Analyse de Fourier

Cours de Mathématiques S4

PEIPC 2018-2019
Polytech Paris-Sud

F. Feppon

Sommaire

Plan du cours

Le principal objectif de ce module est une introduction aux séries de Fourier, c'est à dire l'étude de séries de fonctions trigonométriques de la forme

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)). \tag{0.1}$$

En accord avec cet objectif, le cours suit la progression à complexité croissante suivante:

Chapitre 1: On étudie les suites numériques, c'est à dire des objets de la forme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec un terme général $u_n \in \mathbb{R}$ réel.

Chapitre 2: On introduit ensuite les séries, c'est-à-dire les objets de la forme $\sum u_n$

Chapitre 3: On étudie les suites et séries de fonctions: la complexité augmente en permettant au terme général $u_n(x)$ de dépendre d'une variable réelle $x \in \mathbb{R}$.

Chapitre 4: Ces outils permettent l'étude des séries de Fourier (0.1) en spécialisant le terme général $u_n(x)$ au cas particulier d'une fonction trigonométrique de la forme $x \mapsto a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$.

Chapitre 5: Enfin, on dira quelques mots sur les séries entières, où le terme général $u_n(z)$ se spécialise au cas particulier d'une fonction polynomiale de la variable complexe $z \in \mathbb{C}$ de la forme $z \mapsto a_n z^n$.

CHAPITRE 1

Suites numériques

1. Introduction

Les classes précédentes ont introduit la classification bien connue des ensembles de nombres $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Cette classification n'est pas uniquement "esthétique" mais correspond à l'ordre dans lequel ces ensembles sont construits pour répondre à des besoins mathématiques spécifiques.Voici un aperçu très bref de l'histoire qui s'y rapporte:

1. Au commencement est la théorie des ensembles, qui fixe les "règles du jeu" sur les ensembles et les opérations autorisées qui s'y rapportent (union, différence, ensemble des parties).
2. Ces règles permettent de donner une définition axiomatique de l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N} = \{0, 1, \ldots, \}$ selon le principe suivant: par définition, le nombre 0 est l'ensemble vide: $0 := \emptyset$; 1 est l'ensemble à un seul élément $1 := \{0\}$, puis $2 := \{0, 1\}$, $3 := \{0, 1, 2\}$ et ainsi de suite. On obtient également les opérations arithmétiques $+$ et $\times$. On retiendra que *le principal intérêt de l'ensemble* $\mathbb{N}$ *est le dénombrement*, c'est-à-dire le calcul du nombre des éléments d'un ensemble fini.
3. L'ensemble des entiers relatifs $\mathbb{Z}$ est construit en "ajoutant les opposés" $-n$ pour $n \in \mathbb{N}$, ce qui répond au besoin de pouvoir "inverser" l'opération $+$. Le principal intérêt de l'ensemble $\mathbb{Z}$ est *l