots, d$ , Eigenvektoren von  $A$  zum selben Eigenwert  $\lambda$ .

Der allgemeine Fall, wo  $V$  eine direkte Summe von  $n$  zueinander äquivalenten Darstellungen  $V_\alpha$  ist, kann genauso behandelt werden. Die Isomorphismen zwischen den Darstellungen erlauben uns für jedes  $\alpha = 1, \dots, n$  eine Basis  $(e_i^\alpha)_{i=1, \dots, d}$  von  $V_\alpha$  zu wählen, so dass die Matrix von  $\rho(g)$  bezüglich der Basis  $e_1^1, \dots, e_d^1, \dots, e_1^n, \dots, e_d^n$  kästchendiagonale Form mit gleichen diagonalen  $d \times d$  Kästchen hat. Nach Schur hat dann die Matrix von  $A$  bezüglich der unnummerierten Basis  $e_1^1, \dots, e_d^1, \dots, e_1^n, \dots, e_d^n$  die Form 4.1 mit  $n \times n$  Kästchen  $a = (a_{\alpha\beta})$  gegeben durch

$$Ae_i^\alpha = \sum_{\beta} a_{\beta\alpha} e_i^\beta.$$

Das Problem ist dann auf die Diagonalisierung der  $n \times n$  Matrix  $a$  reduziert. Dieses letztere Problem kann nicht im Allgemeinen durch Gruppentheorie vereinfacht werden und muss "von Hand" gelöst werden.

Wir haben also gesehen, dass das Eigenwertproblem für  $A \in \text{Hom}_G(V, V)$  wobei in  $V$  die irreduziblen inäquivalenten Darstellungen  $\rho_1, \dots, \rho_k$  von  $G$   $n_1, \dots$ , bzw.  $n_k$  mal vorkommen, im Prinzip auf  $k$  Eigenwertprobleme der Dimensionen  $n_1, \dots, n_k$  reduziert werden kann.

BEISPIEL 4.1.1. Man betrachte eine Matrix der Form

$$A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{C}.$$

Dann ist  $\rho(\sigma)A = A\rho(\sigma)$ , wobei  $\rho$  die im Abschnitt 2.2 diskutierte Darstellung von  $S_3$  ist. Dann sind die inäquivalenten Unterdarstellungen  $V_1, V_2$  Eigenräume von  $A$ . Die Eigenwerte sind  $\lambda_1 = a + 2b$  bzw.  $\lambda_2 = a - b$ , wie man leicht durch Anwendung auf einem beliebigen Vektor aus  $V_1$  bzw.  $V_2$  feststellt.

Diese Matrix kommt zum Beispiel im Eigenwertproblem vor das die Schwingungsfrequenzen von drei durch gleiche Federn miteinander verbundene Punktteilchen auf einer kreisförmigen Schiene bestimmt. Andere, physikalischere, Beispiele sind hierunter diskutiert. Wir betrachten jetzt Anwendungen in der Molekülphysik, wobei wir uns auf die qualitativen Aussagen über die Entartungen der Eigenwerte beschränken. Explizite Konstruktionen der Eigenvektoren nach obiger Methode findet man z.B. in den Büchern [2, 5].

## 4.2. Kleine Schwingungen von Molekülen

Wir betrachten kleine Schwingungen eines Moleküls um einer Gleichgewichtslage. Das Molekül habe  $N$  Atome, mit Koordinaten  $y = (\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_N) \in \mathbb{R}^{3N}$ . Die Gleichgewichtslage  $y^*$  soll eine Symmetriegruppe  $G$  besitzen, eine Untergruppe der  $O(3)$  die die Lage der Atome, bis auf Permutationen der Lagen gleicher Atomen, festhält. Man denke an  $\text{NH}_3$  mit Wasserstoffatomen an den Ecken eines regulären Dreiecks und Symmetriegruppe  $D_3$ , oder  $\text{CH}_4$  mit Wasserstoffatomen an den Ecken eines regulären Tetraeders, mit Symmetriegruppe  $T \cong S_4$ , oder Fullerene "buckyball"  $C_{60}$ , mit der Symmetriegruppe des Ikosaeders.

Die Gruppentheorie erlaubt, qualitative Aussagen über die Schwingungsfrequenzen zu machen. Wir betrachten das Molekül im Rahmen der klassischen Mechanik. Bei kleinen Schwingungen sind die quantenmechanischen Rechnungen nicht wesentlich verschieden, und werden auf die Rechnung der klassischen Eigenfrequenzen zurückgeführt. Insbesondere sind diese Frequenzen durch Experimente im Prinzip messbar.

Wir nehmen an, dass die Wechselwirkungen nur von den Abständen zwischen den Atomen abhängt, so dass die potentielle Energie invariant unter orthogonalen Transformationen ist:

$$V(R\vec{y}_1, \dots, R\vec{y}_N) = V(\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_N), \quad \forall R \in O(3).$$

Die Tatsache, dass gleiche Atome in einem Molekül vorkommen, wird in der Annahme wiederspiegelt, dass die potentielle Energie invariant unter Permutationen  $\sigma$  der Koordinaten von identischen Atomen sind:

$$V(\vec{y}_{\sigma(1)}, \dots, \vec{y}_{\sigma(N)}) = V(\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_N).$$

Beide Arten von Symmetrien der potentiellen Energie sind durch *orthogonale* Transformationen von  $\mathbb{R}^{3N}$  gegeben.

Sei  $R \in G$ . Also bildet  $R$  die Gleichgewichtslage  $y^*$  bis auf eine Permutation von gleichen Atomen nach sich selbst ab. Setzt man also  $R$  mit einer solchen Permutation zusammen, so erhalten wir eine orthogonale Transformation  $\rho(R)$  von  $\mathbb{R}^{3N}$ , mit  $\rho(R)y^* = y^*$ :

$$\rho(R)(\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_N) = (R\vec{y}_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, R\vec{y}_{\sigma^{-1}(N)})$$

wobei  $\sigma$  durch  $R\vec{y}_i^* = \vec{y}_{\sigma(i)}^*$  definiert ist. Es ist leicht nachzuweisen, dass  $\rho$  die Darstellungseigenschaft  $\rho(R_1 R_2) = \rho(R_1)\rho(R_2)$  erfüllt.

Wir haben also eine (reelle) Darstellung  $\rho$  auf  $\mathbb{R}^{3N}$ , mit den Eigenschaften, dass  $V(\rho(R)y) = V(y)$  für alle  $R \in G$ ,  $y \in \mathbb{R}^{3N}$ , und  $\rho(R)y^* = y^*$ .

Die Newton'schen Bewegungsgleichungen für die Koordinaten  $\vec{y}_i = (y_i^1, y_i^2, y_i^3)$  der Atome als Funktion der Zeit  $t$  haben die Form

$$m_i \frac{d^2 y_i^\alpha(t)}{dt^2} = - \frac{\partial V}{\partial y_i^\alpha}(y(t)), \quad i = 1, \dots, N, \quad \alpha = 1, 2, 3.$$

Hier bezeichnet  $m_i > 0$  die Masse des  $i$ ten Atoms, und die Ableitung nach der Zeit wird mit einem Punkt notiert.

Im Gleichgewicht verschwindet die Kraft:  $\partial V(y^*)/\partial y_i^\alpha = 0$ . Für kleine Schwingungen, setzt man  $y(t) = y^* + x(t)$  und entwickelt in einer Taylorreihe um  $x = 0$ :

$$m_i \frac{d^2 x_i^\alpha(t)}{dt^2} = - \sum_{j,\beta} \frac{\partial^2 V}{\partial y_i^\alpha \partial y_j^\beta}(y^*) x_j^\beta(t) + O(|x|^2),$$

Unter Vernachlässigung der Terme zweiter und höherer Ordnung, haben die Bewegungsgleichungen die Form

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2}(t) = -Ax(t).$$

Die  $3N \times 3N$  Matrix  $A$  hat Matrixelemente  $m_i^{-1} \partial^2 V(y^*)/\partial y_i^\alpha \partial y_j^\beta$ . Diese Matrix ist ähnlich zur symmetrischen Matrix  $(m_i^{-1/2} \partial^2 V(y^*)/\partial y_i^\alpha \partial y_j^\beta m_j^{1/2})$  also diagonalisierbar. Die Symmetrie  $V(\rho(R)y) = V(y)$  der potentiellen Energie hat zur Folge, dass die orthogonale Matrix  $\rho(R)$  die Gleichung

$$\rho(R)A = A\rho(R)$$

erfüllt. Der Exponentialansatz  $x(t) = e^{i\omega t} x_0$  zur Lösung der Bewegungsgleichungen, führt auf das Eigenwertproblem  $Ax_0 = \omega^2 x_0$ . Ist also  $\omega^2$  ein positiver Eigenwert von  $A$ , so sind Real- und Imaginärteil der komplexen Lösung  $x(t)$  Lösungen die Schwingungen der Periode  $2\pi/\omega$  um der Gleichgewichtslage beschreiben. Die Positiven Wurzeln  $\omega$  aus den positiven Eigenwerten von  $A$  werden Eigenfrequenzen des Moleküls genannt. Die Gruppentheorie gibt Auskunft über die Entartungen der Eigenwerte: Zerlegt man nämlich die als komplexe Darstellung aufgefasste Darstellung  $\rho$  in irreduzible Darstellungen, so entspricht jede irreduzible Unterdarstellung einem Eigenwert mit Multiplizität gleich der Dimension der irreduziblen Darstellungen.

Ist also die, durch experimentelles Bestimmen der Eigenfrequenzen gewonnene, Anzahl Eigenwerte kleiner als die Anzahl Freiheitsgrade, so ist das ein Zeichen, dass das Molekül eine nichtabelsche Symmetriegruppe besitzt. Um die irreduziblen Darstellungen zu bestimmen, rechnet man den Charakter  $\text{tr}(\rho(R))$  aus, und entwickelt ihn nach aus Tafeln gewonnenen Charakteren von irreduziblen Darstellungen. Dies wollen wir an einem Beispiel illustrieren.

### 4.3. Beispiel: Eigenfrequenzen von CH<sub>4</sub>

Als Anwendung wollen wir qualitative Aussagen über die Eigenfrequenzen eines Moleküls mit tetraedralearer Symmetrie, wie CH<sub>4</sub>, herleiten. Für mehr Details und eine Interpretation durch Vektorbündel, S. [8]. Im Gleichgewicht sind die vier Wasserstoffatome an den Ecken  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_4$  eines regulären Tetraeders, wobei der Kohlenstoff im Mittelpunkt steht. Wir betrachten das System klassisch (bei kleinen Schwingungen ist die quantenmechanische Rechnung nicht wesentlich verschieden), und nehmen an, dass die Potentielle Energie  $V(\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_4, \vec{y}_c)$  als Funktion der Koordinaten  $\vec{y}_i \in \mathbb{R}^3$  der H-Atome und  $\vec{y}_c$  des C-Atoms, invariant unter orthogonalen Transformationen und Permutationen der Koordinaten der H-Atome ist:

$$\begin{aligned} V(R\vec{y}_1, \dots, R\vec{y}_4, R\vec{y}_c) &= V(\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_4, \vec{y}_c), & \forall R \in O(3) \\ V(\vec{y}_{\sigma(1)}, \dots, \vec{y}_{\sigma(4)}, \vec{y}_c) &= V(\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_4, \vec{y}_c), & \forall \sigma \in S_4. \end{aligned}$$

Wir betrachten kleine Schwingungen um einer Gleichgewichtslage. Wir wählen diese Gleichgewichtslage so, dass der Mittelpunkt des Tetraeders im Ursprung liegt. Dann ist die Summe  $\vec{v}_1 + \dots + \vec{v}_4 = 0$ .

Die Symmetriegruppe ist die Gruppe  $T$  der orthogonalen Transformationen die den regulären Tetraeder festlassen.

Die Tetraedergruppe  $T$  hat fünf irreduzible Darstellungen  $\rho_1, \dots, \rho_5$ . Ihre Charakteren  $\chi_1, \dots, \chi_5$  werden durch folgende Charaktertafel gegeben (siehe z. B. [5] oder [8]):

$24T$	[1]	$8[r_3]$	$3[r_2]$	$6[s_4]$	$6[\tau]$
$\chi_1$	1	1	1	1	1
$\chi_2$	2	-1	2	0	0
$\chi_3$	1	1	1	-1	-1
$\chi_4$	3	0	-1	1	-1
$\chi_5$	3	0	-1	-1	1

1 ist die Identität;  $r_3$  ist eine Drehung um eine Achse durch eine Ecke mit Winkel  $2\pi/3 = 120^\circ$ ;  $r_2$  ist eine Drehung um eine Achse, die senkrecht durch eine Kante geht, mit Winkel  $2\pi/2 = 180^\circ$ ;  $s_4$  ist die Zusammensetzung einer  $120^\circ$ -Drehung  $r_3$  um eine Achse durch eine Ecke, sagen wir  $\vec{v}_4$ , und den Mittelpunkt mit einer Spiegelung um eine Ebene die durch zwei andere Ecken,  $\vec{v}_1, \vec{v}_2$  und den Mittelpunkt geht; schliesslich ist  $\tau$  die Spiegelung bezüglich einer durch eine Kante und den Mittelpunkt gehenden Ebene. Die entsprechenden Permutationen der Ecken 1, 2, 3, 4 und des Mittelpunkts  $C$  sind (für eine Wahl der Achsen und Ebenen)

$$\begin{aligned} r_3 &: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & C \\ 1 & 3 & 4 & 2 & C \end{pmatrix}, & r_2 &: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & C \\ 2 & 1 & 4 & 3 & C \end{pmatrix}, \\ s_4 &: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & C \\ 4 & 1 & 2 & 3 & C \end{pmatrix}, & \tau &: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & C \\ 1 & 2 & 4 & 3 & C \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Wir müssen also den Charakter  $\text{tr}(\rho(R))$  für  $R = 1, r_3, r_2, s_4, \tau$  ausrechnen. Erstens reduzieren wir das Problem auf die Rechnung der Spur der  $3 \times 3$  Matrix  $R$ . Betrachte

zum Beispiel  $\rho(R)$  für  $R = \tau$ . Die entsprechende Permutation  $\sigma$  ist die Transposition der beiden letzten Ecken. Also hat  $\rho(R)$  die Zerlegung in  $3 \times 3$  Kästchen:

$$\rho(R) = \begin{pmatrix} R & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R & 0 \\ 0 & 0 & R & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R \end{pmatrix}.$$

Die Spur ist also  $3 \operatorname{tr}(R)$ , da nur die Kästchen  $R$  in der Diagonale zur Spur beitragen. Diese Anzahl Kästchen in der Diagonale ist die Anzahl der  $i \in \{1, \dots, 4, C\}$ , so dass  $\sigma(i) = i$ , also der *Fixpunkte* der entsprechenden Permutation. Allgemein haben wir die *Fixpunktformel*

$$\chi_\rho(R) = \operatorname{tr}(\rho(R)) = \operatorname{tr}(R)N_R.$$

wobei  $N_R$  die Anzahl Fixpunkte der  $R$  entsprechenden Permutation ist.

*Rechnung von  $\operatorname{tr}(R)$ .* Eine Drehung mit Winkel  $\theta$  hat bezüglich einer geeigneten Basis die Matrixform

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

also Spur  $2 \cos(\theta) + 1$ . Insbesondere ist  $\operatorname{tr}(r_3) = 0$ ,  $\operatorname{tr}(r_2) = -1$ . Eine Spiegelung bezüglich einer Ebene hat für eine geeignete Basis Diagonalform mit diagonalen Matrixelementen  $1, 1, -1$ . Also ist  $\operatorname{tr}(\tau) = 1$ . Um die Spur von  $s_4$  auszurechnen, berechnen wir die Matrix von  $s_4$  bezüglich der Basis  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$  von  $\mathbb{R}^3$ . Da  $s_4 \vec{v}_i = \vec{v}_{i+1}$ , und  $\vec{v}_4 = -\vec{v}_1 - \vec{v}_2 - \vec{v}_3$ , ist diese Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Also ist  $\operatorname{tr}(s_4) = -1$

*Rechnung von  $\chi_\rho$ .* Multipliziert man jede dieser Spuren mit der entsprechenden Anzahl Fixpunkte  $N_1 = 5$ ,  $N_{r_3} = 2$ ,  $N_{r_2} = 1$ ,  $N_{s_4} = 1$ ,  $N_\tau = 3$ , so erhält man:

$$\begin{aligned} \chi_\rho(1) &= 3 \cdot 5 = 15, & \chi_\rho(r_3) &= 0 \cdot 2 = 0, & \chi_\rho(r_2) &= -1 \cdot 1 = -1, \\ \chi_\rho(s_4) &= -1 \cdot 1 = -1, & \chi_\rho(\tau) &= 1 \cdot 3 = 3. \end{aligned}$$

Wir können jetzt ausrechnen, wie oft die irreduziblen Darstellungen in  $\rho$  vorkommen. Die Multiplizität  $n_j$ , mit welcher die  $j$ te Darstellung vorkommt ist der Koeffizient von  $\chi_j$  in der Zerlegung  $\chi_\rho = \sum_j n_j \chi_j$  von  $\chi_j$ . Aus der Orthogonalitätsrelation der Charakteren haben wir also mit  $|G| = 24$ ,

$$\begin{aligned} n_j &= (\chi_\rho, \chi_j) \\ &= \frac{1}{24} (1 \cdot 15 \cdot \chi_j(1) + 8 \cdot 0 \cdot \chi_j(r_3) + 3 \cdot (-1) \cdot \chi_j(r_2) \\ &\quad + 6 \cdot (-1) \cdot \chi_j(s_4) + 6 \cdot 3 \cdot \chi_j(\tau)) \end{aligned}$$

Diese Zahlen können mit Hilfe der Charaktertafel einfach gerechnet werden, mit dem Resultat

$$\chi_\rho = \chi_1 + \chi_2 + \chi_4 + 3\chi_5.$$

Also haben wir eine Zerlegung in irreduzible Darstellungen  $\rho \cong \rho_1 \oplus \rho_2 \oplus \rho_4 \oplus \rho_5 \oplus \rho_5 \oplus \rho_5$ . Die Eigenwerte sind also höchstens 6.

Nicht alle diese Eigenwerte entsprechen Schwingungen, denn manche verschwinden wegen der Translations- und Drehinvarianz der Gleichungen. Man hat nämlich die Translationsinvarianz  $V(\vec{y}_1 + \vec{a}, \dots, \vec{y}_n + \vec{a}) = V(\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n)$  des Potentials. Dies entspricht einem dreidimensionalen Raum von infinitesimalen Verschiebungen von der Gleichgewichtslage in welcher Richtung die Kraft verschwindet. Ebenso hat

man einen weiteren solchen dreidimensionalen Raum, der durch die infinitesimalen starren Drehungen um den Ursprung gegeben ist. Diese Verschiebungen bilden einen 6-dimensionalen invarianten Unterraum von  $\mathbb{R}^{15}$  der im Eigenraum von  $A$  zum Eigenwert 0 liegt. Die Translation mit Vektor  $\vec{a}$  entspricht der Verschiebung  $x = (\vec{a}, \vec{a}, \vec{a}, \vec{a})$ . Unter  $\rho(R)$  wird dieser Vektor nach dem Vektor abgebildet, der zur Translation um  $R\vec{a}$  gehört. Also ist die Einschränkung von  $\rho$  auf diesem Unterraum äquivalent zur Darstellung  $R \mapsto R$  (als komplexe Matrix aufgefasst). Eine infinitesimale Drehung wird durch einen Vektor  $\vec{b}$  parallel zur Drehachse parametrisiert und entspricht der Verschiebung

$$x = (\vec{b} \wedge \vec{v}_1, \vec{b} \wedge \vec{v}_2, \vec{b} \wedge \vec{v}_3, \vec{b} \wedge \vec{v}_4, 0)$$

wobei  $\wedge$  das Vektorprodukt bezeichnet. Dann ist

$$\rho(R)x = (R(\vec{b} \wedge \vec{v}_{\sigma^{-1}(1)}), \dots, R(\vec{b} \wedge \vec{v}_{\sigma^{-1}(4)}), 0),$$

wobei nach Definition  $R\vec{v}_i = \vec{v}_{\sigma(i)}$ . Andererseits gilt:  $R(\vec{x} \wedge \vec{y}) = \det(R)R\vec{x} \wedge R\vec{y}$  für  $R \in O(3)$ . Also erhalten wir für jedes  $R \in T$ :  $\rho(R)x = (\vec{b}' \wedge \vec{v}_1, \dots, \vec{b}' \wedge \vec{v}_4, 0)$  mit  $\vec{b}' = \det(R)R\vec{b}$ . Die infinitesimalen Drehungen bilden also eine dreidimensionale Unterdarstellung die äquivalent zu  $R \mapsto \det(R)R$ .

Eine Rechnung (Übung) zeigt, dass die Darstellungen  $R \mapsto R$ ,  $R \mapsto \det(R)R$  irreduzibel sind mit Charakter  $\chi_5$  und  $\chi_4$ . Also hat die Einschränkung von  $\rho$  auf dem 6-dimensionalen Unterraum der infinitesimalen Translationen und Drehungen Charakter  $\chi_4 + \chi_5$ . Auf dem orthogonalen Komplement hat  $\rho$  dann Charakter

$$\chi_1 + \chi_2 + 2\chi_5.$$

Also hat man für CH<sub>4</sub> (höchstens) vier verschiedene Eigenfrequenzen.

Die entsprechenden Eigenschwingungen kann man auch ohne explizite Ausreduktion erraten (siehe [8]). Zum Beispiel, kann man sich vorstellen, dass der Tetraeder "atmet", d.h. die  $H$ -Atome bewegen sich auf Geraden durch den Ursprung wo  $C$  ruht, so dass der Abstand zum Ursprung zu jedem Zeitpunkt für alle  $H$ -Atome gleich ist. Diese Verschiebungen von der Gleichgewichtslage werden durch die Symmetrie auf sich selbst abgebildet. Also entspricht dies der trivialen Unterdarstellung  $\rho_1$ .



## Die Drehgruppe und die Lorentzgruppe

In diesem Kapitel werden die Drehgruppe und die Lorentzgruppe studiert. In der Quantenmechanik werden diese Symmetriegruppen der klassischen Mechanik durch zweifache Überlagerungen  $SU(2)$ ,  $SL(2, \mathbb{C})$  ersetzt. Literatur: [4], [8], [9].

### 5.1. Isometrien des Euklidischen Raums

Der Euklidische Raum ist der Vektorraum  $\mathbb{R}^3$  versehen mit dem Skalarprodukt  $x \cdot y = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$ . Der (Euklidische) Abstand zwischen zwei Punkten  $x$  und  $y$  ist  $d(x, y) = |x - y|$  wobei  $|x| = \sqrt{x \cdot x}$ .

Eine *Isometrie* des Euklidischen Raums ist eine bijektive Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , die Abstände erhält:  $d(f(x), f(y)) = d(x, y)$ ,  $\forall x, y$ . Insbesondere sind Isometrien stetige Abbildungen. Isometrien bilden eine Gruppe bezüglich der Zusammensetzung von Abbildungen. Beispiele von Isometrien sind Abbildungen von der Form  $f(x) = Rx + a$  wobei  $R$  eine orthogonale Matrix ist und  $a \in \mathbb{R}^3$ . Der nächste Satz besagt, dass es keine andere Beispiele gibt.

**SATZ 5.1.1.** *Sei  $f$  eine Isometrie des Euklidischen Raums. Dann ist  $f$  von der Form  $f(x) = Rx + a$  wobei  $R \in O(3)$  und  $a \in \mathbb{R}^3$ .*

**BEWEIS.** Sei  $f$  eine solche Isometrie. Wir nehmen zuerst an, dass  $f(0) = 0$ , und zeigen, dass dann  $f(x) = Rx$ , mit  $R \in O(3)$ .

Es folgt aus der Identität

$$x \cdot y = \frac{1}{2}(d(x, 0)^2 + d(y, 0)^2 - d(x, y)^2)$$

dass  $f(x) \cdot f(y) = x \cdot y$  für beliebige  $x, y$ , d.h.  $f$  erhält Skalarprodukte. Sei  $e_1, e_2, e_3$  eine orthonormierte Basis von  $\mathbb{R}^3$ . Dann ist  $f(e_i) = e'_i$  ebenfalls orthonormiert. Also existiert eine orthogonale Matrix  $R$  mit  $e'_i = Re_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

Es bleibt zu zeigen, dass  $f(x) = Rx$ ,  $\forall x$ . Sei  $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 \in \mathbb{R}^3$ . Dann ist  $Rx = \sum x_i e'_i$ . Aber  $f(x) = \sum (f(x) \cdot e'_i) e'_i$ , wobei

$$f(x) \cdot e'_i = f(x) \cdot f(e_i) = x \cdot e_i = x_i.$$

Also ist  $f(x) = Rx$ .

Der allgemeine Fall wird auf diesen Fall zurückgeführt. Falls  $a = f(0)$ , ist die Abbildung  $x \mapsto f(x) - a$  eine Isometrie, die den Ursprung festlässt. Also existiert eine orthogonale Matrix  $R$ , so dass  $f(x) - a = Rx$ .  $\square$

**BEMERKUNG 5.1.1.** Dieser Satz gilt natürlich in beliebiger Dimension.

### 5.2. Die Drehgruppe $SO(3)$

Wir haben gesehen, dass die Gruppe der Isometrien von  $\mathbb{R}^3$  aus den Transformationen der Form  $x \mapsto Ax + b$  besteht, wobei  $A$  orthogonal ist und  $b \in \mathbb{R}^3$ . Wir wollen die Untergruppe  $O(3)$  der orthogonalen Transformationen näher studieren. Die Determinante einer orthogonalen Matrix ist 1 oder  $-1$ . Die Spiegelung  $P : x \mapsto -x$  hat Determinante  $-1$ , und jede Matrix in  $O(3)$  ist entweder in  $SO(3)$  oder der Form  $PA$  mit  $A \in SO(3)$ .

Jede Matrix in  $SO(3)$  ist nach dem Normalformensatz von der Form

$$OR_3(\vartheta)O^{-1}, \quad R_3(\vartheta) = \begin{pmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta & 0 \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad O \in SO(3).$$

Die Matrix  $R_3(\vartheta)$  entspricht einer Drehung um die 3-Achse mit Winkel  $\vartheta$ . Die Matrix  $OR_3(\vartheta)O^{-1}$  entspricht einer Drehung um die 3-Achse des Koordinatensystems mit Orthonormalbasis  $e'_i = Oe_i$ . Der Drehwinkel  $\vartheta$  wird konventionsgemäss, von einem längs der Drehachse orientierten Beobachter betrachtet, im Gegenuhrzeigersinn gemessen. Sei  $e'_3 = Oe_3 = n$ . Die Matrix  $R(n, \vartheta) = OR_3(\vartheta)O^{-1}$  wird Drehung um  $n$  mit Winkel  $\vartheta$  genannt. Es gilt  $R(-n, \vartheta) = R(n, 2\pi - \vartheta)$ . Aus den folgenden expliziten Formel ist ersichtlich, dass  $R(n, \vartheta)$  nicht von der Wahl von  $O$  mit  $Oe_3 = n$  abhängt. Sei  $x \cdot y$  das Skalarprodukt und  $x \wedge y$  das Vektorprodukt in  $\mathbb{R}^3$ .

LEMMA 5.2.1. *Sei  $O \in SO(3)$  und  $n = Oe_3$ . Dann ist*

$$R(n, \vartheta) = OR_3(\vartheta)O^{-1} = (x \cdot n)n + [x - (x \cdot n)n] \cos \vartheta + n \wedge x \sin \vartheta$$

BEWEIS. Für  $O = \mathbf{1}$  ist diese Formel eine einfache Umschreibung der Definition von  $R_3(\vartheta)$ . Für allgemeine  $O$  setzen wir  $O^{-1}x$  in die Formel für  $R_3(\vartheta)$  ein:

$$\begin{aligned} OR_3(\vartheta)O^{-1}x &= O\{(O^{-1}x \cdot e_3)e_3 + [O^{-1}x + (O^{-1}x \cdot e_3)e_3] \cos \vartheta + e_3 \wedge O^{-1}x \sin \vartheta\} \\ &= (x \cdot Oe_3)Oe_3 + [x + (x \cdot Oe_3)Oe_3] \cos \vartheta + Oe_3 \wedge x \sin \vartheta. \end{aligned}$$

□

Die geometrische Interpretation dieser Formel ist einleuchtend: Die Projektion  $(x \cdot n)n$  auf die Drehachse wird festgehalten während die Projektion  $p(x) = x - (x \cdot n)n$  auf die zur Drehachse orthogonale Ebene wird in dieser Ebene gedreht zu einer Linearkombination von  $p(x)$  und dem dazu orthogonalen gleich langer Vektor  $n \wedge p(x) = n \wedge x$  mit Koeffizienten  $\cos \vartheta, \sin \vartheta$ .

Insbesondere ist  $R_3(\vartheta) = R(e_3, \vartheta)$  und

$$R_1(\vartheta) := R(e_1, \vartheta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \vartheta & -\sin \vartheta \\ 0 & \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix}.$$

LEMMA 5.2.2.

- (i)  $R(n, \vartheta) = R(-n, -\vartheta) = R(n, -\vartheta)^{-1}$
- (ii)  $R(n_1, \vartheta_1)R(n_2, \vartheta_2) = R(n'_2, \vartheta_2)R(n_1, \vartheta_1)$ , wobei  $n'_2 = R(n_1, \vartheta_1)n_2$ .

BEWEIS. (i) Klar. (ii) Mit der Abkürzung  $R = R(n_1, \vartheta_1)$  haben wir, für alle  $x \in \mathbb{R}^3$ ,

$$\begin{aligned} RR(n_2, \vartheta_2)x &= (x \cdot n_2)Rn_2 + [Rx - (x \cdot n_2)Rn_2] \cos \vartheta + R(n_2 \wedge x) \sin \vartheta \\ &= (Rx \cdot Rn_2)Rn_2 + [Rx - (Rx \cdot Rn_2)Rn_2] \cos \vartheta + Rn_2 \wedge Rx \sin \vartheta \\ &= R(Rn_2, \vartheta_2)R. \end{aligned}$$

□

### 5.3. Die Eulerwinkel

Der folgende Satz zeigt, dass  $R_1(\vartheta)$  und  $R_3(\vartheta)$  die Gruppe  $SO(3)$  erzeugen.

SATZ 5.3.1. *Jedes  $A \in SO(3)$  lässt sich schreiben als*

$$A = R_3(\varphi)R_1(\vartheta)R_3(\psi)$$

mit  $\varphi \in [0, 2\pi[, \vartheta \in [0, \pi], \psi \in [0, 2\pi[.$

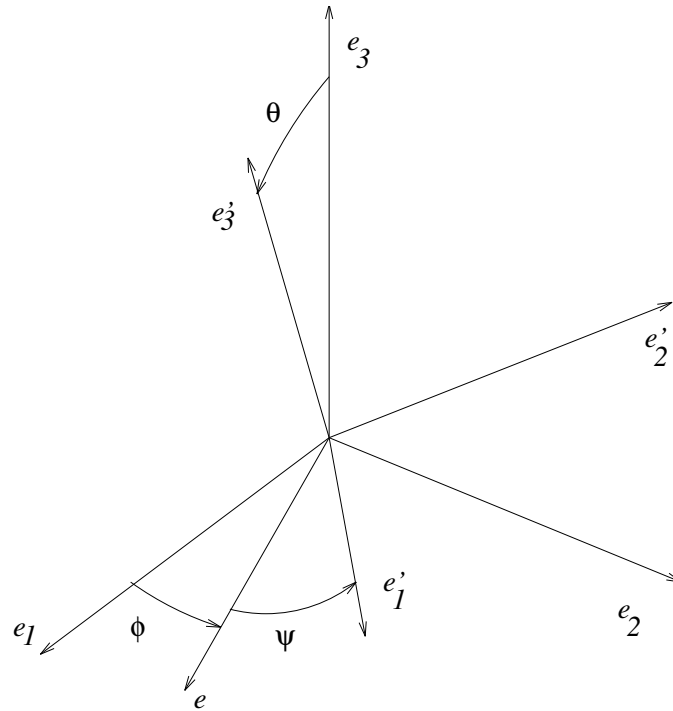


ABBILDUNG 1. Die Eulerwinkel

Die Winkel  $\varphi, \vartheta, \psi$  heißen *Euler Winkel*. Aus der nachfolgenden Konstruktion ist ersichtlich, dass für  $\vartheta \neq 0, \pi$  die Zerlegung eindeutig ist. Für  $\vartheta = 0$  (bzw.  $\pi$ ) ergeben  $(\varphi, \psi)$  und  $(\varphi + \alpha \bmod 2\pi, \psi - \alpha \bmod 2\pi)$  (bzw.  $(\varphi + \alpha \bmod 2\pi, \psi + \alpha \bmod 2\pi)$ ) dieselbe Matrix.

BEWEIS. (Satz 5.3.1) Sei  $e'_i = Ae_i$ . Ist  $e'_3 \neq e_3$  oder  $-e_3$ , so schneiden sich die von  $e_1, e_2$  aufgespannte Ebene und die von  $e'_1, e'_2$  aufgespannte Ebene längs einer Geraden durch den Ursprung. Sei  $e$  ein Einheitsvektor längs dieser Geraden. Wir orientieren  $e$  so dass  $\det(e_3, e'_3, e) > 0$ . Sei  $\vartheta \in [0, \pi]$  der Winkel zwischen  $e_3$  und  $e'_3$ ,  $\varphi$  der Winkel zwischen  $e_1$  und  $e$  und  $\psi$  der Winkel zwischen  $e$  und  $e'_1$ . Die Winkel seien so gemessen, dass die Drehung um die  $e_3$ -Achse, die  $e_1$  nach  $e$  abbildet, eine Drehung um  $e_3$  mit Winkel  $\varphi$  ist und die Drehung um die  $e'_3$ -Achse, die  $e$  nach  $e'_1$  abbildet, eine Drehung um  $e'_3$  mit Winkel  $\psi$  ist. Offenbar ist

$$A = R(e'_3, \psi)R(e, \vartheta)R(e_3, \varphi).$$

Die Drehungen  $R(e'_3, \vartheta)$ ,  $R(e, \vartheta)$  sind um Koordinatenachsen von rotierten Koordinatensysteme zu verstehen. Wir können sie durch  $R(e_1, \vartheta)$  und  $R(e_3, \psi)$  mit Hilfe von Lemma 5.2.2 ausdrücken:

$$\begin{aligned} R(e, \vartheta) &= R(e_3, \varphi)R(e_1, \vartheta)R(e_3, \varphi)^{-1}, \\ R(e'_3, \psi) &= (R(e, \vartheta)R(e_3, \varphi))R(e_3, \psi)(R(e, \vartheta)R(e_3, \varphi))^{-1}. \end{aligned}$$

Einsetzen ergibt  $A = R(e_3, \varphi)R(e_1, \vartheta)R(e_3, \psi)$ . Ist  $e_3 = \pm e'_3$  dann ist für alle  $e$  in der  $e_1e_2$ -Ebene die obige Konstruktion möglich.  $\square$

#### 5.4. Der Homomorphismus $SU(2) \rightarrow SO(3)$

Die Gruppe  $SU(2)$  kann geometrisch als dreidimensionale Sphäre  $S^3$  aufgefasst werden:

LEMMA 5.4.1. *Jede Matrix  $A \in SU(2)$  ist von der Form*

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}, \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2, \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1.$$

BEWEIS.  $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ ,  $\det A = 1 \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix}$ ,  $A^* = \begin{pmatrix} \bar{\alpha} & \bar{\gamma} \\ \bar{\beta} & \bar{\delta} \end{pmatrix}$ . Da  $A^* = A^{-1}$ , folgt  $\delta = \bar{\alpha}$ ,  $\gamma = -\bar{\beta}$ ,  $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ .  $\square$

Sei  $H_0$  der reelle Vektorraum aller hermiteschen spurfreien  $2 \times 2$  Matrizen. Da alle solchen Matrizen der Form  $\begin{pmatrix} z & x-iy \\ x+iy & -z \end{pmatrix}$ ,  $x, y, z \in \mathbb{R}^3$  sind, ist  $\dim H_0 = 3$ . Wir definieren für  $X, Y \in H_0$ ,  $(X, Y) = \frac{1}{2} \operatorname{tr}(XY)$ .  $(\ , \ )$  ist ein Skalarprodukt denn:  $(X, Y) = (Y, X)$  (Zyklizität der Spur),  $(\ , \ )$  ist offensichtlich bilinear und  $\frac{1}{2} \operatorname{tr} X^2 = \frac{1}{2} \operatorname{tr} X^* X = \frac{1}{2} \sum_{ij} |X_{ij}|^2 \geq 0$ , ( $= 0 \Leftrightarrow X = 0$ ). Für  $A \in SU(2)$  definiere die lineare Abbildung  $\phi(A) : H_0 \rightarrow H_0$  durch

$$\phi(A)X = AXA^*.$$

Es ist klar, dass  $\phi(A)X$  hermitesch und spurfrei ist.

SATZ 5.4.2.

- (i)  $\phi(AB) = \phi(A)\phi(B)$ ,  $A, B \in SU(2)$
- (ii)  $(\phi(A)X, \phi(A)Y) = (X, Y)$ ,  $A \in SU(2)$ ,  $X, Y \in H_0$ .  
d.h.  $\phi$  definiert einen Homomorphismus von  $SU(2)$  auf die Gruppe der orthogonalen Abbildungen von  $H_0$  nach  $H_0$ .

BEWEIS. (i)  $\phi(AB)X = ABX(AB)^* = ABXB^*A^* = \phi(A)\phi(B)X$   
(ii)  $\operatorname{tr}(\phi(A)X\phi(A)Y) = \operatorname{tr}(AXA^*AYA^*) = \operatorname{tr}(A^*AXA^*AY) = \operatorname{tr}(XY)$ , da  $A^*A = \mathbf{1}$ .  $\square$

Wir führen eine orthonormierte Basis in  $H_0$  ein, um die orthogonalen Abbildungen von  $H_0$  mit  $O(3)$  zu identifizieren. Wie oben bemerkt ist jede Matrix in  $H_0$  von der Form

$$\hat{x} := \begin{pmatrix} x_3 & x_1 - ix_2 \\ x_1 + ix_2 & -x_3 \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^3 x_j \sigma_j, \quad x \in \mathbb{R}^3,$$

wobei

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

die *Pauli Matrizen* sind. Diese Matrizen sind eine orthonormierte Basis, denn

$$\operatorname{tr} \sigma_i \sigma_j = 2\delta_{ij}$$

(Übung). Wir bezeichnen ebenfalls mit  $\phi(A) \in O(3)$  die Matrix von  $\phi(A)$  in der orthonormierten Basis  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ . Wir haben also einen Homomorphismus  $\phi : SU(2) \rightarrow O(3)$  mit  $A\hat{x}A^* = \widehat{\phi(A)x}$ . Da  $SU(2)$  zusammenhängend ist (Jede Matrix  $A \in SU(2)$  ist von der Form  $A_t$  mit  $A_t = B \begin{pmatrix} e^{it\theta} & 0 \\ 0 & e^{-it\theta} \end{pmatrix} B^{-1}$ ,  $B \in SU(2)$ ), und der Weg  $t \mapsto A_t$  verbindet  $\mathbf{1}$  mit  $A$  und  $\phi$  stetig ist, folgt  $\det(\phi(A)) = 1$  für alle  $A \in SU(2)$ , also definiert  $\phi$  einen Homomorphismus

$$\phi : SU(2) \rightarrow SO(3).$$

SATZ 5.4.3.  $\phi : SU(2) \rightarrow SO(3)$  ist surjektiv mit Kern  $\{\pm \mathbf{1}\}$ . Also ist

$$SU(2)/\{\pm \mathbf{1}\} \cong SO(3).$$

BEWEIS. Der Kern von  $\phi$  ist die Menge aller Matrizen  $A$  mit  $AXA^* = X$ , für alle  $X \in H_0$ . Sei  $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$  und  $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ . Es folgt  $|\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1$  und  $\alpha\beta = 0$ , also  $\beta = 0$  und  $|\alpha|^2 = 1$ . Mit  $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  folgt  $\alpha^2 = 1$ . Also ist der Kern  $\{\pm \mathbf{1}\}$ . Um die Surjektivität nachzuweisen genügt es nach Satz 5.3.1 zu zeigen, dass  $R_1(\vartheta)$  und  $R_3(\vartheta)$  im Bild von  $\phi$  sind. Eine explizite Rechnung zeigt

$$\phi \left( \begin{array}{cc} \cos \vartheta/2 & -i \sin \vartheta/2 \\ -i \sin \vartheta/2 & \cos \vartheta/2 \end{array} \right) = R_1(\vartheta), \quad \phi \left( \begin{array}{cc} e^{-i\vartheta/2} & 0 \\ 0 & e^{i\vartheta/2} \end{array} \right) = R_3(\vartheta).$$

□

Es ist eine gute Übung in ‘‘Pauli Matrizengymnastik’’ folgende Formel für Drehungen um beliebige Achsen herzuleiten:

$$\phi(\mathbf{1} \cos \vartheta/2 - i\hat{n} \sin \vartheta/2) = R(n, \vartheta), \quad n \in \mathbb{R}^3, \quad |n| = 1.$$

Beachte, dass wenn  $\vartheta$  von 0 nach  $2\pi$  läuft,  $R(n, \vartheta)$  einen Weg in  $SO(3)$  beschreibt, der  $\mathbf{1}$  mit  $\mathbf{1}$  verbindet. Dagegen geht die entsprechende  $SU(2)$  Matrix von  $\mathbf{1}$  nach  $-\mathbf{1}$ . Dies ist von grosser Bedeutung in der Quantenmechanik von Spin 1/2 Teilchen.

### 5.5. Der Minkowski-Raum

Der *Minkowski-Raum* (auch: Raumzeit) ist  $\mathbb{R}^4$  versehen mit der symmetrischen Bilinearform (‘‘Minkowskimetrik’’)

$$(x, y) = x^0 y^0 - x^1 y^1 - x^2 y^2 - x^3 y^3, \quad x, y \in \mathbb{R}^4.$$

(Die Koordinaten eines Punktes werden konventionell von 0 bis 3 statt von 1 bis 4 numeriert).

Ein Vektor  $x \in \mathbb{R}^4$  heisst *zeitartig* falls  $(x, x) > 0$ , *raumartig* falls  $(x, x) < 0$  und *lichtartig* falls  $(x, x) = 0$ . Die Menge der lichtartigen Vektoren heisst *Lichtkegel*  $K$ .

In der speziellen Relativitätstheorie sind  $x^1, x^2, x^3$  die Raumkoordinaten eines Ereignisses bezüglich eines inertialen Bezugssystems. Die Zeitkoordinate ist  $t = x^0/c$ , wobei  $c$  die Lichtgeschwindigkeit bezeichnet.

### 5.6. Die Lorentzgruppe

Die Lorentzgruppe  $O(1, 3)$  ist die Gruppe aller linearen Transformationen von  $\mathbb{R}^4$  die die Minkowskimetrik erhalten:

$$O(1, 3) = \{A \in GL(4, \mathbb{R}) \mid (Ax, Ay) = (x, y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^4\}.$$

Die Elemente dieser Gruppe heissen Lorentztransformationen. Lorentztransformationen bilden zeit- (licht-,raum-)artige Vektoren nach zeit- (licht-,raum-)artigen Vektoren ab. Da  $2(x, y) = (x + y, x + y) - (x, x) - (y, y)$ , ist folgende Definition äquivalent:

$$O(1, 3) = \{A \in GL(4, \mathbb{R}) \mid (Ax, Ax) = (x, x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^4\}.$$

In Matrixnotation besteht  $L$  aus allen  $4 \times 4$  Matrizen  $A = (A_{ij})$ , so dass

$$AgA^T = g, \quad g = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}.$$

oder  $\sum_{kl} A_{ik} g_{kl} A_{jl} = g_{ij}$ . Es folgt insbesondere für  $A \in L$ , dass

$$\det(A) \det(g) \det(A^T) = \det(g),$$

und also  $\det(A) = \pm 1$ .

DEFINITION 5.6.1. Eine Basis  $b_0, \dots, b_3$  von  $\mathbb{R}^4$  heisst *orthonormiert* (bezüglich der Minkowskimetrik) falls  $(b_i, b_j) = g_{ij}$  für alle  $i, j = 0, \dots, 3$ .

Zum Beispiel ist die Standardbasis  $e_0 = (1, 0, 0, 0), \dots, e_3 = (0, 0, 0, 1)$  orthonormiert.

SATZ 5.6.1. Sind  $(b_i)_{i=0}^3, (b'_i)_{i=0}^3$  zwei orthonormierte Basen vom Minkowski-Raum  $\mathbb{R}^4$ , so existiert genau eine Lorentztransformation  $A$ , so dass  $b'_j = Ab_j$ .

BEWEIS. Die Eindeutigkeit ist klar, denn jede lineare Abbildung ist eindeutig durch ihrer Wirkung auf Basisvektoren bestimmt. Es bleibt zu zeigen, dass die durch  $Ab_j = b'_j$  definierte Abbildung eine Lorentztransformation ist. Seien  $x = \sum x_i b_i, y = \sum y_i b_i \in \mathbb{R}^4$ . Dann gilt  $(Ax, Ay) = \sum x_i y_j (Ab_i, Ab_j) = \sum x_i y_j (b'_i, b'_j) = \sum x_i y_j (b_i, b_j) = (x, y)$ .  $\square$

Wendet man diesen Satz auf die Standardbasis an, so erhält man

Eine  $4 \times 4$  Matrix ist genau dann in  $O(1, 3)$  wenn ihre Spalten bezüglich der Minkowskimetrik orthonormiert sind.

Die Spalten einer Matrix beinhalten nämlich die Komponenten der Bilder von Standardbasisvektoren.

### 5.7. Beispiele von Lorentztransformationen

(a) Orthogonale Transformationen von  $\mathbb{R}^3$ . Ist  $R \in O(3)$  eine orthogonale Transformation, so ist die  $4 \times 4$  Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & R & & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

eine Lorentztransformation. Dadurch können wir  $O(3)$  als Untergruppe von  $O(1, 3)$  auffassen, und schreiben einfach  $R$  um die obige  $4 \times 4$  Matrix zu bezeichnen.

(b) Lorentzboost. Der *Lorentzboost* in der 3-Richtung mit *Rapidität*  $\chi \in \mathbb{R}$  ist die Lorentztransformation

$$L(\chi) = \begin{pmatrix} \cosh(\chi) & 0 & 0 & \sinh(\chi) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sinh(\chi) & 0 & 0 & \cosh(\chi) \end{pmatrix}.$$

Die Spalten dieser Matrix sind tatsächlich orthonormiert, wie man leicht unter Benutzung der Identität  $\cosh(\chi)^2 - \sinh(\chi)^2 = 1$  nachweist. Es gilt auch  $L(\chi_1)L(\chi_2) = L(\chi_1 + \chi_2)$ , also bilden diese Matrizen eine zu  $\mathbb{R}$  isomorphe Untergruppe.

(c) Diskrete Lorentztransformationen. Die Lorentztransformationen  $P$  ("Raumspiegelung") und  $T$  ("Zeitumkehr")

$$P = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix},$$

bilden mit 1 und  $PT$  eine abelsche Untergruppe der Ordnung 4.

LEMMA 5.7.1. Für alle Lorentztransformationen  $A$  gilt:

$$A^T = PA^{-1}P = TA^{-1}T.$$

Diese Identitäten folgen unmittelbar aus der definierenden Relation  $AgA^T = g$ , unter Verwendung der Matrizenidentitäten  $P = g = -T$ .

Insbesondere ist die Transponierte einer Matrix aus  $O(1, 3)$  ebenfalls in  $O(1, 3)$  und es folgt:

*Eine  $4 \times 4$  Matrix ist genau dann in  $O(1, 3)$  wenn ihre Zeilen bezüglich der Minkowskimetrik orthonormiert sind.*

### 5.8. Struktur der Lorentzgruppe

Sei  $O_+(1, 3) = \{A \in O(1, 3) \mid A_{00} > 0\}$  die Menge der Lorentztransformationen, deren erstes Matrixelement positiv ist. Solche Transformationen heissen *orthochron*, d.h. zeitrichtungserhaltend. Sei nämlich  $Z_+$  die Menge aller zeitartigen Vektoren, deren 0-Komponente positiv ist.

**SATZ 5.8.1.**  *$O_+(1, 3)$  ist eine Untergruppe von  $O(1, 3)$ . Sie besteht aus den Lorentztransformationen die  $Z_+$  nach  $Z_+$  abbilden.*

**BEWEIS.** Wir beweisen zuerst die zweite Aussage. Sei  $A \in O_+(1, 3)$  mit Matrixelementen  $A_{ij}$  und  $x \in Z_+$ . Dann ist  $Ax$  ebenfalls zeitartig. Mit der Notation  $\vec{A}_0 = (A_{01}, A_{02}, A_{03})$  und  $\vec{x} = (x^1, x^2, x^3)$ , ist die 0-Komponente von  $Ax$

$$x'^0 = A_{00}x^0 + \vec{A}_0 \cdot \vec{x}$$

Da die erste Zeile von  $A$  zeitartig ist (sie erfüllt  $(a, a) = 1$ ), hat man  $|\vec{A}_0| < A_{00}$  und mit  $|\vec{x}| < x^0$ ,

$$x'^0 \geq A_{00}x^0 - |\vec{A}_0||\vec{x}| > 0.$$

Also ist  $Ax \in Z_+$ . Umgekehrt: bildet eine Lorentztransformation  $A$   $Z_+$  nach sich selbst, so ist insbesondere die 0-Komponente von  $Ae_0$  positiv. Das bedeutet, dass  $A_{00} > 0$ .

Es bleibt zu zeigen, dass  $O_+(1, 3)$  eine Untergruppe ist. Es ist klar dass das Produkt von Transformationen die  $Z_+$  nach sich selbst abbilden wieder dieselbe Eigenschaft haben. Wir müssen nur noch zeigen, dass aus  $A \in O_+(1, 3)$   $A^{-1} \in O_+(1, 3)$  folgt.

Da  $A(-x) = -Ax$ , bildet  $A$  die Menge  $Z_- = -Z_+$  der zeitartigen Vektoren mit negativer 0-Komponente ebenfalls nach sich selbst. Da  $A$  die Menge  $Z = Z_+ \cup Z_-$  aller zeitartigen Vektoren bijektiv nach  $Z$  abbildet, folgt, dass  $A^{-1}$  auch in  $O_+(1, 3)$  liegt.  $\square$

**DEFINITION 5.8.1.** Die orthochrone spezielle Lorentzgruppe  $SO_+(1, 3)$  ist die Gruppe der orthochronen Lorentztransformationen der Determinante 1.

Drehungen und Lorentzboosts sind in  $SO_+(1, 3)$ .

**SATZ 5.8.2.** *Jede Lorentztransformation liegt in genau einer der folgenden Klassen:  $SO_+(1, 3)$ ,  $\{PX \mid X \in SO_+(1, 3)\}$ ,  $\{TX \mid X \in SO_+(1, 3)\}$  oder  $\{PTX \mid X \in SO_+(1, 3)\}$*

Wir haben gesehen, dass die Determinante einer Lorentztransformation 1 oder  $-1$  ist. Da die erste Spalte einer Lorentztransformation ein zeitartiger Vektor ist, ist notwendigerweise  $|A_{00}| > 0$ , also entweder  $A_{00} > 0$  oder  $A_{00} < 0$ . Wir haben also vier Möglichkeiten für die Vorzeichen der Determinante und des ersten Matrixelements. Wenn  $X \in SO_+(1, 3)$ , dann ist

	det = 1	det = -1
$A_{00} > 0$	$X$	$PX$
$A_{00} < 0$	$PTX$	$TX$

LEMMA 5.8.3. *Jede orthochrone spezielle Lorentztransformation ist von der Form  $R_1 L(\chi) R_2$ , mit  $\chi \in \mathbb{R}$  und  $R_1, R_2 \in SO(3)$ .*

BEWEIS. Sei  $A \in SO_+(1, 3)$  und es bezeichne  $a = (a^0, \vec{a}) \in \mathbb{R}^4$  die erste Spalte von  $A$ . Ist  $R_1$  eine Drehung, die  $(0, 0, |\vec{a}|)$  nach  $\vec{a}$  abbildet, so ist die erste Spalte von  $R_1^{-1}A$  von der Form  $a' = (u, 0, 0, v)$ , mit  $u > 0$  und  $u^2 - v^2 = 1$ . Also ist  $u = \cosh(\chi)$  und  $v = \sinh(\chi)$  für geeignetes  $\chi \in \mathbb{R}$ . Also  $L(-\chi)a' = (1, 0, 0, 0)$  und  $L(-\chi)R_1^{-1}A$  ist eine Matrix mit erster Spalte  $(1, 0, 0, 0)$ . Die erste Zeile hat dann die Form  $b = (1, \vec{b})$ ,  $\vec{b} \in \mathbb{R}^3$ . Da aber  $(b, b) = 1 - \vec{b} \cdot \vec{b} = 1$ , folgt dass  $\vec{b} = 0$ . Mit  $L(-\chi) = L(\chi)^{-1}$ , finden wir, dass  $L(\chi)^{-1}R_1^{-1}A$  eine Lorentztransformation der Form

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & R & & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

mit Determinante 1 ist. Die Bedingung, dass die Spalten orthonormiert bezüglich der Minkowskimetrik, bedeutet, dass die Spalten von  $R$  bezüglich des Euklidischen Skalarprodukts orthonormiert sind. Also ist  $R$  eine Drehung  $R_2$ .  $\square$

BEMERKUNG 5.8.1. Dieses Lemma zeigt, dass  $SO_+(1, 3)$  die Zusammenhangskomponente von  $O(1, 3)$  ist, die die Identität enthält (Siehe 1.2), und dass die Zerlegung von Satz 5.8.2 die Zerlegung in Zusammenhangskomponenten ist. Lässt man nämlich die Drehwinkel und die Rapidität in der Zerlegung  $R_1 L(\chi) R_2$  kontinuierlich variieren, so kann man jede Matrix in  $SO_+(1, 3)$  durch einen Weg mit der Identität verbinden. Dagegen können Matrizen der Form  $PX$ ,  $TX$ , oder  $PTX$ ,  $X \in SO_+(1, 3)$  nicht mit der Identität (oder miteinander) durch Wege verbunden werden, da die Determinante und das erste Matrixelement niemals verschwinden, also das Vorzeichen nicht ändern können.

## 5.9. Inertiale Bezugssysteme

In der speziellen Relativitätstheorie heisst eine orthonormierte Basis  $(b_i)$  ein (inertiales) *Bezugssystem*. Darunter kann man sich eine Beobachterin oder einen Beobachter am Ursprung eines Euklidischen Achsensystem und eine Uhr vorstellen<sup>1</sup>. Ein Punkt  $x$  im Minkowski-Raum heisst *Ereignis*. Die Koordinaten von  $x$  im Bezugssystem  $(b_i)$  sind durch  $x = \sum x^i b_i$  gegeben;  $x^1, x^2, x^3$  sind die Raumkoordinaten und  $t = x^0/c$  ist die Zeitkoordinate des Ereignisses. Dabei ist  $c$  die Lichtgeschwindigkeit.

Ein Punktteilchen wird in einem Bezugssystem durch eine Bahn  $\vec{x}(t)$  beschrieben, die die Raumkoordinaten als Funktion der Zeit angibt. Im Minkowski-Raum haben wir also eine Kurve, die *Weltlinie* des Teilchens, mit parametrischer Darstellung bezüglich  $(b_i)$

$$x^0 = ct, \quad \vec{x} = \vec{x}(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Für Teilchen, die sich langsamer als das Licht bewegen ist die Weltlinie eine Kurve im Minkowski-Raum, deren Tangentialvektor  $dx/dt$  stets zeitartig ist.

Ist  $(b'_i)$  ein zweites Bezugssystem und  $\Lambda \in O(1, 3)$  mit  $b_i = \Lambda b'_i = \sum_j \Lambda_{ji} b'_j$ , so werden die Koordinaten  $x^{i'}$  eines Ereignis im Bezugssystem  $(b'_i)$  aus den Koordinaten  $x^i$  desselben Ereignis im Bezugssystem  $(b_i)$  durch die Lorentztransformation  $\Lambda$  gegeben:

$$x^{i'} = \sum_j \Lambda_{ij} x^j.$$

<sup>1</sup>Wir betrachten hier Bezugssysteme mit übereinstimmendem Ursprung zur Zeit 0. Allgemeiner kann man eine Verschiebung des Ursprungs mit wenig Änderung betrachten

Die Bahn eines Punktteilchen  $\vec{x}'(t)$  bezüglich  $(b'_i)$  ist dann durch

$$x^{i'}(t') = \sum_{j=0}^3 \Lambda_{ij} x^j(t), \quad i = 1, 2, 3,$$

als Funktion der Bahn bezüglich  $(b_i)$  gegeben, wobei  $ct' = \sum_j \Lambda_{0j} x^j(t)$  implizit  $t$  durch  $t'$  ausdrückt.

Sei zum Beispiel  $\Lambda = L(\chi)$ , der Lorentzboost in der  $z$ -Richtung mit Rapidität  $\chi$ . Dann ist ein Teilchen, das sich in Ruhe im Ursprung des Bezugssystems  $(b_i)$  befindet, durch die Weltlinie  $x^0(t) = ct$ ,  $\vec{x}(t) = 0$  beschrieben. Im Bezugssystem  $(b'_i)$  ist dieses Teilchen durch die Bahn  $t' \mapsto \vec{x}'(t')$  mit  $x^{1'} = x^{2'} = 0$  und  $x^{3'}(t') = \tanh(\chi)ct'$  beschrieben. Also bewegt sich der Ursprung des Bezugssystems  $(b_i)$  (oder allgemeiner jedes bezüglich  $(b_i)$  ruhendes Teilchen) für den Beobachter des Bezugssystem  $(b'_i)$  mit konstanter Geschwindigkeit  $v = \tanh(\chi)c$  in der  $z$ -Richtung.

### 5.10. Der Isomorphismus $SL(2, \mathbb{C})/\{\pm 1\} \rightarrow SO_+(1, 3)$

Algebraisch wird dieser Isomorphismus gegeben, indem wir den Minkowski-Raum mit dem vierdimensionalen Raum  $H$  aller hermiteschen  $2 \times 2$  Matrizen identifizieren: jede solche Matrix hat nämlich die Form

$$\hat{x} = \begin{pmatrix} x^0 + x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & x^0 - x^3 \end{pmatrix} = x^0 \mathbf{1} + \sum_{j=1}^3 x^j \sigma_j,$$

wobei  $x \in \mathbb{R}^4$  ist. Setzt man  $x^0 = 0$  in dieser Formel, so erhält man wieder die früher definierte Abbildung  $x \mapsto \hat{x}$  von  $\mathbb{R}^3$  nach  $H_0$ .

LEMMA 5.10.1. Für alle  $x \in \mathbb{R}^4$  gilt  $(x, x) = \det(\hat{x})$

BEWEIS. Klar. □

Für jede Matrix  $A \in SL(2, \mathbb{C})$  definieren wir die lineare Abbildung von  $H$  nach  $H$ :

$$X \mapsto AXA^*$$

Diese Abbildung ist wohldefiniert, denn mit  $X$  ist auch  $AXA^*$  hermitesch. Also gibt es eine lineare Abbildung  $\phi(A)$  von  $\mathbb{R}^4$  nach  $\mathbb{R}^4$ , so dass

$$A\hat{x}A^* = \widehat{\phi(A)x}.$$

Die Determinante von  $AXA^*$  ist  $\det(A)\det(X)\det(A^*) = \det(X)|\det(A)|^2$  also gleich  $\det(X)$  für  $A \in SL(2, \mathbb{C})$ . Es folgt aus dem Lemma, dass  $\phi(A) \in O(1, 3)$ .

BEISPIEL 5.10.1.  $A = W_\theta = \begin{pmatrix} e^\theta & 0 \\ 0 & e^{-\theta} \end{pmatrix}$ ,  $\theta \in \mathbb{R}$ .

$$W_\theta \hat{x} W_\theta^* = \begin{pmatrix} e^{2\theta}(x^0 + x^3) & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & e^{-2\theta}(x^0 - x^3) \end{pmatrix}.$$

Also ist  $\phi(A)x = x'$ , mit  $x'^1 = x^1$ ,  $x'^2 = x^2$ , und

$$x'^0 = \frac{1}{2}(e^{2\theta}(x^0 + x^3) + e^{-2\theta}(x^0 - x^3)) = \cosh(2\theta)x^0 + \sinh(2\theta)x^3,$$

und  $x'^3 = \sinh(2\theta)x^0 + \cosh(2\theta)x^3$ . Es folgt dass  $\phi(W_\theta) = L(2\theta)$ , der Lorentzboost mit Rapidität  $2\theta$ .

SATZ 5.10.2. Die Abbildung  $\phi$  ist ein surjektiver Homomorphismus von  $SL(2, \mathbb{C})$  nach  $SO_+(1, 3)$  mit Kern  $\{\pm 1\}$ .

Also induziert  $\phi$  einen Isomorphismus  $SL(2, \mathbb{C})/\{\pm 1\} \rightarrow SO_+(1, 3)$ . Die Einschränkung von  $\phi$  auf  $SU(2) \subset SL(2, \mathbb{C})$  ist der Homomorphismus 5.4  $SU(2) \rightarrow SO(3)$ .

BEWEIS. Da  $A^* = A^{-1}$  für  $A \in SU(2)$ , ist es klar, dass die Einschränkung von  $\phi$  auf  $SU(2)$  mit dem früher definierten Homomorphismus  $SU(2) \rightarrow SO(3)$  übereinstimmt.

Die Abbildung  $\phi$  ist ein Homomorphismus, denn

$$(AB)X(AB)^* = ABXB^*A^*.$$

Um zu zeigen, dass das Bild dieses Homomorphismus in  $SO_+(1, 3)$  enthalten ist, genügt es zu zeigen, dass  $SL(2, \mathbb{C})$  zusammenhängend ist. Ist nämlich  $A \in SL(2, \mathbb{C})$  und  $t \mapsto A_t \in SL(2, \mathbb{C})$  ein Weg mit  $A_0 = \mathbf{1}$ ,  $A_1 = A$ , so hängt  $\det(\phi(A_t))$  stetig von  $t$  ab, kann also nicht das Vorzeichen wechseln. Da  $\det(\phi(A_0)) = 1$ , ist auch  $\det(\phi(A)) = 1$ . Ähnlich folgt, dass  $\phi(A)_{00} > 0$ , also  $\phi(A) \in SO_+(1, 3)$ .

Die Gruppe  $SL(2, \mathbb{C})$  ist zusammenhängend, denn es folgt aus dem Jordanschen Normalformsatz, dass jede Matrix in  $SL(2, \mathbb{C})$  von der Form  $A = D \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} D^{-1}$  ist. Wählt man irgendwelche Kurve  $t \mapsto a_t$  ( $t \in [0, 1]$ ) in der komplexen Ebene, mit  $a_t \neq 0$ , so dass  $a_0 = 1$ ,  $a_1 = a$ , so verbindet der Weg  $t \mapsto A = D \begin{pmatrix} a_t & tb \\ 0 & a_t^{-1} \end{pmatrix} D^{-1}$  die Identitätsmatrix mit der vorgegebenen Matrix  $A$ .

Der Homomorphismus  $\phi$  ist surjektiv, denn jede Matrix  $B \in SO_+(1, 3)$  ist, nach Lemma 5.8.3, von der Form  $R_1 L(\chi) R_2$ . Sind also  $A_1, A_2 \in SU(2)$  so, dass  $\phi(A_i) = R_i$  (solche Matrizen existieren wegen Satz 5.4.3), so gilt

$$\phi(A_1 W_{\chi/2} A_2) = B.$$

Der Kern von  $\phi$  besteht aus den Matrizen  $A \in SL(2, \mathbb{C})$  mit der Eigenschaft, dass  $A\hat{x}A^* = \hat{x}$ . Für  $x = (1, 0, 0, 0)$  erhält man die Gleichung  $AA^* = \mathbf{1}$ , also  $A \in SU(2)$ . Es folgt dann, wie im  $SU(2)$  Fall, dass  $A = \pm \mathbf{1}$ .  $\square$

### 5.11. Die Lorentzgruppe und der Sternhimmel

Der Isomorphismus  $\phi$  hat eine physikalisch-geometrische Bedeutung in der klassischen Relativitätstheorie.

Ein *Lichtstrahl* (durch den Ursprung) ist eine lichtartige Gerade  $\{\lambda x, \lambda \in \mathbb{R}\}$ ,  $x \neq 0$  mit  $(x, x) = 0$ . Die Menge aller Lichtstrahlen bezeichnen wir mit  $S(K)$ . Lorentztransformationen sind linear und bilden lichtartige Vektoren nach lichtartigen Vektoren ab. Also bilden sie Lichtstrahlen nach Lichtstrahlen ab. In anderen Worten induziert jede Lorentztransformation  $\Lambda$  eine Abbildung  $S_\Lambda : S(K) \rightarrow S(K)$  auf der Menge der Lichtstrahlen.

Physikalisch hat diese Abbildung folgende Bedeutung: eine in einem Bezugssystem in Ruhe im Ursprung befindende Beobachterin sieht zur Zeit 0 den Himmel an: auf ihr kommen Lichtstrahlen von weiten Sternen an. Ein anderer Beobachter ist in Ruhe im Ursprung bezüglich eines anderen Bezugssystems. Die Koordinaten eines Ereignisses bezüglich dieses zweiten Bezugssystems seien durch eine Lorentztransformation  $\Lambda$  als Funktionen der Koordinaten bezüglich des ersten gegeben. Das Bild vom Sternhimmel zur Zeit 0 des Beobachters wird dann aus dem Bild vom Sternhimmel der Beobachterin durch die zugehörige Abbildung  $S_\Lambda : S(K) \rightarrow S(K)$  gewonnen.

Diese Abbildung wird expliziter beschrieben, wenn wir den Himmel als eine Kugeloberfläche (das Himmelsgewölbe) auffassen: jedem Lichtstrahl durch den Ursprung ordnet man einen Punkt auf einer Kugeloberfläche vom Radius 1 zu, den Punkt auf dem Lichtstrahl mit 0-Koordinate  $x^0 = -1$ . Das gibt eine Identifikation von  $S(K)$  mit der Einheitssphäre  $S^2$ , und wir fassen  $S_\Lambda$  als eine Abbildung von  $S^2$  nach  $S^2$  auf.

SATZ 5.11.1. *Die Abbildung  $\Lambda \mapsto S_\Lambda$  ist ein Isomorphismus von der orthochronen speziellen Lorentzgruppe  $SO_+(1, 3)$  nach der Gruppe der winkeltreuen, orientierungserhaltenden Transformationen der Einheitssphäre  $S^2$ .*

Also sieht die Beobachterin im bewegten Bezugssystem ein zwar verzerrtes Bild des Himmels, sie wird aber dieselben Winkel messen wie im Ruhesystem.

Die *konforme Gruppe* von  $S^2$ , die Gruppe der winkeltreuen, orientierungserhaltenden Transformationen von  $S^2$ , ist isomorph zur Möbiusgruppe, welche ihrerseits zur Gruppe  $SL(2, \mathbb{C})/\{\pm 1\}$  isomorph ist (S. Beispiel 1.1.11). Wir erhalten also einen Isomorphismus  $\psi: SL(2, \mathbb{C})/\{\pm 1\} \rightarrow SO_+(1, 3)$ . Wie dieser Isomorphismus aussieht hängt von der Identifikation der konformen Gruppe mit  $SL(2, \mathbb{C})/\{\pm 1\}$  ab. Wir beweisen Satz 5.11.1, indem wir  $\psi$  explizit berechnen für die durch die stereographische Projektion bezüglich des Nordpols definierte Identifikation der konformen Gruppe mit  $SL(2, \mathbb{C})/\{\pm 1\}$ . Wir werden sehen, dass  $\psi$  sich von  $\phi$  um eine einfache Konjugation unterscheidet.

Zuerst fassen wir die Theorie der Möbiustransformationen kurz zusammen. Es bezeichne  $p: S^2 \rightarrow \bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  die stereographische Projektion:

$$p(x^1, x^2, x^3) = \frac{x^1 + ix^2}{1 - x^3}$$

Diese Projektion sendet einen Punkt  $x$  auf der Kugeloberflächen nach dem Durchschnitt der durch den Nordpol  $(0, 0, 1)$  und  $x$  gehenden Gerade mit der (mit  $\mathbb{C}$  identifizierten)  $x$ - $y$  Ebene. Der Nordpol wird nach  $\infty$  abgebildet. Die stereographische Projektion ist eine winkeltreue bijektive Abbildung mit inverser Abbildung

$$p^{-1}(z) = \left( \frac{2\operatorname{Re}(z)}{|z|^2 + 1}, \frac{2\operatorname{Im}(z)}{|z|^2 + 1}, \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \right).$$

Eine *Möbiustransformation* ist eine bijektive Abbildung  $\bar{\mathbb{C}} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$  der Form  $\gamma_A(z) = (az + b)/(cz + d)$ , ( $f(\infty) := a/c$ ). Die Koeffizienten werden dabei in einer Matrix  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  zusammengefasst. Da

$$\frac{a_1 \frac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2} + b_1}{c_1 \frac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2} + d_1} = \frac{(a_1 a_2 + b_1 c_2)z + a_1 b_2 + b_1 d_2}{(c_1 a_2 + d_1 c_2)z + b_1 c_2 + d_1 d_2},$$

ist die Zusammensetzung von Möbiustransformationen wieder eine Möbiustransformation, und es gilt

$$\gamma_{A_1} \circ \gamma_{A_2} = \gamma_{A_1 A_2}.$$

Insbesondere ist  $\gamma_A$  genau dann invertierbar wenn  $A$  invertierbar ist, also wenn  $\det(A) \neq 0$ . Die Inverse ist dann die Möbiustransformation  $\gamma_{A^{-1}}$ . Da die Möbiustransformation  $\gamma_A(z)$  sich nicht ändert, wenn die Koeffizienten  $a, b, c, d$  mit einer nichtverschwindenden Konstanten multipliziert werden, können wir annehmen, dass  $\det(A) = ad - bc = 1$ . Somit haben wir einen surjektiven Homomorphismus  $A \mapsto \gamma_A$  von  $SL(2, \mathbb{C})$  nach der Gruppe  $M$  der Möbiustransformationen. Der Kern dieses Homomorphismus ist  $\{\pm 1\}$ . Also ist  $M$  isomorph zu  $SL(2, \mathbb{C})/\{\pm 1\}$ .

**SATZ 5.11.2.** *Sei  $\Lambda \in SO_+(1, 3)$ . Identifiziert man die Menge der Lichtstrahlen  $S(K)$  mit  $S^2$  und, via stereographische Projektion, mit  $\bar{\mathbb{C}}$ , so ist  $S_\Lambda$  eine Möbiustransformation  $\gamma_A$ . Die Abbildung  $\Lambda \mapsto A$  ist ein Isomorphismus  $\psi^{-1}: SO_+(1, 3) \rightarrow SL(2, \mathbb{C})$  und es gilt*

$$\psi(A) = \phi(QAQ^{-1}), \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

**BEISPIEL 5.11.1.** Der Boost  $\Lambda = L(\chi)$  in  $z$ -Richtung sendet den Lichtstrahl durch den Punkt  $(-1, x^1, x^2, x^3) \in K$  nach dem Lichtstrahl durch

$$(-\cosh(\chi) + x^3 \sinh(\chi), x^1, x^2, -\sinh(\chi) + x^3 \cosh(\chi)),$$

also durch  $(-1, x^{1'}, x^{2'}, x^{3'})$  mit

$$x^{1'} = \frac{x^1}{\cosh(\chi) - x^3 \sinh(\chi)}, \quad x^{2'} = \frac{x^2}{\cosh(\chi) - x^3 \sinh(\chi)},$$

$$x^{3'} = \frac{-\sinh(\chi) + x^3 \cosh(\chi)}{\cosh(\chi) - x^3 \sinh(\chi)}.$$

Die stereographische Projektion dieses Punktes ist  $z' = (x^{1'} + ix^{2'})/(1 - x^{3'}) = e^{-\chi}(x^1 + ix^2)/(1 - x^3)$ . Somit entspricht  $S_\Lambda$  der Möbiustransformation

$$z \mapsto e^{-\chi} z = \gamma_{\begin{pmatrix} e^{-\chi/2} & 0 \\ 0 & e^{\chi/2} \end{pmatrix}}(z).$$

Satz 5.11.2 wird am natürlichsten bewiesen, indem  $\bar{\mathbb{C}}$  als *komplexen eindimensionalen projektiven Raum*  $\mathbb{C}P^1$  aufgefasst wird.  $\mathbb{C}P^n$  ist der Raum aller eindimensionalen Unterräume von  $\mathbb{C}^{n+1}$ . Im Falle  $n = 1$  schreiben wir  $[z_1, z_2] \in \mathbb{C}P^1$  für den durch  $(z_1, z_2) \neq 0$  aufgespannten Unterraum. Dann ist die Bijektion  $\mathbb{C}P^1 \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$  durch  $[z_1, z_2] \mapsto z_1/z_2$  gegeben. Es ist leicht zu zeigen, dass diese Abbildung eine wohldefinierte Bijektion ist. Die Möbiustransformationen stammen dann aus linearen Abbildungen von  $\mathbb{C}^2$  nach  $\mathbb{C}^2$ : eine  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{C})$  bildet  $[z_1, z_2]$  nach dem Unterraum  $[az_1 + bz_2, cz_1 + dz_2]$  ab, also  $z = z_1/z_2$  nach  $(az_1 + bz_2)/(cz_1 + dz_2) = \gamma_A(z)$ .

Dann hat die Bijektion  $S(K) \rightarrow \bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C}P^1$  folgende Interpretation: sie bildet einen Lichtstrahl  $\{\lambda x \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ ,  $x \in K - \{0\}$  nach dem *Bildraum* der Matrix  $\hat{x}$  ab. Da  $\det(\hat{x}) = (x, x) = 0$  und  $x \neq 0$ , hat  $\hat{x}$  einen eindimensionalen Bildraum, der durch  $(x^0 + x^3, x^1 + ix^2)$  aufgespannt wird. Ist  $x^0 = -1$  so ist der entsprechende Punkt in  $\bar{\mathbb{C}}$ :

$$\frac{-1 + x^3}{x^1 + ix^2} = -\frac{1}{p(x^1, x^2, x^3)} = \gamma_Q(p(x^1, x^2, x^3))$$

Falls  $\Lambda = \phi(A)$ , dann ist  $\widehat{\Lambda x} = A\hat{x}A^*$ . Also

$$\text{Bild}(\widehat{\Lambda x}) = \{A\hat{x}A^*w \mid w \in \mathbb{C}^2\} = \text{Bild}(A\hat{x}) = A\text{Bild}(\hat{x}).$$

Somit induziert die Lorentztransformation  $\Lambda$  die Möbiustransformation  $\gamma_Q \gamma_A \gamma_Q^{-1} = \gamma_{QAQ^{-1}}$  auf  $\bar{\mathbb{C}}$ . Der Satz ist bewiesen.

## Lie-Algebren

Literatur: [4], [8]. Vertiefung: [7], [9]

### 6.1. Exponentialabbildung

Sei  $\text{Mat}(n, \mathbb{K})$ ,  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$ , der Vektorraum aller  $n \times n$  Matrizen mit Elementen in  $\mathbb{K}$ . Durch die Identifikation mit  $\mathbb{K}^{n^2}$ ,  $x = (x_{ij}) \mapsto (x_{11}, x_{12}, \dots, x_{nn})$  erhält  $\text{Mat}(n, \mathbb{K})$  eine Norm

$$\|x\| = \left( \sum_{i,j=1}^n |x_{ij}|^2 \right)^{1/2} = (\text{tr}(X^* X))^{1/2}.$$

LEMMA 6.1.1.  $\|XY\| \leq \|X\| \|Y\|$ ,  $\forall X, Y \in \text{Mat}(n, \mathbb{K})$ .

BEWEIS.

$$\|XY\|^2 = \sum_{i,j=1}^n \left| \sum_{k=1}^n X_{ik} Y_{kj} \right|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n \left( \sum_{l=1}^n |\bar{X}_{il}|^2 \sum_{m=1}^n |Y_{mj}|^2 \right) = \|X\|^2 \|Y\|^2.$$

Im zweiten Schritt wurde die Schwarzsche Ungleichung  $|(u, v)|^2 \leq \|u\|^2 \|v\|^2$  für  $u_k = \bar{X}_{ik}$  und  $v_k = Y_{kj}$  (bei festem  $i, j$ ) verwendet.  $\square$

LEMMA 6.1.2. *Die Reihe*

$$\exp(X) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} X^k$$

konvergiert absolut für alle  $X \in \text{Mat}(n, \mathbb{K})$ .

BEWEIS. Aus Lemma 6.1.1 folgt induktiv, dass  $\|X^k\| \leq \|X\|^k$ .

Also ist  $\|\frac{1}{k!} X^k\| \leq \frac{1}{k!} \|X\|^k$  und  $\sum_{k=0}^{\infty} \|\frac{1}{k!} X^k\| \leq e^{\|X\|} < \infty$ .  $\square$

Es folgt, dass die Matrixelemente von  $\exp(X)$  absolut konvergente Reihen in den Matrixelementen  $X_{ij}$  von  $X$  sind, und somit analytisch von  $X_{ij}$  abhängen.

LEMMA 6.1.3. *Seien  $X, Y \in \text{Mat}(n, \mathbb{K})$ ,  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$ .*

- (i)  $\exp(X) \exp(Y) = \exp(X + Y)$  falls  $XY = YX$
- (ii)  $\exp(X)$  ist invertierbar,  $\exp(X)^{-1} = \exp(-X)$
- (iii)  $A \exp(X) A^{-1} = \exp(A X A^{-1})$ ,  $A \in GL(n, \mathbb{K})$
- (iv)  $\det(\exp(X)) = \exp(\text{tr}(X))$
- (v)  $\exp(X^*) = (\exp(X))^*$ ,  $\exp(X^T) = (\exp(X))^T$

BEWEIS. (i)

$$\begin{aligned} \exp(X) \exp(Y) &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} X^j \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} Y^k = \sum_{k,j=0}^{\infty} \frac{1}{j!k!} X^j Y^k \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^n \frac{n!}{j!(n-j)!} X^j Y^{n-j} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (X + Y)^n \\ &= \exp(X + Y). \end{aligned}$$

Die Vertauschung der Summationen ist bei absoluter Konvergenz erlaubt.

(ii) Aus (i) folgt insbesondere  $\exp(X)\exp(-X) = \exp(-X)\exp(X) = \mathbf{1}$ .

$$(iii) A \left( \sum_{j=0}^{\infty} \frac{X^j}{j!} \right) A^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} \left( \frac{AX^jA^{-1}}{j!} \right) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(AXA^{-1})^j}{j!}.$$

(iv) Sei  $X = AY A^{-1}$ , wobei  $Y$  eine obere Dreiecksmatrix ist, und  $A \in GL(n, \mathbb{C})$ . Sind  $y_1, \dots, y_n \in \mathbb{C}$  die Diagonalelemente von  $Y$ , so ist für alle  $k \geq 1$   $Y^k$  eine Dreiecksmatrix mit Diagonalelementen  $y_1^k, \dots, y_n^k$  (Induktion nach  $k$ ). Folglich ist  $\exp(Y)$  ebenfalls eine obere Dreiecksmatrix mit Diagonalelementen  $e^{y_1}, \dots, e^{y_n}$ . Also

$$\det(\exp(Y)) = e^{y_1} \dots e^{y_n} = e^{y_1 + \dots + y_n} = e^{\text{tr} Y}.$$

Die Behauptung folgt aus (iii) mit  $\det(AZA^{-1}) = \det Z$  und  $\text{tr}(AYA^{-1}) = \text{tr}(Y)$ .

(v)  $(X^k)^* = (X^*)^k$ . Die Behauptung folgt unter Verwendung der Stetigkeit der Abbildung  $X \mapsto X^*$ . Analog  $(X^k)^T = (X^T)^k$ .  $\square$

Die Abbildung  $\text{Mat}(n, \mathbb{K}) \rightarrow GL(n, \mathbb{K})$ ,  $X \mapsto \exp(X)$  heisst Exponentialabbildung.

BEISPIEL 6.1.1.  $\exp \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{1} + \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Allgemein für nilpotente Matrizen  $N$  ist  $\exp(N)$  ein Polynom in  $N$

$$\exp(N) = \mathbf{1} + N + \frac{N^2}{2!} + \dots + \frac{N^k}{k!}$$

BEISPIEL 6.1.2. Sei  $X = \begin{pmatrix} 0 & -\varphi \\ \varphi & 0 \end{pmatrix}$ . Aus  $X^2 = \varphi^2(-\mathbf{1})$  folgt

$$\begin{aligned} X^{2k} &= \varphi^{2k}(-\mathbf{1})^k \mathbf{1} \\ X^{2k+1} &= \varphi^{2k+1}(-\mathbf{1})^k \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \exp(X) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} X^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} X^{2k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \varphi^{2k} \mathbf{1} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \varphi^{2k+1} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \cos \varphi \mathbf{1} + \sin \varphi \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \in SO(2) \end{aligned}$$

BEISPIEL 6.1.3. Sei  $X = i \sum_{j=1}^3 n_j \sigma_j$ ,  $|n| = 1$ . Dann ist  $X^2 = -\mathbf{1}$  und

$$\exp(\vartheta X) = \cos \vartheta \mathbf{1} + \sin \vartheta X.$$

LEMMA 6.1.4. *Die Abbildung*

$$\exp : \text{Mat}(n, \mathbb{K}) \rightarrow GL(n, \mathbb{K})$$

*ist in einer Umgebung von 0 invertierbar, d.h es existiert eine Umgebung  $U$  von 0 so dass die Abbildung  $\exp : U \mapsto \exp(U)$  invertierbar ist. Die inverse Abbildung ist durch eine absolut konvergente Potenzreihe gegeben.*

BEWEIS. Die Reihe

$$\log X = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(X - \mathbf{1})^n}{n}$$

ist für  $\|X - \mathbf{1}\| < 1$  absolut konvergent, denn

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\| (-1)^{n+1} \frac{(X - \mathbf{1})^n}{n} \right\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|X - \mathbf{1}\|^n}{n} = -\log(1 - \|X - \mathbf{1}\|) < \infty.$$

Es folgt, dass  $\exp(\log X) = X$  falls  $\|X - \mathbf{1}\| < 1$  und  $\log(\exp X) = X$  für  $\|\exp X - \mathbf{1}\| < 1$ .  $\square$

## 6.2. Einparametergruppen

DEFINITION 6.2.1. Eine Abbildung  $\mathbb{R} \rightarrow GL(n, \mathbb{K})$ ,  $t \mapsto X(t)$ ,  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$ , heisst Einparametergruppe falls sie stetig differenzierbar ist,  $X(0) = \mathbf{1}$  und für alle  $t, s \in \mathbb{R}$   $X(s+t) = X(s)X(t)$  gilt.

Das Bild einer solchen Abbildung ist eine Untergruppe mit  $X(t)^{-1} = X(-t)$ .

SATZ 6.2.1.

- (i) Für alle  $X \in \text{Mat}(n, \mathbb{K})$  ist  $t \mapsto \exp(tX)$  eine Einparametergruppe.
- (ii) Alle Einparametergruppen sind von dieser Form.

DEFINITION 6.2.2.  $X$  heisst *infinitesimaler Erzeugender* der Einparametergruppe  $t \mapsto \exp(tX)$ .

BEWEIS. (i) Da  $tXsX = sXtX$  ist nach Lemma 6.1.3(i)  $\exp(tX)\exp(sX) = \exp(tX + sX)$ .  $\exp(tX)$  ist stetig differenzierbar und  $\frac{d}{dt}\exp(tX) = \exp(tX)X$ .

(ii) Sei  $t \mapsto X(t)$  eine Einparametergruppe. Dann ist  $X(t)$  Lösung der Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}X(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{X(t+h) - X(t)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{X(t)X(h) - X(t)}{h} \\ &= X(t) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{X(h) - \mathbf{1}}{h} = X(t)\dot{X}(0) \end{aligned}$$

mit Anfangsbedingung  $X(0) = \mathbf{1}$ . Aus dem Eindeutigkeitssatz für Differentialgleichungen erster Ordnung folgt

$$X(t) = \exp(t\dot{X}(0)).$$

$\square$

## 6.3. Matrix-Lie-Gruppen

Sei  $G \subset GL(n, \mathbb{K})$  eine abgeschlossene Untergruppe von  $GL(n, \mathbb{K})$  (abgeschlossen heisst: Für jede Folge  $(g_j)$  in  $G$ , die in  $GL(n, \mathbb{K})$  konvergiert, liegt der Grenzwert  $\lim_{j \rightarrow \infty} g_j$  auch in  $G$ ). Wir definieren

$$\text{Lie}(G) = \{X \in \text{Mat}(n, \mathbb{K}) \mid \exp(tX) \in G \forall t \in \mathbb{R}\}.$$

$\text{Lie}(G)$  heisst *Lie-Algebra* der Lie-Gruppe  $G$ .

SATZ 6.3.1. Sei  $G$  eine abgeschlossene Untergruppe von  $GL(n, \mathbb{K})$ ,  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$ . Dann ist  $\text{Lie}(G)$  ein reeller Vektorraum, und für alle  $X, Y \in \text{Lie}(G)$ ,  $XY - YX \in \text{Lie}(G)$ .

Dieser Satz wird später bewiesen. Da wir uns nur für diese Lie-Gruppen interessieren benützen wir folgende Definition von Lie-Gruppen:

DEFINITION 6.3.1. Eine (Matrix-)Lie-Gruppe ist eine abgeschlossene Untergruppe von  $GL(n, \mathbb{K})$ .

Es stellt sich heraus, dass abgeschlossene Untergruppen von  $GL(n, \mathbb{K})$  tatsächlich Lie-Gruppen im Sinne von Abschnitt 1.2 sind (S. Satz 6.4.2). Die Lie-Algebra einer Lie-Gruppe  $G$  kann dann als Tangentialraum  $T_1G$  am Einselement  $1 \in G$  alternativ definiert werden:

LEMMA 6.3.2.  $\text{Lie}(G)$  besteht aus allen Tangentialvektoren  $\dot{X}(0) = \frac{d}{dt}X(t)|_{t=0}$  von glatten Kurven  $X: ]-\epsilon, \epsilon[ \rightarrow G$  mit  $X(0) = \mathbf{1}$  und  $\epsilon > 0$ .

BEWEIS. Einparametergruppen in  $G$  sind glatte Kurven durch  $\mathbf{1}$  also sind ihre infinitesimalen Erzeugenden Tangentialvektoren der verlangten Form. Umgekehrt müssen wir zeigen, dass  $\dot{X}(0) \in \text{Lie}(G)$  für jede glatte Kurve  $X: ]-\epsilon, \epsilon[ \rightarrow G$  mit  $X(0) = \mathbf{1}$ , also dass  $\exp(t\dot{X}(0)) \in G$  für alle  $t \in \mathbb{R}$ . Dafür betrachten für jedes feste  $t \in \mathbb{R}$  die Folge  $X(t/n)^n \in G$ . Für  $n \in \mathbb{N}$  gross genug ist  $X(t/n)$  definiert und nahe bei  $\mathbf{1}$  und somit im Definitionsbereich des Logarithmus. Es folgt

$$\begin{aligned} X(t/n)^n &= \exp(n \log(X(t/n))) \\ &= \exp\left(n \log\left(\mathbf{1} + \dot{X}(0)\frac{t}{n} + O(1/n^2)\right)\right) \\ &= \exp\left(n\left(\dot{X}(0)\frac{t}{n} + O(1/n^2)\right)\right) \\ &= \exp(t\dot{X}(0) + O(1/n)) \rightarrow \exp(t\dot{X}(0)), \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Da  $G$  abgeschlossen ist, liegt der Grenzwert in  $G$  also  $\exp(t\dot{X}(0)) \in G$ .  $\square$

Die Gruppen  $(S)U(n, m)$ ,  $(S)O(n, m)$ ,  $GL(n, \mathbb{K})$ ,  $SL(n, \mathbb{K})$ ,  $Sp(n)$ , sind alle Matrix-Lie-Gruppen. Sie werden nämlich als Mengen von gemeinsamen Nullstellen von stetigen Funktionen  $f: GL(n, \mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$  definiert, und sind deswegen abgeschlossen: Z. B. besteht  $SL(n, \mathbb{K})$  aus den Nullstellen der stetigen Funktion  $f(A) = \det(A) - 1$ . Ein Gegenbeispiel ist die nicht abgeschlossene Untergruppe  $GL(n, \mathbb{Q})$  von  $GL(n, \mathbb{R})$  der invertierbaren Matrizen mit rationalen Koeffizienten.

Wir definieren den *Kommutator* von  $X$  und  $Y \in \text{Mat}(n, \mathbb{K})$  durch

$$[X, Y] = XY - YX.$$

Folgende Eigenschaften sind leicht nachzuprüfen.

- (i)  $[\lambda X + \mu Y, Z] = \lambda[X, Z] + \mu[Y, Z]$ ,  $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$
- (ii)  $[X, Y] = -[Y, X]$
- (iii)  $[[X, Y], Z] + [[Z, X], Y] + [[Y, Z], X] = 0$  (Jacobi Identität).

DEFINITION 6.3.2. Ein reeller oder komplexer Vektorraum  $\mathfrak{g}$ , versehen mit einer Abbildung ("Lie-Klammer")  $[\cdot, \cdot]: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ , welche die Eigenschaften (i)-(iii) hat, heisst (reelle bzw. komplexe) *Lie-Algebra*. Ein *Homomorphismus*  $\varphi: \mathfrak{g}_1 \rightarrow \mathfrak{g}_2$  von Lie-Algebren  $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2$  ist eine lineare Abbildung, so dass  $[\varphi(X), \varphi(Y)] = \varphi([X, Y])$ . Bijektive Homomorphismen heissen Isomorphismen.

Also besagt Satz 6.3.1, dass  $\text{Lie}(G)$  die Struktur einer reellen Lie-Algebra hat.

BEISPIEL 6.3.1.  $\text{Lie}(GL(n, \mathbb{K})) = \text{Mat}(n, \mathbb{K})$  als reeller Vektorraum betrachtet. Diese Lie-Algebra wird mit  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$  bezeichnet. Eine Basis von  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$  ist durch die Matrizen  $E_{ij}$ ,  $i, j = 1, \dots, n$ , mit Matricelementen  $(E_{ij})_{kl} = \delta_{ik}\delta_{jl}$ . Die Lie-Algebra Struktur ist in dieser Basis durch die Kommutationsrelationen

$$[E_{ij}, E_{kl}] = E_{il}\delta_{jk} - E_{jk}\delta_{il}$$

gegeben. Die Dimension ist  $n^2$ . In  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$  hat man die Basis  $(E_{ij}, \sqrt{-1}E_{ij})_{i,j=1}^n$ .  $\dim \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) = 2n^2$ .

BEISPIEL 6.3.2.  $\mathfrak{u}(n) := \text{Lie}(U(n))$ ,  $\mathfrak{su}(n) := \text{Lie}(SU(n))$ .

LEMMA 6.3.3.

$$\begin{aligned} \mathfrak{u}(n) &= \{X \in \text{Mat}(n, \mathbb{C}) \mid X^* = -X\} \\ \mathfrak{su}(n) &= \{X \in \text{Mat}(n, \mathbb{C}) \mid X^* = -X, \text{tr} X = 0\}. \end{aligned}$$

BEWEIS. Sei  $X \in \mathfrak{u}(n)$ . Dann gilt für alle  $t \in \mathbb{R}$

$$(\exp(tX))^* \exp(tX) = \mathbf{1}.$$

Da  $(\exp(tX))^* = \exp(tX^*)$ , folgt nach Ableitung nach  $t$  an der Stelle 0

$$X + X^* = 0.$$

Ist  $X \in \mathfrak{su}(n)$  so ist zusätzlich  $1 = \det \exp(tX) = \exp(t \operatorname{tr} X)$  für alle  $t \in \mathbb{R}$ . Also  $\operatorname{tr} X = 0$ . Umgekehrt folgt aus  $X^* = -X$  und  $t \in \mathbb{R}$ ,  $(\exp(tX))^* \exp(tX) = \exp(-tX) \exp(tX) = \mathbf{1}$  und, falls  $\operatorname{tr} X = 0$ ,  $\det \exp(tX) = 1$ .  $\square$

Die Dimension des reellen Vektorraums  $\mathfrak{u}(n)$  (bzw.  $\mathfrak{su}(n)$ ) ist  $n^2$  bzw.  $n^2 - 1$ .

BEISPIEL 6.3.3.  $\mathfrak{o}(n) := \operatorname{Lie}(O(n))$ ,  $\mathfrak{so}(n) := \operatorname{Lie}(SO(n))$ . Ganz analog beweist man

LEMMA 6.3.4.

$$\mathfrak{o}(n) = \mathfrak{so}(n) = \{X \in \operatorname{Mat}(n, \mathbb{R}) \mid X^T = -X\}.$$

Beachte, dass Matrizen  $X$  mit  $X^T = -X$  verschwindende Diagonalelemente haben. Also ist die Bedingung  $\operatorname{tr} X = 0$  automatisch erfüllt. Die Dimension von  $\mathfrak{so}(n)$  ist  $\frac{1}{2}(n^2 - n)$ .

BEISPIEL 6.3.4.  $\mathfrak{sp}(2n) = \operatorname{Lie}(Sp(2n))$ . In geeigneter Basis ist  $\omega(x, y) = x^T J y$ , wobei  $J$  die Matrix

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{1} \\ \mathbf{1} & 0 \end{pmatrix}$$

ist ( $\mathbf{1}$  ist die  $n \times n$  Einheitsmatrix hier).

Also ist  $Sp(2n) = \{A \in \operatorname{Mat}(2n, \mathbb{R}) \mid A^T J A = J\}$  und es folgt  $\mathfrak{sp}(2n) = \{X \in \operatorname{Mat}(2n, \mathbb{R}) \mid X^T J + J X = 0\}$  Somit besteht  $\mathfrak{sp}(2n)$  aus allen Matrizen der Form

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & -A^T \end{pmatrix}, \quad B = B^T, \quad C = C^T$$

(Übung).

BEISPIEL 6.3.5.

5)  $\mathfrak{su}(2) = \{X \in \operatorname{Mat}(2, \mathbb{C}) \mid X + X^* = 0, \operatorname{tr} X = 0\}$ .

Eine Basis ist durch die Pauli Matrizen gegeben:

$$t_1 = i\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad t_2 = i\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad t_3 = i\sigma_3 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix},$$

und es gilt  $[t_j, t_k] = -\sum_{l=1}^3 2\epsilon_{jkl} t_l$ . Hier ist  $\epsilon_{123} = 1$  und  $\epsilon_{ijk}$  ist antisymmetrisch unter Vertauschungen der Indizes.

## 6.4. Die Campbell–Baker–Hausdorff Formel

Wir werden Satz 6.3.1 mit Hilfe der Campbell–Baker–Hausdorff Formel beweisen.

SATZ 6.4.1. (CBH) Seien  $X, Y \in \operatorname{Mat}(n, \mathbb{K})$ . Für  $t$  klein genug gilt

$$\exp(tX) \exp(tY) = \exp\left(tX + tY + \frac{t^2}{2}[X, Y] + O(t^3)\right).$$

BEWEIS. Für  $t$  klein ist  $\|\exp(tX)\exp(tY) - \mathbf{1}\| < 1$ . Also, nach Lemma 6.1.4,  $\exp(tX)\exp(tY) = \exp Z(t)$ , wobei  $Z(t) = \sum_{n=1}^{\infty} t^n Z_n$  eine für kleine  $t$  konvergente Reihe ist. Wir vergleichen Koeffizienten:

$$\begin{aligned}\exp(tX)\exp(tY) &= \left(\mathbf{1} + tX + \frac{t^2}{2}X^2 + \dots\right) \left(\mathbf{1} + tY + \frac{t^2}{2}Y^2 + \dots\right) \\ &= \mathbf{1} + t(X + Y) + \frac{t^2}{2}(X^2 + 2XY + Y^2) + \dots \\ \exp Z(t) &= \mathbf{1} + Z_1 t + \left(\frac{1}{2}Z_1^2 + Z_2\right)t^2 + \dots\end{aligned}$$

Also ist  $Z_1 = X + Y$ ,  $Z_2 = \frac{1}{2}(X^2 + 2XY + Y^2) - \frac{1}{2}(X + Y)^2 = \frac{1}{2}[X, Y]$ .  $\square$

BEMERKUNG 6.4.1. Man kann zeigen (und dies ist die vollständige Fassung des CBH Satzes), dass für kleine  $t$ ,  $\exp(tX)\exp(tY) = \exp(\sum_{k=1}^{\infty} t^k Z_k)$ , wobei  $Z_k$  eine Linearkombination von  $k$ -fachen Kommutatoren ist, d.h. von Ausdrücken, die aus  $X$  und  $Y$  durch  $(k-1)$ -fache Anwendung der Operatoren  $[X, \cdot]$ ,  $[Y, \cdot]$  erzeugt werden. Beispiele:

$$Z_3 = \frac{1}{12}([X, [X, Y]] + [Y, [Y, X]]), \quad Z_4 = -\frac{1}{24}[X, [Y, [X, Y]]].$$

Also bestimmt die Lie-Algebra die Gruppenmultiplikation in der Umgebung des Einselementes.

*Beweis von Satz 6.3.1:*

1)  $\text{Lie}(G)$  ist ein reeller Vektorraum.

Sei  $X \in \text{Lie}(G)$ . Dann ist auch nach Definition  $\lambda X \in \text{Lie}(G)$  für alle  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Seien  $X, Y \in \text{Lie}(G)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Wir zeigen, dass  $X + Y \in \text{Lie}(G)$ . Für  $n \rightarrow \infty$  gilt

$$\exp\left(\frac{1}{n}tX\right)\exp\left(\frac{1}{n}tY\right) = \exp\left(\frac{t}{n}(X + Y) + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right).$$

Mit  $(\exp A)^n = \exp(nA)$  folgt

$$\begin{aligned}A_n &= \left[\exp\left(\frac{1}{n}tX\right)\exp\left(\frac{1}{n}tY\right)\right]^n \\ &= \exp\left(t(X + Y) + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \exp(t(X + Y)).\end{aligned}$$

Die Folge  $A_n$  ist in  $G$  und konvergiert in  $GL(n, \mathbb{K})$  gegen  $\exp(t(X + Y))$ . Da  $G$  abgeschlossen ist, ist also  $\exp(t(X + Y)) \in G$ .

2)  $X, Y \in \text{Lie}(G) \Rightarrow [X, Y] \in \text{Lie}(G)$ .

Wir zeigen zuerst, dass  $\exp([X, Y]) \in G$ :

$$G \ni \exp\left(\pm\frac{1}{n}X\right)\exp\left(\pm\frac{1}{n}Y\right) = \exp\left(\pm\frac{1}{n}(X + Y) + \frac{1}{2n^2}[X, Y] + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)$$

und also

$$\begin{aligned}B_n &= \left[\exp\left(\frac{1}{n}X\right)\exp\left(\frac{1}{n}Y\right)\exp\left(-\frac{1}{n}X\right)\exp\left(-\frac{1}{n}Y\right)\right]^{n^2} \\ &= \left[\exp\left(\frac{1}{n}(X + Y) + \frac{1}{2n^2}[X, Y] - \frac{1}{n}(X + Y) + \frac{1}{2n^2}[X, Y] + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\right]^{n^2} \\ &= \exp\left([X, Y] + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \exp([X, Y]).\end{aligned}$$

Da  $B_n \in G$  für alle  $n$ , folgt  $\exp([X, Y]) = \lim_{n \rightarrow \infty} B_n \in G$ . Nach Ersetzen von  $X$  durch  $tX$  folgt dass auch  $\exp(t[X, Y]) \in G$  für alle  $t \in \mathbb{R}$ .

**SATZ 6.4.2.** (ohne Beweis) Sei  $G \subset GL(n, \mathbb{K})$  eine Matrix-Lie-Gruppe mit Lie-Algebra  $\mathfrak{g}$  und Exponentialabbildung  $\exp: \mathfrak{g} \rightarrow G$ . Dann gibt es eine offene Umgebung  $0 \in U \subset \mathfrak{g}$  von 0 und eine offene Umgebung  $\mathbf{1} \in V \subset G$  so dass  $\exp: U \rightarrow GL(n, \mathbb{K})$  eine glatte Einbettung ist mit  $\exp(U) = V$ .

Eine glatte Einbettung ist eine injektive glatte Abbildung deren Tangentialabbildung (Ableitung) in jedem Punkt injektiv ist. Dann ist für jedes  $g \in G$  die Abbildung  $\varphi_g: U \rightarrow G$ ,  $X \mapsto g \exp(X)$  ein Homöomorphismus  $U \rightarrow gV$  von  $U$  nach einer Umgebung von  $g$ . Die Abbildungen  $\varphi_g^{-1}$  sind dann Karten, die  $G$  als eine Mannigfaltigkeit definieren.

**SATZ 6.4.3.** Sei  $G \subset GL(n, \mathbb{K})$  eine Lie-Gruppe mit Lie-Algebra  $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$ . Die Gruppe aller Matrizen der Form

$$\exp(X_1) \cdots \exp(X_k), \quad X_1, \dots, X_k \in \mathfrak{g}, \quad k \geq 1,$$

ist die Zusammenhangskomponente von  $\mathbf{1} \in G$ .

**BEWEIS.** Das angegebene Produkt liegt auf der Kurve

$$t \mapsto \exp(tX_1) \cdots \exp(tX_k),$$

die für  $t = 0$  durch  $\mathbf{1}$  geht. Also ist es in der Zusammenhangskomponente von  $\mathbf{1}$ . Umgekehrt sei  $g$  in der Zusammenhangskomponente von  $\mathbf{1}$  und seien  $U, V$  wie im Satz 6.4.2. Dann gibt es eine stetige Kurve  $t \mapsto g(t)$  mit  $g(0) = \mathbf{1}$  und  $g(1) = g$ . Für jedes  $t \in [0, 1]$  sei  $U_t \subset [0, 1]$  ein offenes Intervall um  $t$ , so klein, dass  $g(U_t)$  in  $g(t)V$  enthalten ist. Die Mengen  $U_t$  bilden eine offene Überdeckung des kompakten Intervalls  $[0, 1]$ , die also eine endliche Teilüberdeckung  $U_{t_0} \cup \cdots \cup U_{t_k} \supset [0, 1]$  besitzt. Wir können annehmen, möglicherweise durch Hinzufügen endlich vieler zusätzlicher  $U_t$ , dass  $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = 1$  und  $t_i \in U_{t_{i+1}}$  für  $i = 1, \dots, k-1$ . Also ist  $g = g(1) \in g(t_{k-1})V$ . Das bedeutet dass  $g = g(t_{k-1}) \exp(X_k)$  für ein  $X_k \in \mathfrak{g}$ . Analog  $g(t_i) = g(t_{i-1}) \exp(X_i)$  für alle  $i = 1, \dots, k$  mit  $g(t_0) = \mathbf{1}$ . Es folgt:  $g = g(t_k) = \exp(X_1) \cdots \exp(X_k)$ .  $\square$

**BEISPIEL 6.4.1.**  $G = U(n)$ . Jede unitäre Matrix ist von der Form

$$U = A \operatorname{diag}(e^{i\varphi_1}, \dots, e^{i\varphi_n}) A^{-1}, \quad A \in U(n).$$

Also ist  $U = \exp(X)$ ,  $X = A \operatorname{diag}(i\varphi_1, \dots, i\varphi_n) A^{-1}$  und  $\exp(tX)$  ist eine Einparametergruppe in  $U(n)$ . Es folgt, dass  $\exp: \mathfrak{u}(n) \rightarrow U(n)$  surjektiv ist.

**BEMERKUNG 6.4.2.** Wir haben nur Matrix-Lie-Gruppen betrachtet aber was wir für Matrix-Lie-Gruppe gezeigt haben gilt auch für allgemeine Lie-Gruppen: Die Lie-Algebra  $\mathfrak{g}$  einer Lie-Gruppe ist, als Vektorraum, der Tangentialraum  $T_1G$  am Einselement. Um die Lie-Algebra-Struktur zu definieren wird  $T_1G$  mit der Lie-Algebra der linksinvarianten Vektorfelder identifiziert, wie wir im Folgenden kurz skizzieren.

Einem Vektorfeld  $X$  auf  $G$  ordnen wir seine Richtungsableitung  $X: C^\infty(G) \rightarrow C^\infty(G)$  zu, die wir ebenfalls mit  $X$  bezeichnen. Ist  $X(g) = \dot{\gamma}(0) \in T_gG$  der Tangentialvektor zu einer Kurve  $t \mapsto \gamma(t)$  in  $G$  mit  $\gamma(0) = g$ , so bildet die Richtungsableitung an der Stelle  $g$  eine Funktion  $f$  nach  $Xf(g) = \frac{d}{dt} f(\gamma(t))|_{t=0}$  ab. Die Lie-Klammer von Vektorfeldern  $X_1, X_2$  ist durch ihre Richtungsableitungen definiert  $[X_1, X_2]f = X_1X_2f - X_2X_1f$  und man verifiziert dass  $[X_1, X_2]$  tatsächlich die Richtungsableitung eines Vektorfelds ist. Sei für  $g \in G$ ,  $L_g: G \rightarrow G$  die Linksmultiplikation mit  $g$ :  $L_g(h) = gh$ . Ein Vektorfeld  $X$  auf  $G$  heisst linksinvariant falls  $(L_g)_*X(h) = X(gh)$  für alle  $g, h \in G$ . Hier ist  $(L_g)_*: T_hG \rightarrow T_{gh}G$  die Tangentialabbildung. Lie-Klammer von linksinvarianten Vektorfeldern sind linksinvariant, also bilden linksinvariante Vektorfelder eine Lie-Algebra  $\mathfrak{g}$ . Die Abbildung  $\mathfrak{g} \rightarrow T_1G$ ,  $X \mapsto X(\mathbf{1})$  ist ein linearer Isomorphismus mit inverser Abbildung

$a \mapsto (g \mapsto (L_g)_* a)$ . Zu einem Vektorfeld  $X$  auf einer Mannigfaltigkeit  $M$  definiert man den Fluss  $\varphi_t^X: M \rightarrow M$  zur Zeit  $t$ :  $\varphi_t^X(x)$  ist die eindeutige Lösung der Differentialgleichung  $\frac{d}{dt}\varphi_t^X(x) = X(\varphi_t^X(x))$ , mit Anfangsbedingung  $\varphi_0^X(x) = x$ , solange sie existiert. Die Exponentialabbildung  $\exp: \mathfrak{g} \rightarrow G$  wird als  $\exp(tX) = \varphi_t^X(1)$  definiert. Sie ist ein Diffeomorphismus von einer Umgebung von 0 nach einer Umgebung von  $1 \in G$  und sie erfüllt die CBH Formel.

Man kann zeigen, dass jede kompakte Lie-Gruppe isomorph zu einer Matrix-Lie-Gruppe ist. Isomorph bedeutet hier dass der Isomorphismus sowohl ein Diffeomorphismus wie auch ein Gruppenhomomorphismus ist. Bei allgemeinen Lie-Gruppen gilt immerhin dass sie lokal isomorph zu Matrix-Lie-Gruppen sind: Zu jeder Lie-Gruppe  $G$  gibt es einen differenzierbaren surjektiven Gruppenhomomorphismus  $G \rightarrow G_0 \subset GL(n, \mathbb{K})$  nach einer Matrix-Lie-Gruppe, der ein lokaler Diffeomorphismus ist.

## Darstellungen von Lie-Gruppen

Wir betrachten (stetige) Darstellungen von Lie-Gruppen. Diese induzieren Darstellungen von Lie-Algebren. Die Darstellungstheorie von Lie-Algebren liefert ein wichtiges Hilfsmittel, um Darstellungen von Lie-Gruppen zu konstruieren. So geben wir eine Klassifikation, bis auf Äquivalenz, aller irreduziblen Darstellungen von  $U(1)$  und  $SU(2)$ . Als Anwendungen betrachten wir Kugelfunktionen, d.h. Einschränkungen auf  $S^2$  von harmonischen Polynomen in drei Unbekannten, und zeigen dass sie irreduzible Darstellungen von  $SU(2)$  mit ungerader Dimension bilden; und wir zerlegen Tensorprodukte von  $SU(2)$ -Darstellungen in irreduzible Darstellungen.

Literatur:[4], [8]. Vertiefung: [7], [3], [9]

### 7.1. Definitionen

Unter einer Darstellung einer Lie- (oder allgemeiner einer topologischen) Gruppe  $G$  auf einem (reellen oder komplexen) endlichdimensionalen Vektorraum  $V \neq 0$  verstehen wir stets einen *stetigen* Homomorphismus  $\rho : G \rightarrow GL(V)$ . Stetigkeit bedeutet, dass die Matrixelemente von  $\rho(g)$  bezüglich einer beliebigen Basis stetig von  $g \in G$  abhängen.

Eine Darstellung heißt komplex oder reell wenn  $V$  ein komplexer bzw. reeller Vektorraum ist. Die *Dimension* einer Darstellung ist die Dimension des Darstellungsraums  $V$ .

Wenn nichts anderes vermerkt, werden alle betrachteten Darstellungen als komplex vorausgesetzt.

### 7.2. Beispiele

Die Gruppe  $U(1)$  aller komplexen Zahlen mit Betrag eins, ist eine kompakte abelsche Lie-Gruppe. Also ist jede Darstellung vollständig reduzibel. Die irreduziblen Darstellungen sind eindimensional.

**SATZ 7.2.1.** *Für jedes  $n \in \mathbb{Z}$  ist  $\rho_n : U(1) \rightarrow GL(\mathbb{C}) = \mathbb{C} - \{0\}$ ,  $z \mapsto z^n$  eine Darstellung von  $U(1)$ . Jede irreduzible Darstellung von  $U(1)$  ist äquivalent zu  $\rho_n$  für geeignetes  $n$ .*

Es ist klar, dass  $\rho_n$  eine stetige Abbildung von  $U(1)$  nach  $\mathbb{C} - \{0\}$  definiert. Die Darstellungseigenschaft folgt aus  $(zw)^n = z^n w^n$ .

Die Gruppe  $SU(2)$  der unitären  $2 \times 2$  Matrizen der Determinante eins ist ebenfalls kompakt aber nicht abelsch. Wir haben also wiederum vollständige Reduzibilität. Die irreduziblen Darstellungen werden wir klassifizieren, mit dem folgenden Resultat.

**SATZ 7.2.2.** *Für jedes  $n = 0, 1, 2, \dots$  existiert eine irreduzible Darstellung  $\rho_n : SU(2) \rightarrow GL(V_n)$  der Dimension  $n + 1$ . Jede irreduzible Darstellung von  $SU(2)$  ist äquivalent zu  $\rho_n$  für geeignetes  $n$ .*

Wir geben jetzt eine Konstruktion dieser Darstellungen. Wir werden ihre Irreduzibilität und die zweite Aussage dieses Satzes im Abschnitt 7.4 beweisen (Siehe Satz 7.4.6).

Diese Darstellungen werden auf Vektorräumen von homogenen Polynomen konstruiert. Ein Polynom  $p(z_1, \dots, z_N)$  in  $N$  Unbekannten heisst *homogen* vom Grade  $d \geq 0$  falls  $p(\lambda z_1, \dots, \lambda z_N) = \lambda^d p(z_1, \dots, z_N)$  für alle Skalare  $\lambda$ .

LEMMA 7.2.3. *Homogene Polynome vom Grade  $d$  in  $N$  Unbekannten bilden einen Vektorraum. Die Monome  $z_1^{j_1} \cdots z_N^{j_N}$  mit  $j_k \geq 0$  und  $\sum_k j_k = d$ , sind eine Basis dieses Vektorraums.*

BEWEIS. Es ist klar, dass jede Linearkombination von homogenen Polynomen vom Grad  $d$  wieder ein homogenes Polynom vom Grad  $d$  ist, also bilden diese Polynome einen Vektorraum. Monome  $z_1^{j_1} \cdots z_N^{j_N}$  sind linear unabhängig: verschwindet nämlich eine Linearkombination  $\sum a_{j_1 \dots j_N} z_1^{j_1} \cdots z_N^{j_N}$  identisch, so verschwinden auch alle partiellen Ableitungen an der Stelle 0, also auch alle Koeffizienten  $a_{j_1 \dots j_N}$ . Sei  $p$  homogen vom Grad  $d$ . Das Polynom  $p(\lambda z) - \lambda^d p(z)$  verschwindet, also müssen seine Koeffizienten für alle  $\lambda$  verschwinden. Daraus folgt, dass die Koeffizienten in  $p$  verschwinden, ausser diejenigen von  $z_1^{j_1} \cdots z_N^{j_N}$  mit  $\sum j_k = d$ . Also bilden diese Monome eine Basis.  $\square$

Sei  $V_n$  der  $(n+1)$ -dimensionale komplexe Vektorraum aller Polynome  $p(z_1, z_2)$  mit komplexen Koeffizienten in zwei Unbekannten, die homogen vom Grade  $n$  sind.

Für  $A \in SU(2)$  definieren wir  $\rho_n(A) : V_n \rightarrow V_n$  als die lineare Abbildung

$$(\rho_n(A)p)(z) = p(A^{-1}z), \quad z = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2.$$

Ist  $p$  ein Monom  $z_1^j z_2^{n-j}$  und  $A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ , so ist  $(\rho_n(A)p)(z_1, z_2) = (az_1 + bz_2)^j (cz_1 + dz_2)^{n-j}$ . Aus dieser Formel und dem Binomialsatz, ist es ersichtlich, dass  $\rho_n(A)p$  wieder ein homogenes Polynom vom Grad  $n$  ist. Also ist  $\rho_n$  eine Darstellung von  $SU(2)$  auf  $V_n$ .

BEMERKUNG 7.2.1. Allgemeiner können wir Darstellungen von  $SU(N)$  auf dem Raum der homogenen Polynome in  $N$  Unbekannten vom Grad  $d$  konstruieren. Es stellt sich heraus, dass diese Darstellungen ebenfalls irreduzibel sind, aber es gibt auch andere, nicht äquivalente, Darstellungen von  $SU(N)$  wenn  $N \geq 3$ .

BEMERKUNG 7.2.2. Die Darstellung  $\rho_{2j}$  ( $j = 0, 1/2, 1, 3/2, \dots$ ) heisst Spin  $j$  Darstellung in der physikalischen Literatur.

BEMERKUNG 7.2.3. Es gilt:  $\rho_n(-A) = (-1)^n \rho_n(A)$ . Also definiert für  $n$  gerade, und nur dann,  $\rho_n$  eine Darstellung von  $SU(2)/\{\pm 1\} \cong SO(3)$ .

### 7.3. Darstellungen von Lie-Algebren

LEMMA 7.3.1. *Sei  $\rho : G \rightarrow GL(V)$  eine Darstellung einer Lie-Gruppe  $G$ . Dann bildet  $\rho$  Einparametergruppen nach Einparametergruppen ab.*

BEWEIS. Es folgt unmittelbar aus der Darstellungseigenschaft, dass für jede Einparametergruppe  $\phi_t, \psi_t := \rho(\phi_t) \in GL(V)$  die Eigenschaft  $\psi_t \psi_s = \psi_{t+s}$  besitzt. Da  $\rho$  stetig ist, hängt auch  $\psi_t$  stetig von  $t$  ab. Es bleibt zu zeigen, dass  $\psi_t$  nach  $t$  stetig differenzierbar ist. Es genügt zu zeigen, dass  $\psi_t$  an der Stelle 0 differenzierbar ist: Existiert nämlich die Ableitung  $\dot{\psi}_0$  an der Stelle 0, so existiert auch der Limes in  $GL(V)$

$$\frac{d}{dt} \psi_t = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\psi_{t+h} - \psi_t}{h} = \psi_t \frac{\psi_h - 1}{h} = \psi_t \dot{\psi}_0,$$

und hängt stetig von  $t$  ab.

Da  $\psi_t$  stetig von  $t$  abhängt ist für kleine  $t$   $\psi_t$  nahe zur Einheitsmatrix. Also existiert eine stetige  $\mathfrak{gl}(V)$ -wertige Funktion  $a_t = \log \psi_t$  mit  $a_0 = 0$  so, dass  $\psi_t =$

$\exp(a_t)$ . Da  $\psi_t\psi_s = \psi_{t+s} = \psi_s\psi_t$ , haben wir  $\exp(a_t)\exp(a_s) = \exp(a_t + a_s)$ . Also gilt  $a_s + a_t = a_{s+t}$  für alle kleine  $t, s$ . Insbesondere gilt  $a_{nt} = na_t$  für  $n = 1, 2, \dots$  und  $t$  klein. Also für alle kleine rationale Zahlen  $r = p/q$  und  $\epsilon$  erhält man  $qa_{\epsilon p/q} = a_{\epsilon p} = pa_\epsilon$ , und  $a_{r\epsilon} = ra_\epsilon$ . Setzt man  $a = \epsilon^{-1}a_\epsilon$ , so gilt dann  $a_{r\epsilon} = r\epsilon a$  für alle kleinen rationalen, und wegen der Stetigkeit für alle kleinen reellen  $r$ . Es folgt dass  $a_t = ta$  und  $\psi_t = \exp(ta)$  für kleine  $t$ . Also ist  $\psi_t$  tatsächlich differenzierbar an der Stelle 0.  $\square$

Sei  $\rho : G \rightarrow GL(V)$  eine Darstellung und  $X \in \text{Lie}(G)$ . Definiere

$$\rho_*(X) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \rho(\exp tX) \in \text{Lie}(GL(V)) = \mathfrak{gl}(V).$$

$\rho_*$  ist eine Abbildung  $\text{Lie}(G) \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ .

LEMMA 7.3.2.

- (i)  $\rho(\exp tX) = \exp(t\rho_*(X))$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ,  $X \in \text{Lie}(G)$ ,
- (ii)  $\rho_*(\lambda X + \mu Y) = \lambda\rho_*(X) + \mu\rho_*(Y)$ ,  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ,  $X, Y \in \text{Lie}(G)$ ,
- (iii)  $\rho_*([X, Y]) = [\rho_*(X), \rho_*(Y)]$ ,  $X, Y \in \text{Lie}(G)$ .

BEWEIS. (i) Aus Lemma 7.3.1 folgt, dass  $\rho(\exp tX)$  die Form  $\exp(tY)$ ,  $Y \in \mathfrak{gl}(V)$  hat. Die Behauptung folgt durch Differenzieren nach  $t$  an der Stelle 0.

(ii) Sei  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $X \in \text{Lie}(G)$ . Es gilt

$$\exp(t\rho_*(\lambda X)) = \rho(\exp t\lambda X) = \exp(t\lambda\rho_*(X)).$$

Also  $\rho_*(\lambda X) = \lambda\rho_*(X)$ . Für  $X, Y \in \text{Lie}(G)$  hat man

$$\begin{aligned} \exp(t(\rho_*(X) + \rho_*(Y))) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \exp\left(\frac{t}{n}\rho_*(X)\right) \exp\left(\frac{t}{n}\rho_*(Y)\right) \right]^n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \rho \left( \left[ \exp\left(\frac{t}{n}X\right) \exp\left(\frac{t}{n}Y\right) \right]^n \right) \\ &= \rho(\exp t(X + Y)) = \exp(t\rho_*(X + Y)). \end{aligned}$$

(iii) wird analog bewiesen. Details als Übung.  $\square$

DEFINITION 7.3.1. Sei  $\mathfrak{g}$  eine Lie-Algebra über  $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$ . Eine *Darstellung* von  $\mathfrak{g}$  auf einem Vektorraum  $V \neq \{0\}$  ist eine  $\mathbb{R}$ - (bzw.  $\mathbb{C}$ -) lineare Abbildung  $\tau : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ , so dass

$$[\tau(X), \tau(Y)] = \tau([X, Y]).$$

Invariante Unterräume, Irreduzibilität und vollständige Reduzibilität werden genau wie bei Gruppen definiert.

Darstellungen heissen komplex bzw. reell je nach dem ob  $V$  komplex oder reell ist.

SATZ 7.3.3. Sei  $\rho : G \rightarrow GL(V)$  eine Darstellung der Lie-Gruppe  $G$ . Dann ist  $\rho_*$  eine Darstellung der reellen Lie-Algebra  $\text{Lie}(G)$ . Die Einschränkung von  $\rho$  auf die Einskomponente  $G_0$  von  $G$  ist eindeutig durch  $\rho_*$  bestimmt.

BEWEIS. Noch zu beweisen ist die letzte Aussage. Nach Satz 6.4.3 ist jedes  $g \in G_0$  von der Form  $\exp X_1 \cdots \exp X_n$ . Also kann  $\rho$  auf  $G_0$  durch  $\rho_*$  ausgedrückt werden:

$$\rho(\exp X_1 \cdots \exp X_n) = \exp \rho_*(X_1) \cdots \exp \rho_*(X_n). \quad (*)$$

$\square$

SATZ 7.3.4. Sei  $\rho : G \rightarrow GL(V)$  eine Darstellung einer zusammenhängenden Lie-Gruppe  $G$ . Dann ist  $\rho$  genau dann irreduzibel (bzw. vollständig reduzibel) wenn  $\rho_*$  irreduzibel (bzw. vollständig reduzibel) ist.

BEWEIS. Ist  $W \subset V$  invariant für  $\rho$ , so ist für alle  $t \in \mathbb{R}$ ,  $X \in \text{Lie}(G)$ ,  $\rho(\exp tX)W \subset W$ , also auch  $\rho_*(X)W \subset W$ . Umgekehrt, wenn  $W \subset V$  invariant für  $\rho_*$  ist, so ist  $W$  nach (\*) auch für  $\rho$  invariant. Also stimmen invariante Unterräume von  $\rho$ ,  $\rho_*$  überein, und die Behauptung folgt.  $\square$

BEISPIEL 7.3.1. Triviale Darstellung:  $V = \mathbb{C}$ ,  $\rho_*(X) = 0 \forall X \in \mathfrak{g}$ .

BEISPIEL 7.3.2. Adjungierte Darstellung. Sei  $\text{Ad} : G \rightarrow GL(\mathfrak{g})$ ,

$$\text{Ad}(g)X = gXg^{-1},$$

die adjungierte Darstellung von  $G$  auf  $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$ . Die adjungierte Darstellung von  $\mathfrak{g}$  ist  $\text{ad} = \text{Ad}_*$ :

$$\text{ad}(X)Y = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \exp(tX)Y \exp(-tX) = [X, Y].$$

Diese reelle Darstellung spielt eine wichtige Rolle in der Physik der fundamentalen Wechselwirkungen (Eichbosonen) und in der Lie Theorie: hat eine endlichdimensionale Lie-Algebra triviales Zentrum (d.h.  $\text{ad}(X) = 0 \Rightarrow X = 0$ ), so kann man zeigen, dass  $\text{Int}(\mathfrak{g}) = \{\exp(\text{ad}(X_1)) \cdots \exp(\text{ad}(X_n))\} \subset GL(\mathfrak{g})$  eine Lie-Gruppe ist, deren Lie-Algebra mit  $\mathfrak{g}$  übereinstimmt.

#### 7.4. Irreduzible Darstellungen von $SU(2)$

Wir klassifizieren alle endlichdimensionalen irreduziblen Darstellungen der kompakten Lie-Gruppe  $SU(2)$  bis auf Äquivalenz. Da  $SU(2)$  zusammenhängend ist, ist jede Darstellung durch eine Darstellung von  $\mathfrak{su}(2)$  bestimmt. Wir fassen dann  $\mathfrak{su}(2)$  als Lie-Unteralgebra von  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  auf und reduzieren das Problem auf die Klassifikation der Darstellungen von  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ . Diesen Übergang zum Komplexen formulieren wir etwas allgemeiner: wir betrachten  $\mathfrak{su}(n) = \{X \in \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}) \mid X^* = -X\}$ .

LEMMA 7.4.1.

- (i) Jedes  $Z \in \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$  kann eindeutig als  $Z = X + iY$ ,  $X, Y \in \mathfrak{su}(n)$ , geschrieben werden.
- (ii) Sei  $\tau$  eine Darstellung von  $\mathfrak{su}(n)$  auf  $V$ . Dann definiert

$$\tau_{\mathbb{C}}(X + iY) = \tau(X) + i\tau(Y)$$

eine ( $\mathbb{C}$ -lineare) Darstellung der Lie-Algebra  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ , deren Einschränkung auf  $\mathfrak{su}(n)$  mit  $\tau$  übereinstimmt.

- (iii)  $\tau_{\mathbb{C}}$  ist genau dann irreduzibel (vollständig reduzibel) wenn  $\tau$  irreduzibel (vollständig reduzibel) ist.

BEWEIS. (i)  $X = \frac{1}{2}(Z - Z^*)$ ,  $Y = \frac{1}{2i}(Z + Z^*)$ .

(ii) Zuerst zeigen wir die  $\mathbb{C}$ -Linearität von  $\tau_{\mathbb{C}}$ . Es ist klar, dass für  $\lambda, \mu$  reell und  $Z, W \in \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ ,  $\tau_{\mathbb{C}}(\lambda Z + \mu W) = \lambda \tau_{\mathbb{C}}(Z) + \mu \tau_{\mathbb{C}}(W)$ . Es bleibt zu zeigen, dass  $\tau_{\mathbb{C}}(iZ) = i\tau_{\mathbb{C}}(Z)$ .

$$\tau_{\mathbb{C}}(i(X + iY)) = \tau_{\mathbb{C}}(-Y + iX) = -\tau(Y) + i\tau(X) = i\tau_{\mathbb{C}}(X + iY).$$

Somit ist  $\tau_{\mathbb{C}}$  eine  $\mathbb{C}$ -lineare Abbildung. Es ist klar, dass  $\tau_{\mathbb{C}}(X) = \tau(X)$  wenn  $X \in \mathfrak{su}(2)$ . Also haben wir die Darstellungseigenschaft  $[\tau_{\mathbb{C}}(X), \tau_{\mathbb{C}}(Y)] = \tau_{\mathbb{C}}([X, Y])$  für  $X, Y \in \mathfrak{su}(2)$ . Aus der  $\mathbb{C}$ -Linearität von  $\tau_{\mathbb{C}}$  und der  $\mathbb{C}$ -Bilinearität des Kommutators  $(X, Y) \mapsto XY - YX$  folgt, dass die Darstellungseigenschaft auch auf ganz  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  gilt.

(iii) Ist  $W \subset V$  invariant für  $\tau_{\mathbb{C}}$ , dann ist  $W$  insbesondere invariant für  $\tau = \tau_{\mathbb{C}}|_{\mathfrak{su}(n)}$ . Ist umgekehrt  $W$  invariant für  $\tau$  so gilt für  $w \in W$

$$\tau_{\mathbb{C}}(X + iY)w = \tau(X)w + i\tau(Y)w \in W,$$

also ist  $W$  invariant für  $\tau_{\mathbb{C}}$ .  $\square$

Die Darstellung  $\tau_{\mathbb{C}}$  heisst *Komplexifizierung* von  $\tau$ . Oft werden wir zur Vereinfachung der Notation  $\tau$  statt  $\tau_{\mathbb{C}}$  schreiben.

Wir klassifizieren die endlichdimensionalen irreduziblen komplexen  $\mathbb{C}$ -linearen Darstellungen von  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) = \{X \in \text{Mat}(2, \mathbb{C}) \mid \text{tr}X = 0\}$ . Eine Basis von  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  ist

$$h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

LEMMA 7.4.2.  $[h, e] = 2e$ ,  $[h, f] = -2f$ ,  $[e, f] = h$ .

Ist also  $(\tau, V)$  eine  $\mathbb{C}$ -lineare Darstellung von  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ , so erfüllen  $H = \tau(h)$ ,  $E = \tau(e)$ ,  $F = \tau(f)$  die Relationen von Lemma 7.4.2. Umgekehrt folgt aus der Bilinearität des Kommutators, dass wenn  $H, E, F$  lineare Selbstabbildungen eines Vektorraums sind, die die obigen Relationen erfüllen, dann definiert  $\tau(ah + be + cf) = aH + bE + cF$ ,  $(a, b, c \in \mathbb{C})$  eine  $\mathbb{C}$ -lineare Darstellung von  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ . Also gilt:

KOROLLAR 7.4.3. Ist  $\tau: \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$  eine  $\mathbb{C}$ -lineare Darstellung, so erfüllen

$$(7.1) \quad H = \tau(h), \quad E = \tau(e), \quad F = \tau(f),$$

die Relationen

$$(7.2) \quad [H, E] = 2E, \quad [H, F] = -2F, \quad [E, F] = H.$$

Umgekehrt, sind  $H, E, F$  lineare Selbstabbildungen eines komplexen Vektorraums  $V$ , die (7.2) erfüllen, so existiert eine eindeutige  $\mathbb{C}$ -lineare Darstellung  $\tau: \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ , so dass (7.1) gilt.<sup>1</sup>

Sei  $(\tau, V)$  eine irreduzible Darstellung von  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  und  $\lambda \in \mathbb{C}$  der Eigenwert von  $H$  mit grösstem Realteil,  $v_0$  ein Eigenvektor zu  $\lambda$

$$Hv_0 = \lambda v_0, \quad v_0 \neq 0.$$

LEMMA 7.4.4.

- (i)  $Ev_0 = 0$ .
- (ii) Sei  $v_k = F^k v_0$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} Hv_k &= (\lambda - 2k)v_k, \\ Ev_k &= k(\lambda - k + 1)v_{k-1}. \end{aligned}$$

BEWEIS. (i) Sei  $w = Ev_0$ ; wir zeigen, dass  $Hw = (\lambda + 2)w$ , woraus folgt, dass  $w = 0$ , denn  $\text{Re}(\lambda + 2) > \text{Re}\lambda$ .

$$Hw = HEv_0 = [H, E]v_0 + EV_0 = 2Ev_0 + \lambda Ev_0 = (\lambda + 2)w.$$

(ii) Induktionsverankerung:

$$Hv_0 = \lambda v_0, \quad Ev_0 = 0.$$

Induktionsschritt:

$$\begin{aligned} Hv_{k+1} &= HFv_k = [H, F]v_k + FHv_k \\ &= -2v_{k+1} + (\lambda - 2k)v_{k+1}, \\ Ev_{k+1} &= EFv_k = [E, F]v_k + FEv_k \\ &= Hv_k + Fk(\lambda - k + 1)v_{k-1} \\ &= [(\lambda - 2k) + k(\lambda - k + 1)]v_k \\ &= (k + 1)(\lambda - k)v_k. \end{aligned}$$

<sup>1</sup>Notation in der physikalischen Literatur:  $h = 2\sigma_3, e = \sigma_+, f = \sigma_-, H = 2J_3, E = J_+, F = J_-$ .

□

Es folgt, dass die lineare Hülle von  $v_0, v_1, v_2, \dots$  ein invarianter Unterraum  $\neq \{0\}$  ist, also gleich  $V$ . Die Vektoren  $v_0, v_1, \dots$  sind linear unabhängig, denn sie gehören zu verschiedenen Eigenwerten von  $H$ . Also ist  $V$  nur dann endlichdimensional, wenn ein  $n \geq 0$  existiert mit  $v_{n+1} = 0$ . Sei  $v_{n+1} = 0$ , und  $v_m \neq 0$  für  $m \leq n$ . Dann ist

$$0 = Ev_{n+1} = (n+1)(\lambda - n)v_n.$$

Das ist nur möglich wenn  $\lambda = n = 0, 1, 2, \dots$

SATZ 7.4.5. Sei  $n = 0, 1, 2, \dots$  und  $v_0, \dots, v_n$  die Standardbasis von  $V_n = \mathbb{C}^{n+1}$ . Dann definiert

$$\begin{aligned} Hv_m &= (n - 2m)v_m, \\ Ev_m &= m(n + 1 - m)v_{m-1}, \\ Fv_m &= v_{m+1}, \end{aligned}$$

eine irreduzible Darstellung  $\tau_n$  von  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ . Jede komplexe  $(n + 1)$ -dimensionale irreduzible Darstellung von  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  ist äquivalent zu  $\tau_n$ .

BEWEIS. Man verifiziert durch explizite Rechnung, dass  $\tau_n$  eine Darstellung definiert, z.B.:

$$\begin{aligned} [E, F]v_m &= [(m+1)(n-m) - m(n+1-m)]v_m \\ &= (n-2m)v_m \\ &= Hv_m. \end{aligned}$$

Irreduzibilität: Sei  $W \subset V$  invariant,  $W \neq 0$ . Dann hat  $H|_W$  einen Eigenvektor  $v_m$ . Da  $m(n+1-m)$  nur für  $m=0$  verschwindet ( $m \in \{0, \dots, n\}$ ), kann  $v_{m'}$  für alle  $m'$  durch Anwendung von  $E$  oder  $F$  aus  $v_m$  gewonnen werden. Also  $W = V$ . dass jede irreduzible Darstellung diese Form hat folgt aus den vorherigen Überlegungen. □

BEMERKUNG 7.4.1. Die Operatoren  $E, F$  werden oft Auf- und Absteigeoperatoren genannt.

Wir zeigen nun, dass alle so konstruierten Darstellungen aus Darstellungen von  $SL(2, \mathbb{C})$  kommen. Sei  $U_n$  der Raum aller homogenen Polynome in zwei Variablen  $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$  vom Grade  $n$ .  $U_n$  hat Dimension  $n+1$  mit Basis

$$z_1^n, z_1^{n-1}z_2, \dots, z_1z_2^{n-1}, z_2^n$$

. Wir führen die Darstellung von  $SL(2, \mathbb{C})$

$$(\rho_n(A)p)(z) = p(A^{-1}z), \quad A \in SL(2, \mathbb{C}), \quad p \in U_n,$$

ein, wobei zu beachten ist, dass mit  $p(z)$  auch  $p(A^{-1}z)$  in  $U_n$  ist, denn  $p(A^{-1}\lambda z) = p(\lambda A^{-1}z) = \lambda^n p(A^{-1}z)$ . Wir berechnen  $\rho_{n*} : \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \rightarrow \mathfrak{gl}(U_n)$

$$\begin{aligned} (\rho_{n*}(h)p)(z) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \rho \left( \exp t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right) p(z) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} p \left( \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix} z \right) \\ &= \left( -z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + z_2 \frac{\partial}{\partial z_2} \right) p(z), \\ (\rho_{n*}(e)p)(z) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} p \left( \exp \left( -t \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) z \right) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} p \left( \begin{pmatrix} 1 & -t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} z \right) \\ &= -z_2 \frac{\partial}{\partial z_1} p(z), \\ (\rho_{n*}(f)p)(z) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} p \left( \exp \left( -t \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) z \right) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} p \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -t & 1 \end{pmatrix} z \right) \\ &= -z_1 \frac{\partial}{\partial z_2} p(z). \end{aligned}$$

Wir sehen, dass diese Darstellung äquivalent zur Darstellung  $\tau_n$  von Satz 7.4.5 ist. Der Isomorphismus ist  $v_m \mapsto (-1)^m z_1^m z_2^{n-m} / (n-m)!$ . Also ist nach Lemma 7.4.1 die Einschränkung von  $\rho_n$  auf  $SU(2) \subset SL(2, \mathbb{C})$  irreduzibel.

Zur Diskussion der Unitarität, ist es zweckmässig die Basis  $v_m$  zu reskalieren.

Sei

$$u_m = \lambda_m v_m$$

mit  $\lambda_{m-1}/\lambda_m = \sqrt{m(n+1-m)}$ . Dann hat man

$$\begin{aligned} Hu_m &= (n-2m)u_m, \\ Eu_m &= \sqrt{m(n+1-m)}u_{m-1}, \\ Fu_{m-1} &= \sqrt{m(n+1-m)}u_m, \end{aligned}$$

und es gilt offensichtlich  $H^* = H$  und  $E^* = F$ , wobei  $*$  bezüglich des Skalarproduktes definiert ist, in dem  $(u_i)$  eine orthonormierte Basis ist. Allgemeiner gilt dann  $\rho_n(X)^* = \rho_n(X^*)$  für  $X \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  und speziell  $\rho_{n*}(X)^* = -\rho_{n*}(X)$  für  $X \in \mathfrak{su}(2)$ . Es folgt, dass  $\rho_n$  eine unitäre Darstellung von  $SU(2)$  ist. Eine mögliche Wahl von  $\lambda_m$  ist  $\lambda_m = \sqrt{\frac{(n-m)!}{m!}}$ . Wir fassen zusammen.

**SATZ 7.4.6.** *Zu jedem  $n = 0, 1, 2, \dots$  gibt es bis auf Äquivalenz genau eine irreduzible Darstellung  $(\rho_n, U_n)$  von  $SU(2)$  der Dimension  $n+1$ . Dabei ist*

$$U_n = \left\{ \sum_{m=0}^n c_m z_1^m z_2^{n-m} \mid c_m \in \mathbb{C} \right\}$$

der Raum der homogenen Polynome vom Grade  $n$  in zwei Unbekannten, und für  $A \in SU(2)$ ,  $f \in U_n$

$$(\rho_n(A)f)(z) = f(A^{-1}z).$$

$\rho_n$  ist unitär bezüglich des Skalarproduktes in dem die Basis

$$\frac{z_1^m z_2^{n-m}}{\sqrt{m!(n-m)!}}$$

orthonormiert ist.

**BEMERKUNG 7.4.2.** Das Skalarprodukt ist durch die Unitarität der Darstellung bis auf eine positive Normierungskonstante eindeutig bestimmt. Da  $H^* = H$ , ist nämlich  $(v_m, v_{m'}) = 0$  für  $m \neq m'$ , da  $v_m, v_{m'}$  zu verschiedenen Eigenwerten gehören. Zudem ist wegen  $(v_{m+1}, v_{m+1}) = (Fv_m, v_{m+1}) = (v_m, Ev_{m+1}) = (m+1)(n-m)(v_m, v_m)$ ,  $(\cdot, \cdot)$  eindeutig durch  $(v_0, v_0)$  bestimmt.

BEMERKUNG 7.4.3. Jeder Darstellung  $\rho$  von  $SO(3)$  auf  $V$  ist eine Darstellung  $\rho \circ \varphi$  von  $SU(2)$  zugeordnet, wobei  $\varphi : SU(2) \rightarrow SO(3)$  der in I.3 definierte Homomorphismus ist. Die Darstellung  $\rho \circ \varphi$  hat die Eigenschaft  $\rho \circ \varphi(-1) = \mathbf{1}$ , da  $-1 \in \text{Ker}\varphi$ . Umgekehrt ist für jede Darstellung  $\rho$  von  $SU(2)$  mit  $\rho(-1) = \mathbf{1}$ ,

$$\tilde{\rho}(R) = \rho(A), \quad R \in SO(3),$$

wobei  $\varphi(A) = R$  unabhängig von der Wahl von  $A$  (denn  $\rho(-A) = \rho(A)$ ) ist, und eine Darstellung  $\tilde{\rho}$  von  $SO(3)$  definiert, die  $\tilde{\rho} \circ \varphi = \rho$  erfüllt. Also sind die Darstellungen von  $SO(3)$  in eindeutiger Beziehung zu Darstellungen von  $SU(2)$  mit  $\rho(-1) = \mathbf{1}$ . Es ist leicht nachzuweisen, dass irreduzible Darstellungen von  $SU(2)$  irreduziblen Darstellungen von  $SO(3)$  entsprechen. Aus

$$(\rho_n(-1)f)(z) = f(-z) = (-1)^n f(z)$$

folgt, dass nur irreduzible Darstellungen von  $SU(2)$  mit *ungerader* Dimension  $SO(3)$  Darstellungen definieren.

### 7.5. Harmonische Polynome und Kugelfunktionen

Sei  $H_l$  der Raum der homogenen Polynome der Ordnung  $l$  in drei Unbekannten  $x_1, x_2, x_3$ :

$$H_l = \left\{ \sum_{\substack{|\alpha|=l \\ \alpha \in \mathbb{N}^3}} c_\alpha x^\alpha, c_\alpha \in \mathbb{C} \right\}.$$

Der Vektorraum  $H_l$  hat Dimension  $\dim H_l = \frac{1}{2}(l+1)(l+2) = \sum_{\alpha_1=0}^l \sum_{\alpha_2=0}^{l-\alpha_1} 1$ . Ist  $P(x) \in H_l$  so auch  $P(R^{-1}x)$  für alle  $R \in SO(3)$ . Wir haben also die Darstellung von  $SO(3)$  auf  $H_l$

$$(\rho(R)f)(x) = f(R^{-1}x).$$

LEMMA 7.5.1.

$$(f, g) = \int_{|x|=1} \overline{f(x)} g(x) d\Omega(x)$$

ist ein Skalarprodukt auf  $H_l$ . Die Darstellung  $\rho$  ist unitär bezüglich  $(\ , \ )$ .

BEWEIS. Die Axiome des Skalarproduktes sind bis auf  $(f, f) = 0 \Rightarrow f = 0$  offensichtlich. Aber aus  $(f, f) = 0$  folgt, dass  $f(x) = 0$  für  $|x| = 1$ , und mit  $f(rx) = r^l f(x)$  für alle  $x$ . Die Unitarität folgt durch Variablensubstitution unter Verwendung der Rotationsinvarianz von  $d\Omega$ . Expliziter sieht man dies aus der Darstellung

$$(f, g) = \frac{1}{(2l+2)!} \int_{\mathbb{R}^3} \overline{f(x)} g(x) e^{-|x|} dx.$$

□

Der Laplaceoperator  $\Delta = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$  bildet  $H_l$  ab nach  $H_{l-2}$ . Definiere den Raum

$$V_l = \{f \in H_l \mid \Delta f = 0\}$$

der *harmonischen Polynome* in  $H_l$ . Die Dimension von  $V_l$  erfüllt

$$\dim V_l \geq \dim H_l - \dim H_{l-2} = 2l + 1.$$

**Beispiele:**  $1, x_1, x_2, x_3, x_1x_2, x_1x_3, x_2x_3, \dots, (x_1 + ix_2)^l, (x_1 - ix_2)^l$ .

Die Räume  $r^{2k}V_{l-2k} = \{r^{2k}f \mid f \in V_{l-2k}\}$ ,  $k = 0, 1, \dots, [l/2]$ , sind Unterräume von  $H_l$ , denn aus  $f \in H_{l-2k}$  folgt  $r^{2k}f = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^k f \in H_l$ .

SATZ 7.5.2. *Es gilt die Zerlegung*

$$H_l = \bigoplus_{k=0}^{\lfloor l/2 \rfloor} r^{2k} V_{l-2k}$$

in paarweise orthogonale, invariante Unterräume, und  $\dim V_l = 2l + 1$ .

BEWEIS. Orthogonalität: Seien

$$f(x) = r^{l-2k} \tilde{f}(\vartheta, \varphi) \in V_{l-2k} \quad \text{und} \quad g(x) = r^{l-2k'} \tilde{g}(\vartheta, \varphi) \in V_{l-2k'}.$$

Mit der Green'schen Identität hat man

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{|x| \leq 1} (\Delta \bar{f} g - \bar{f} \Delta g) d^3 x = \int_{|x|=1} \left( \frac{\partial \bar{f}}{\partial r} g - \bar{f} \frac{\partial g}{\partial r} \right) d\Omega \\ &= (2k - 2k') \int_{|x|=1} \bar{f} \tilde{g} d\Omega. \end{aligned}$$

Also  $(r^{2k} f, r^{2k'} g) = 0$  falls  $k \neq k'$ .

Invarianz: Da  $r^{2k}$  rotationsinvariant ist, genügt es zu zeigen, dass  $V_l$  für alle  $l$  invariant ist, d.h.  $\Delta f = 0 \Rightarrow \Delta \rho(R)f = 0$ . Es gilt sogar

$$\Delta \rho(R)f = \rho(R)\Delta f.$$

Es ist nämlich

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} (f(R^{-1}x)) &= \sum_{j=1}^3 (R^{-1})_{ji} \frac{\partial f}{\partial x_j} (R^{-1}x) \\ \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} (f(R^{-1}x)) &= \sum_{i,j,k=1}^3 (R^{-1})_{ji} R_{ik} \frac{\partial f}{\partial x_k \partial x_j} (R^{-1}x) = (\Delta f)(R^{-1}x), \end{aligned}$$

da  $R^{-1} = R^T$ .

Zerlegung:

$$\dim H_l = \frac{1}{2}(l+1)(l+2) \geq \sum_{k=0}^{\lfloor l/2 \rfloor} \dim V_{l-2k} \geq \sum_{k=0}^{\lfloor l/2 \rfloor} (2(l-2k)+1) = \frac{1}{2}(l+1)(l+2).$$

Daraus folgt, dass  $\dim V_l = 2l + 1$  und die Zerlegung von  $H_l$ .  $\square$

Es soll weiter die Darstellung von  $SO(3)$  auf  $V_l$  untersucht werden. Diese Darstellung definiert eine Darstellung  $\rho$  von  $SU(2)$ , wie in der Bemerkung angedeutet:

$$(\rho(A)u)(x) = \mathbf{u}(\varphi(A)^{-1}x), \quad u \in V_l, \quad A \in SU(2),$$

und  $\varphi(\exp(-i \sum_{j=1}^3 \sigma_j n_j \vartheta/2)) = R(n, \vartheta)$ ,  $|n| = 1$ . Wir berechnen die entsprechende Lie-Algebra Darstellung. Sei  $X = \sum_j \alpha_j (-i\sigma_j) \in \mathfrak{su}(2)$ :

$$X = \begin{pmatrix} -i\alpha_3 & -i\alpha_1 - \alpha_2 \\ -i\alpha_1 + \alpha_2 & i\alpha_3 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}^3.$$

Sei  $\alpha = n\vartheta/2$  mit  $|n| = 1$ . Dann ist

$$\begin{aligned} (\tau(X)u)(x) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} u(R(n, t\vartheta)^{-1}x), \\ R(n, \vartheta)^{-1}x &= R(n, -\vartheta)x = (x \cdot n)n + (x - (x \cdot n)) \cos \vartheta - n \wedge x \sin \vartheta, \\ \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} R(n, t\vartheta)^{-1}x &= -n \wedge x \vartheta = -2\alpha \wedge x, \end{aligned}$$

und es folgt nach der Kettenregel

$$\begin{aligned} (\tau(X)u)(x) &= -2 \sum_{\beta=1}^3 (\alpha \wedge x)_\beta \frac{\partial u}{\partial x_\beta}(x) \\ &= 2 \left( (\alpha_3 x_2 - \alpha_2 x_3) \frac{\partial}{\partial x_1} + (\alpha_1 x_3 - \alpha_3 x_1) \frac{\partial}{\partial x_2} + (\alpha_2 x_1 - \alpha_1 x_2) \frac{\partial}{\partial x_3} \right) u. \end{aligned}$$

Wir können jetzt  $\tau_{\mathbb{C}}$  ausrechnen:  $H, E, F$  entsprechen  $\alpha = (0, 0, i)$ ,  $\alpha = (\frac{i}{2}, -\frac{1}{2}, 0)$  bzw.  $\alpha = (\frac{i}{2}, \frac{1}{2}, 0)$ . Also

$$\begin{aligned} H &= -2i \left( x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} \right), \\ E &= x_3 \left( \frac{\partial}{\partial x_1} + i \frac{\partial}{\partial x_2} \right) - (x_1 + ix_2) \frac{\partial}{\partial x_3}, \\ F &= x_3 \left( -\frac{\partial}{\partial x_1} + i \frac{\partial}{\partial x_2} \right) + (x_1 - ix_2) \frac{\partial}{\partial x_3}. \end{aligned}$$

In  $V_l$  kennen wir bereits das harmonische Polynom  $v_0 = (x_1 + ix_2)^l$ . Es erfüllt  $Hv_0 = 2lv_0$  und  $Ev_0 = 0$ . Nach der Konstruktion des vorigen Abschnittes, spannen die Vektoren  $v_m = F^m v_0$  eine irreduzible Darstellung von  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  der Dimension  $2l + 1$  auf. Da  $\dim V_l = 2l + 1$  gilt, ist  $v_m$  eine Basis von  $V_l$ . Es folgt, dass  $V_l$  eine  $2l + 1$  dimensionale unitäre Darstellung von  $SU(2)$  ist. Eine orthonormierte Basis finden wir wie folgt: Die Norm im Quadrat von  $(x_1 + ix_2)^l$  ist:

$$\begin{aligned} \|(x_1 + ix_2)^l\|^2 &= \int_{S^2} (x_1^2 + x_2^2)^l d\Omega(x) = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (\sin \vartheta)^{2l+1} d\vartheta d\varphi \\ &\stackrel{x=\cos \vartheta}{=} 2\pi \int_{-1}^1 (1-x^2)^l dx = 4\pi \frac{2^{2l} l!^2}{(2l+1)!}. \end{aligned}$$

(siehe MMP I, IV.5). Also hat

$$u_{ll}(x_1, x_2, x_3) = \sqrt{\frac{(2l+1)!}{4\pi} \frac{(-1/2)^l}{l!}} (x_1 + ix_2)^l \quad (1)$$

Norm eins, und nach (7.3) sind die rekursiv definierten Polynome

$$u_{l,l-j}(x_1, x_2, x_3) = \frac{F^j u_{ll}(x_1, x_2, x_3)}{\sqrt{j(2l+1-j)}} \quad (2)$$

orthonormiert.

**SATZ 7.5.3.** Die Darstellung von  $SU(2)$  auf dem Raum  $V_l$  der harmonischen, homogenen Polynome vom Grade  $l$  in drei Unbekannten ist irreduzibel und unitär bezüglich  $(f, g) = \int_{S^2} f g d\Omega$ . (1), (2) definiert eine orthonormierte Basis und es gilt

$$\begin{aligned} H u_{lm} &= 2m u_{lm}, \\ E u_{lm} &= \sqrt{(l-m)(l+m+1)} u_{l,m+1}, \\ F u_{lm} &= \sqrt{(l-m+1)(l+m)} u_{l,m-1}. \end{aligned}$$

**DEFINITION 7.5.1.** Eine Kugelfunktion  $Y : S^2 \rightarrow \mathbb{C}$  von Index  $l$  ist die Einschränkung auf  $S^2 \subset \mathbb{R}^3$  eines homogenen harmonischen Polynoms vom Grade  $l$ .

Es bezeichne  $\hat{V}_l$  den Vektorraum der Kugelfunktionen von Index  $l$ .

Also ist  $Y = Y(\vartheta, \varphi)$  genau dann in  $\hat{V}_l$  wenn  $r^l Y(\vartheta, \varphi) \in V_l$ . Eine orthonormierte Basis von  $\hat{V}_l$  ist also durch

$$Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = r^{-l} u_{lm}(r, \vartheta, \varphi)$$

gegeben. Insbesondere haben wir

$$Y_{ll}(\vartheta, \varphi) = \sqrt{\frac{(2l+1)!}{4\pi}} \frac{(-2)^l}{l!} (\sin \vartheta)^l e^{il\varphi}$$

sowie die Rekursionsformeln

$$\begin{aligned} HY_{lm} &= 2mY_{lm}, \\ EY_{lm} &= \sqrt{(l-m)(l+m+1)}Y_{l,m+1}, \\ FY_{lm} &= \sqrt{(l-m+1)(l+m)}Y_{l,m-1}, \end{aligned}$$

wobei in die Operatoren  $H, E, F$  Kugelkoordinaten einzusetzen sind (Rechnung!)

$$\begin{aligned} H &= \frac{2}{i} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \\ E &= e^{i\varphi} \left( \frac{\partial}{\partial \vartheta} + i \cot \vartheta \frac{\partial}{\partial \varphi} \right), \\ F &= e^{-i\varphi} \left( -\frac{\partial}{\partial \vartheta} + i \cot \vartheta \frac{\partial}{\partial \varphi} \right). \end{aligned}$$

Es folgt, dass  $Y_{lm}$  die Form  $Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = F_{lm}(\vartheta)e^{im\varphi}$  hat. Die Orthonormalitätsrelation ist

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} \overline{Y_{lm}(\vartheta, \varphi)} Y_{l'm'}(\vartheta, \varphi) \sin \vartheta d\vartheta d\varphi = \delta_{ll'} \delta_{mm'}.$$

Der sphärische Laplace Operator  $\Delta_{S^2}$  auf  $C^\infty(S^2)$  ist durch die Formel für den Laplace Operator in Kugelkoordinaten

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \Delta_{S^2},$$

definiert. Explizit

$$\Delta_{S^2} = \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \cot \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

SATZ 7.5.4. Die Funktionen  $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$  sind Eigenvektoren von  $\Delta_{S^2}$ :

$$\Delta_{S^2} Y_{lm} = -l(l+1)Y_{lm}.$$

BEWEIS.

$$0 = \Delta(r^l Y_{lm}) = r^{l-2}(l(l-1) + 2l + \Delta_{S^2})Y_{lm}.$$

□

SATZ 7.5.5. Die Funktionen  $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$  bilden für  $l = 0, 1, 2, \dots$ ,  $m = -l, -l+1, \dots, l$ , eine orthonormierte Basis von  $L^2(S^2, d\Omega)$ .

BEWEIS. Wir benützen, dass die stetigen Funktionen in  $L^2$  dicht sind. Sei  $f(\vartheta, \varphi)$  stetig und  $\chi$  eine stetige Funktion auf  $\mathbb{R}_+$  mit  $\chi(r) = 1$  für  $|r-1| < \delta$  und  $\chi(r) = 0$  für  $|r-1| > 2\delta$ . Dann ist  $\tilde{f} = \chi(r)f(\vartheta, \varphi)$  eine stetige Funktion auf  $\mathbb{R}^3$ . Nach dem Weierstrass'schen Approximationssatz, existiert ein Polynom  $u$  in  $x_1, x_2, x_3$  mit

$$\max_{|x| \leq 1} |u(x) - \tilde{f}(x)| < \epsilon.$$

Insbesondere gilt dann  $|u(x) - f(x)| < \epsilon$  für  $|x| = 1$ . Nach Satz 7.5.2 ist  $u$  von der Form  $\sum_{s=0}^N r^s u_s$ , wobei  $u_s$  harmonisch sind. Setzt man  $r = 1$ , so sieht man, dass die Einschränkung von  $u$  auf  $S^2$  eine Summe von Kugelfunktionen ist. Es folgt, dass Koeffizienten  $c_{lm}$  existieren, so dass

$$\left| \sum_{\substack{l \leq N \\ |m| \leq l}} c_{lm} Y_{lm}(\vartheta, \varphi) - f(\vartheta, \varphi) \right| < \epsilon.$$

Der Schluss des Beweises ist dann genau wie im Falle der Fourierreihen.  $\square$

### 7.6. Tensorprodukte von $SU(2)$ Darstellungen

Das Tensorprodukt von zwei endlichdimensionalen Darstellungen  $(\rho, V)$   $(\rho', V')$  einer Gruppe  $G$  ist die Darstellung  $\rho \otimes \rho'$  auf dem Tensorprodukt  $V \otimes V'$ , die durch die Formel

$$(\rho \otimes \rho')(g) = \rho(g) \otimes \rho'(g)$$

gegeben wird. Es folgt aus den Eigenschaften von Tensorprodukten (siehe Appendix A.2), dass diese Formel eine Darstellung definiert, und dass die Assoziativität  $(\rho \otimes \rho') \otimes \rho'' = \rho \otimes (\rho' \otimes \rho'')$  gilt, wenn die Darstellungsräume  $(V \otimes V') \otimes V''$ ,  $V \otimes (V' \otimes V'')$  durch  $(v \otimes v') \otimes v'' = v \otimes (v' \otimes v'')$  identifiziert werden.

Ist  $G$  eine Lie-Gruppe mit Lie-Algebra  $\mathfrak{g}$ , so wird die Darstellung  $(\rho \otimes \rho')_*$  durch

$$(\rho \otimes \rho')_*(X) = \rho_*(X) \otimes 1_{V'} + 1_V \otimes \rho'_*(X), \quad \forall X \in \mathfrak{g},$$

gegeben. Es ist nämlich nach der Produktregel

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\exp(t\rho_*(X)) \otimes \exp(t\rho'_*(X))) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \exp(t\rho_*(X)) \otimes 1_{V'} \\ &+ 1_V \otimes \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \exp(t\rho'_*(X)). \end{aligned}$$

Die allgemeine Frage ist nach der Zerlegung von Tensorprodukten irreduzibler Darstellungen in irreduzible Darstellungen.

Wir studieren diese Frage im Falle der Gruppe  $SU(2)$ . Da  $SU(2)$  kompakt ist, ist jede endlichdimensionale Darstellung vollständig reduzibel. Insbesondere das Tensorprodukt  $\rho_{n'} \otimes \rho_{n''}$  der irreduziblen Darstellung der Dimension  $n'$  mit der irreduziblen Darstellung der Dimension  $n''$  zerfällt in eine direkte Summe von irreduziblen Darstellungen. Wir haben diese klassifiziert: zu jeder nichtnegativen ganzen Zahl  $n$ , gibt es bis auf Äquivalenz genau eine irreduzible Darstellung  $\rho_n$  der Dimension  $n + 1$ . Sie ist dadurch charakterisiert, dass der Darstellungsraum einen bis auf Multiplikation mit einer Zahl eindeutigen Vektor  $v_0 \neq 0$  enthält, so dass  $Hv_0 = nv_0$  und  $E v_0 = 0$ . Hier sind  $H, E, F$  die Bilder unter der komplexifizierten Lie-Algebra-Darstellung der Basisvektoren  $h, e, f$  von  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ , siehe Korollar 7.4.3. Eine Basis des Darstellungsraums kann durch wiederholte Anwendung des Absteigeoperators  $F$  gewonnen werden.

Um eine Darstellung  $\rho$  von  $SU(2)$  zu reduzieren, müssen wir also die (Komplexifizierung der) Lie-Algebra-Darstellung  $\rho_*$  betrachten und die "primitiven" Vektoren finden, nämlich die Eigenvektoren von  $H$  die im Kern von  $E$  sind.

Sei also  $\rho = \rho_{n'} \otimes \rho_{n''}$ . Der Darstellungsraum von  $\rho_{n'}$  hat eine Basis  $v'_0, \dots, v'_{n'}$ , so dass die entsprechende Darstellung  $\tau_{n'} = \rho_{n'*}$  von  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  durch  $E v'_j = j(n' + 1 - j)v'_{j-1}$ ,  $H v'_j = (n' - 2j)v'_j$ ,  $F v'_j = v'_{j+1}$ , gegeben wird, mit der Konvention, dass  $v'_{-1} = v'_{n'+1} = 0$  (Siehe Satz 7.4.5). Genauso hat der Darstellungsraum von  $\rho_{n''}$  eine Basis  $v''_0, \dots, v''_{n''}$  mit den entsprechenden Eigenschaften.

Eine Basis des Darstellungsraums von  $\rho$  ist dann  $v'_j \otimes v''_k$ ,  $j = 0, \dots, n'$ ,  $k = 0, \dots, n''$ . Diese Basis besteht aus Eigenvektoren von  $H = \rho_*(h)$ :

$$\begin{aligned} H(v'_j \otimes v''_k) &= (H v'_j) \otimes v''_k + v'_j \otimes (H v''_k) \\ &= (n' - 2j)v'_j \otimes v''_k + (n'' - 2k)v'_j \otimes v''_k \\ &= (n' + n'' - 2(j + k))v'_j \otimes v''_k. \end{aligned}$$

Also sind die Eigenwerte von  $H$  auf dem Tensorprodukt von der Form  $n' + n'' - 2l$   $l = 0, 1, 2, \dots$  und die Eigenräume werden durch  $v'_j \otimes v''_k$  mit  $j + k = l$  aufgespannt.

In diesen Eigenräumen müssen wir den Kern von  $E$  finden. Also suchen wir Linearkombinationen

$$w = \sum_{j=0}^l a_j v'_j \otimes v''_{l-j},$$

so dass  $Ew = 0$ . Jeder solche nichtverschwindende Vektor  $w$  ist dann primitiv und erzeugt eine irreduzible Unterdarstellung der Dimension  $n' + n'' - 1 - 2l$ . Eigentlich erstreckt sich die Summe in  $w$  auf einem kleineren Intervall falls  $l$  gross ist. Wir nehmen aber an, dass  $l \leq \min(n', n'')$ , so dass alle  $v'_j, v''_{l-j}$  in der Summe wohldefiniert sind. Wir werden dann zeigen, dass alle primitiven Vektoren diese Annahme erfüllen.

Wir lösen jetzt die Gleichung  $Ew = 0$  für die Koeffizienten  $a_j$  bei gegebenem  $l$ :

$$\begin{aligned} 0 &= E \sum_{j=0}^l a_j v'_j \otimes v''_{l-j} \\ &= \sum_{j=0}^l a_j (E v'_j \otimes v''_{l-j} + v'_j \otimes E v''_{l-j}) \\ &= \sum_{j=1}^l a_j j (n' + 1 - j) v'_{j-1} \otimes v''_{l-j} + \sum_{j=0}^{l-1} (l - j) (n'' + 1 - l + j) v'_j \otimes v''_{l-j-1} \\ &= \sum_{j=0}^{l-1} (a_{j+1} (j + 1) (n' - j) + a_j (l - j) (n'' + 1 - l + j)) v'_j \otimes v''_{l-j-1} \end{aligned}$$

Wir erhalten die Rekursionsformel

$$a_{j+1} = - \frac{(l - j) (n'' + 1 - l + j)}{(j + 1) (n' - j)} a_j, \quad j = 0, \dots, l - 1,$$

(wir können durch  $(j + 1) (n' - j)$  dividieren, weil dieser Ausdruck für  $j$  im angegebenen Intervall niemals verschwindet) mit Lösung

$$a_j = (-1)^j \frac{(n' - j)! (n'' - l + j)!}{j! (l - j)!}.$$

Somit haben wir für jedes  $l = 0, 1, \dots, \min(n', n'')$  einen irreduziblen invarianten Unterraum der Dimension  $n' + n'' + 1 - 2l$ . Die Summe dieser Dimensionen ist

$$\sum_{l=0}^{\min(n', n'')} (n' + n'' + 1 - 2l) = (n' + 1) (n'' + 1),$$

also gleich der Dimension des Tensorproduktes. Somit haben wir das Tensorprodukt vollständig reduziert. Da  $n' + n'' - \min(n', n'') = |n' - n''|$ , können wir das Resultat folgendermassen formulieren.

**SATZ 7.6.1.** (*Clebsch–Gordan Zerlegung*) Die Zerlegung eines Tensorproduktes von irreduziblen Darstellungen der Dimensionen  $n' + 1, n'' + 1$  ist:

$$\rho_{n'} \otimes \rho_{n''} \cong \rho_{n'+n''} \oplus \rho_{n'+n''-2} \oplus \dots \oplus \rho_{|n'-n''|}.$$

Die irreduzible Unterdarstellung der Dimension  $n' + n'' + 1 - 2l$  ist aufgespannt durch  $w_l, F w_l, \dots, F^{n'+n''-2l} w_l$  wobei, bezüglich der oben definierten Basen,

$$w_l = \sum_{j=0}^l (-1)^j \frac{(n' - j)! (n'' - l + j)!}{j! (l - j)!} v'_j \otimes v''_{l-j}.$$

BEISPIEL 7.6.1.  $n' = n'' = 1$ . Der Darstellungsraum von  $\rho_1$  ist zweidimensional mit Basis  $v_0, v_1 = Fv_0$ . Das Tensorprodukt hat Dimension 4 und ist eine direkte Summe einer dreidimensionalen Darstellung mit Basis  $v_0 \otimes v_0, v_0 \otimes v_1 + v_1 \otimes v_0, v_1 \otimes v_1$  und einer eindimensionalen Darstellung, aufgespannt durch  $v_0 \otimes v_1 - v_1 \otimes v_0$ . Die Zerlegung ist also die Zerlegung in symmetrischen und antisymmetrischen Tensoren.

## Begriffe aus der linearen Algebra

### A.1. Direkte Summen

Alle Vektorräume seien über einem festen Körper  $K$ , z.B.  $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$ .

Direkte Summen von Vektorräumen beziehen sich auf zwei zunächst logisch verschiedene Begriffe, die aber a posteriori identifiziert werden können.

Erstens sagen wir, dass ein Vektorraum  $V$  in eine *direkten Summe von Unterräumen*  $V_1, \dots, V_n \subset V$  zerfällt (Notation:  $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_n$ ), falls jeder Vektor  $v \in V$  eindeutig als  $v = v_1 + \dots + v_n$  dargestellt werden kann, wobei  $v_i \in V_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  (Beispiel: ist  $V_1 \subset \mathbb{R}^3$  eine Gerade durch 0,  $V_2 \subset \mathbb{R}^3$  eine Ebene durch 0, die  $V_1$  nicht enthält, so ist  $\mathbb{R}^3 = V_1 \oplus V_2$ ).

Zweitens, gegeben  $n$  beliebige Vektorräume  $V_1, \dots, V_n$ , definiert man deren *direkte Summe*  $V = V_1 \dot{+} \dots \dot{+} V_n$  als das kartesische Produkt  $V = V_1 \times \dots \times V_n$  mit Vektorraumstruktur

$$\begin{aligned} (v_1, \dots, v_n) + (v'_1, \dots, v'_n) &= (v_1 + v'_1, \dots, v_n + v'_n), & v_i, v'_i \in V_i, \\ \lambda(v_1, \dots, v_n) &= (\lambda v_1, \dots, \lambda v_n), & \lambda \in K, v_i \in V_i, \end{aligned}$$

(Beispiel:  $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \dot{+} \mathbb{R}$ ). Dann definiert die Abbildung  $\iota_i : V_i \rightarrow V$ ,

$$v \mapsto (0, \dots, 0, v, 0, \dots, 0),$$

mit  $v$  an der  $i$ ten Stelle, eine Einbettung von  $V_i$  in  $V$ . Identifiziert man, für alle  $i$ ,  $V_i$  mit dem Unterraum  $\iota_i(V_i)$  von  $V$ , so zerfällt  $V$  in einer direkten Summe von  $V_1, \dots, V_n$ . Mit dieser Vereinbarung können wir dann  $\dot{+}$  durch  $\oplus$  ersetzen. Wir schreiben auch  $v_1 \oplus \dots \oplus v_n$  um den Vektor  $(v_1, \dots, v_n)$  von  $V_1 \oplus \dots \oplus V_n$  zu bezeichnen.

Es sei nun eine lineare Abbildung  $A : V \rightarrow W$  gegeben, wobei  $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_n$ ,  $W = W_1 \oplus \dots \oplus W_m$ . Dann hat  $A$  Komponenten  $A_{ij} : V_j \rightarrow W_i$ : das Bild  $w = Av$  von  $v = v_1 \oplus \dots \oplus v_n$  hat eine Zerlegung  $w = w_1 \oplus \dots \oplus w_m$ , und wir setzen  $w_i = \sum_j A_{ij} v_j$ . In anderen Worten, haben wir  $A_{ij} = p_i \circ A \circ \iota_j$ , wobei  $p_i : w_1 \oplus \dots \oplus w_m \mapsto w_i$  die Projektion  $W \rightarrow W_i$  ist. Also ist  $A_{ij}$  als Zusammensetzung von linearen Abbildungen linear.

Wir sagen, dass eine Basis  $(e_i)_{i=1}^N$  einer endlichdimensionalen direkten Summe  $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_N$  *kompatibel* ist, falls  $e_1, \dots, e_{d_1}$  eine Basis von  $V_1$  ist,  $e_{d_1+1}, \dots, e_{d_1+d_2}$  eine Basis von  $V_2$  ist, und so weiter. Dann zerfällt die Matrix einer linearen Abbildung  $A : V \rightarrow W$  bezüglich kompatibler Basen in Kästchen, die die Matrizen der Komponenten  $A_{ij}$  enthalten:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & \cdots & A_{mn} \end{pmatrix},$$

Sind  $V \xrightarrow{A} W \xrightarrow{B} Z$  lineare Abbildungen zwischen als direkten Summen dargestellten Vektorräumen, so gilt für Komponenten  $(BA)_{ij} = \sum_k B_{ik} A_{kj}$ .

## A.2. Tensorprodukte

Wir betrachten Vektorräume über  $K = \mathbb{C}$  oder  $\mathbb{R}$ . Für eine beliebige Menge  $M$ , bezeichnen wir mit  $K[M]$  den Vektorraum aller formalen Linearkombinationen von Elementen aus  $M$  mit Koeffizienten aus  $K$ . Also ist ein Vektor in  $K[M]$  ein formaler Ausdruck der Form  $\lambda_1 m_1 + \dots + \lambda_k m_k$  mit  $m_i \in M$  und  $\lambda_i \in K$ . Addition und Multiplikation mit einem Skalar sind durch Addition, bzw. Multiplikation mit einem Skalar, der Koeffizienten definiert. Sind zum Beispiel  $m, m', m''$  drei Elemente aus  $M$  so hat man  $(3m + m') + (-4m + 4m'') = -m + m' + 4m''$  und  $4 \cdot (3m + 2m') = 12m + 8m'$ . Wir benützen wie üblich die Schreibweise  $m := 1m$ ,  $-m := (-1)m$ . Nach Konstruktion ist dann  $M$  eine Basis von  $K[M]$ .

DEFINITION A.2.1. Das *Tensorprodukt* zweier Vektorräume  $V, W$  ist der Vektorraum  $K[V \times W]/U$ , wobei  $U$  der von den Vektoren

$$\begin{aligned} (\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2, w) - \lambda_1(v_1, w) - \lambda_2(v_2, w), & \quad \lambda_i \in K, v_i \in V, w \in W, \\ (v, \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2) - \lambda_1(v, w_1) - \lambda_2(v, w_2), & \quad \lambda_i \in K, v \in V, w_i \in W, \end{aligned}$$

erzeugter Unterraum ist.<sup>1</sup>

Die Äquivalenzklasse von  $(v, w)$  in  $V \otimes W$  wird mit  $v \otimes w$  bezeichnet. Vektoren in  $V \otimes W$  werden manchmal Tensoren (von Rank 2) genannt. Tensoren der Form  $v \otimes w$  werden reine Tensoren genannt.

Was das alles bedeutet, ist durch folgendes Lemma erklärt, das als eine pragmatische Definition von  $V \otimes W$  aufgefasst werden kann.

LEMMA A.2.1.

- (i)  $V \otimes W$  besteht aus Elementen der Form  $v_1 \otimes w_1 + \dots + v_n \otimes w_n$ .
- (ii) Es gelten die Rechenregeln

$$\begin{aligned} (\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) \otimes w &= \lambda_1(v_1 \otimes w) + \lambda_2(v_2 \otimes w), & \lambda_i \in K, v_i \in V, w \in W, \\ v \otimes (\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2) &= \lambda_1(v \otimes w_1) + \lambda_2(v \otimes w_2), & \lambda_i \in K, v \in V, w_i \in W. \end{aligned}$$

BEWEIS. (ii) ist eine unmittelbare Folge der Definition: die Differenz zwischen linker und rechter Seite ist die Klasse eines Elements in  $U$  also gleich null. Insbesondere ist  $(\lambda v) \otimes w = \lambda(v \otimes w)$ , was (i) zeigt: nach Definition ist nämlich jedes Element in  $V \otimes W$  von der Form  $\lambda_1(u_1 \otimes w_1) + \dots + \lambda_n(v_n \otimes w_n)$  mit  $\lambda_i \in K, u_i \in V, w_i \in W$ . Setzen wir  $v_i = \lambda_i u_i$  so erhalten wir die Behauptung.  $\square$

SATZ A.2.2. Sei  $(e_i)_{i \in I}$  eine Basis von  $V$ ,  $(f_j)_{j \in J}$  eine Basis von  $W$ . Dann ist  $(e_i \otimes f_j)_{(i,j) \in I \times J}$  eine Basis von  $V \otimes W$ .

BEWEIS. Wir zeigen zuerst, dass jedes Element von  $V \otimes W$  eine Linearkombination von  $e_i \otimes f_j$ ,  $i \in I, j \in J$  ist. Wegen Lemma A.2.1 genügt es dies für Elemente der Form  $v \otimes w$  zu zeigen. Aber  $v$  ist eine Linearkombination  $\sum v^i e_i$  der  $e_i$  mit endlich vielen nichtverschwindenden Komponenten  $v^i \in K$ , also haben wir nach wiederholter Anwendung von Lemma A.2.1:

$$v \otimes w = (v^{i_1} e_{i_1} + \dots + v^{i_k} e_{i_k}) \otimes w = v^{i_1} e_{i_1} \otimes w + \dots + v^{i_k} e_{i_k} \otimes w.$$

Ähnlich schreiben wir  $w$  als Linearkombination der  $f_j$ , und wir erhalten  $v \otimes w = \sum_{i,j} v^i w^j e_i \otimes f_j$ .

Es bleibt zu zeigen, dass die Vektoren  $e_i \otimes f_j$  linear unabhängig sind. Dafür benützen wir das später bewiesene

LEMMA A.2.3. Ist  $\alpha : V \rightarrow K$  eine lineare Funktion, so existiert genau eine lineare Abbildung  $\alpha_1 : V \otimes W \rightarrow W$ , so dass  $\alpha_1(v \otimes w) = \alpha(v)w$

<sup>1</sup>Hier bezeichnet  $(v, w) \in V \times W$  das geordnete Paar bestehend aus  $v$  und  $w$  (nicht etwa ein Skalarprodukt)

Um den Satz fertig zu beweisen, setzen wir, für beliebig gegebenem  $j$ ,  $\alpha(e_i) = \delta_{ij}$ ,  $\forall i \in I$ . Nehmen wir an, es existieren Zahlen  $\lambda_{kl}$ , höchstens endlich viele davon nicht verschwindend, so dass  $\sum_{kl} \lambda_{kl} e_k \otimes f_l = 0$ . Dann ist  $0 = \alpha_1(\sum_{kl} \lambda_{kl} e_k \otimes f_l) = \sum_{kl} \lambda_{kl} \alpha(e_k) f_l = \sum_l \lambda_{jl} f_l$ . Da aber die  $f_l$  linear unabhängig sind, verschwindet  $\lambda_{jl}$  für alle  $l \in J$ . Aber  $j$  ist beliebig, also verschwinden alle  $\lambda_{jl}$ ,  $j \in I, l \in J$ : die Vektoren  $e_i \otimes f_j$  sind linear unabhängig.  $\square$

Also ist insbesondere die Dimension eines Tensorproduktes gleich dem Produkt der Dimensionen der Faktoren.

Wir können *Komponenten*  $v^{ij} \in K$  eines Tensors  $v \in V \otimes W$  bezüglich Basen  $(e_i), (f_j)$  von  $V$  bzw.  $W$  durch die Formel  $v = \sum_{ij} v^{ij} e_i \otimes f_j$  einführen. Sind  $e'_i = \sum_k A_i^k e_k$ ,  $f'_j = \sum_l B_j^l f_l$  andere Basen, so ist die Beziehung zwischen den entsprechenden Komponenten  $v^{i'j'}$  und den Komponenten  $v^{ij}$  durch die Formel

$$(A.1) \quad v^{i'j'} = \sum_{kl} A_k^{i'} B_l^{j'} v^{kl}$$

gegeben. So erhält man eine andere, in der Physik und der frühen Differentialgeometrie geläufige, Definition von Tensorprodukten: ein Tensor in  $V \otimes W$  ist eine von einer Wahl von Basen in  $V$  und  $W$  abhängige Sammlung von Zahlen  $v^{ij}$ , die sich unter Basiswechsel wie in (A.1) transformieren.

Wir beweisen nun eine Verallgemeinerung von Lemma A.2.3, die "universelle Eigenschaft von Tensorprodukten". In vielen Büchern wird diese Eigenschaft als Definition der Tensorprodukte verwendet. Eine *bilineare Abbildung* von einem Kartesischen Produkt  $V \times W$  von Vektorräumen nach einem Vektorraum  $Z$  ist eine Abbildung  $f$  so, dass für beliebige feste  $v_0 \in V$ ,  $w_0 \in W$ , die Abbildungen  $v \mapsto f(v, w_0)$ ,  $w \mapsto f(v_0, w)$  linear sind. Zum Beispiel ist die Abbildung  $(v, w) \mapsto \alpha(v)w$  von Lemma A.2.1 bilinear.

LEMMA A.2.4. *Für jede bilineare Abbildung  $f : V \times W \rightarrow Z$  existiert eine eindeutige lineare Abbildung  $\bar{f} : V \otimes W \rightarrow Z$  so, dass  $\bar{f}(v \otimes w) = f(v, w)$ .*

BEWEIS. Die Eindeutigkeit folgt aus Lemma A.2.1, (i). Existenz: wir definieren  $\tilde{f} : K[V \times W] \rightarrow Z$  durch

$$\tilde{f}(\lambda_1(v_1, w_1) + \cdots + \lambda_n(v_n, w_n)) = \lambda_1 f(v_1, w_1) + \cdots + \lambda_n f(v_n, w_n).$$

Aus der Linearität von  $f$  folgt dann, dass  $\tilde{f}$  auf dem Unterraum  $U$  verschwindet, und so eine wohldefinierte Abbildung  $\bar{f}$  auf dem Quotient  $K[V \times W]/U$  induziert. Sie erfüllt  $\bar{f}(v \otimes w) = f(v, w)$ .  $\square$

Dieses Lemma ist nützlich, um eine Reihe von grundlegenden Eigenschaften von Tensorprodukten zu beweisen. So können wir Tensorprodukte von linearen Abbildungen konstruieren:

SATZ A.2.5. *Sind  $A : V \rightarrow V'$ ,  $B : W \rightarrow W'$  lineare Abbildungen so existiert eine eindeutige Abbildung  $A \otimes B : V \otimes W \rightarrow V' \otimes W'$ . Sind  $C : V' \rightarrow V''$ ,  $D : W' \rightarrow W''$  ebenfalls lineare Abbildungen so gilt  $(C \otimes D)(A \otimes B) = CA \otimes DB$ .*

BEWEIS. Die Abbildung  $f : V \times W \rightarrow V' \otimes W'$ ,  $f(v, w) = Av \otimes Bw$  ist bilinear (zeigen Sie das!), also induziert sie eine eindeutige Abbildung  $\bar{f} = A \otimes B$  mit der gewünschten Eigenschaft. Die Produktregel folgt nach Anwendung von  $(C \otimes D)(A \otimes B)$  auf ein Element der Form  $v \otimes w$ .  $\square$

Wählen wir Basen  $(e_i)_{i \in I}, (f_j)_{j \in J}, (e'_i)_{i \in I'}, (f'_j)_{j \in J'}$  der Vektorräume  $V, W, V'$ , bzw.  $W'$ , so sind die linearen Abbildungen  $A, B$  durch Matrizen  $(A_{ij}), (B_{ij})$  gegeben. Die Matrix von  $A \otimes B$  bezüglich der Basen  $(e_i \otimes f_j)_{(i,j) \in I \times J}, (e'_i \otimes f'_j)_{(i,j) \in I' \times J'}$

ist dann  $(A \otimes B)_{(k,l)(i,j)} = A_{ki}B_{lj}$ . Es gilt nämlich

$$\begin{aligned} (A \otimes B)e_i \otimes f_j &= Ae_i \otimes Bf_j \\ &= \sum_k A_{ki}e'_k \otimes \sum_l B_{lj}f'_l \\ &= \sum_{k,l} A_{ki}B_{lj}e'_k \otimes f'_l. \end{aligned}$$

SATZ A.2.6. Sind  $A : V \rightarrow V$ ,  $B : W \rightarrow W$  lineare Abbildungen auf endlichdimensionalen Vektorräumen, so gilt  $\text{tr}(A \otimes B) = \text{tr}(A)\text{tr}(B)$

BEWEIS. Die Spur ist die Summe der diagonalen Matrixelemente bezüglich einer beliebigen Basis. Also haben wir bezüglich einer Basis  $e_i \otimes f_j$  wie oben,

$$\begin{aligned} \text{tr}(A \otimes B) &= \sum_{(i,j)} (A \otimes B)_{(i,j)(i,j)} \\ &= \sum_{i,j} A_{ii}B_{jj} \\ &= \sum_i A_{ii} \sum_j B_{jj} \\ &= \text{tr}(A)\text{tr}(B). \end{aligned}$$

□

Allgemeiner kann man Tensorprodukte von  $n$  Vektorräumen  $V_1, \dots, V_n$  definieren:

$$V_1 \otimes \dots \otimes V_n = K[V_1 \times \dots \times V_n]/U,$$

wobei  $U$  von den Vektoren der Form

$$\begin{aligned} &(\dots, v_{i-1}, \lambda v_i + \lambda' v'_i, v_{i+1}, \dots) \\ &-\lambda(\dots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \dots) - \lambda'(\dots, v_{i-1}, v'_i, v_{i+1}, \dots), \quad i = 1, \dots, n, \end{aligned}$$

erzeugt ist. Die Klasse von  $(v_1, \dots, v_n)$  wird mit  $v_1 \otimes \dots \otimes v_n$  bezeichnet. Wie im Lemma A.2.4 zeigt man die universelle Eigenschaft: es existiert zu jeder multilinearen (d.h. in jedem Argument linearen) Abbildung  $f : V_1 \times \dots \times V_n \rightarrow W$  eine eindeutige lineare Abbildung  $\tilde{f} : V_1 \otimes \dots \otimes V_n \rightarrow W$  mit  $\tilde{f}(v_1 \otimes \dots \otimes v_n) = f(v_1, \dots, v_n)$  für alle  $v_i \in V_i$ .

Dieses  $n$ -fache Tensorprodukt kann auch als iteriertes zweifache Tensorprodukt aufgefasst werden, dank dem

LEMMA A.2.7. Zu jedem Tripel  $V, W, Z$  von Vektorräumen, existiert genau ein linearer Isomorphismus  $(V \otimes W) \otimes Z \rightarrow V \otimes W \otimes Z$ , so, dass  $(v \otimes w) \otimes z \mapsto v \otimes w \otimes z$ , für alle  $v \in V$ ,  $w \in W$  und  $z \in Z$ .

BEWEIS. Die Abbildung  $f : (V \otimes W) \times Z \rightarrow V \otimes W \otimes Z$ ,  $((v, w), z) \mapsto v \otimes w \otimes z$  ist multilinear. Insbesondere ist sie für jedes feste  $z \in Z$  bilinear in den ersten beiden Argumenten. Sie induziert deshalb nach Lemma A.2.4 eine bilineare Abbildung  $f_1 : (V \otimes W) \times Z \rightarrow V \otimes W \otimes Z$ , mit  $f_1(v \otimes w, z) = v \otimes w \otimes z$ . Wenden wir dann Lemma A.2.4 nochmals an, so erhalten wir eine lineare Abbildung von  $(V \otimes W) \otimes Z$  nach  $V \otimes W \otimes Z$  die  $(v \otimes w) \otimes z$  nach  $v \otimes w \otimes z$  sendet. Diese Abbildung ist invertierbar: die inverse Abbildung ist durch die multilineare Abbildung  $(v, w, z) \rightarrow (v \otimes w) \otimes z$  induziert, und bildet deshalb  $v \otimes w \otimes z$  nach  $(v \otimes w) \otimes z$  ab. □

Wie im Falle von zwei Faktoren, bilden für jede Wahl von Basen  $(e_j^{(i)})_{j \in I_i}$  der Vektorräume  $V_i$ , die Tensoren  $e_{i_1}^{(1)} \otimes \dots \otimes e_{i_n}^{(n)}$  eine Basis von  $V_1 \otimes \dots \otimes V_n$ . Dabei läuft  $(i_1, \dots, i_n)$  über  $I_1 \times \dots \times I_n$ . Hat man lineare Abbildungen  $A_i : V_i \otimes W_i$ ,

$1 \leq i \leq n$  so ist ihr Tensorprodukt  $A = A_1 \otimes \cdots \otimes A_n$  eine lineare Abbildung von  $V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$  nach  $W_1 \otimes \cdots \otimes W_n$ . Sie erfüllt  $A(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) = A_1 v_1 \otimes \cdots \otimes A_n v_n$ .



## Literaturverzeichnis

- [1] J. H. Conway et al., *Atlas of finite groups*, Clarendon Press, 1965
- [2] J. F. Cornwell, *Group theory in physics*, Academic Press, 1984
- [3] W. Fulton, J. Harris, *Representation theory: a first course*, Springer 1991
- [4] W. Hein, *Einführung in die Struktur- und Darstellungstheorie der klassischen Gruppen*, Springer, 1990
- [5] M. Lax, *Symmetry principles in solid state and molecular physics*, John Wiley & Sons, 1974
- [6] J.-P. Serre, *Représentations linéaires des groupes finis*, Hermann, 1978
- [7] J.-P. Serre, *Lie algebras and Lie Groups*, Lecture Notes in Mathematics 1500, Springer 1965
- [8] S. Sternberg, *Group theory and physics*, Cambridge University Press 1994
- [9] H. Weyl, *The classical groups, their invariants and representations*, Princeton University Press, 1961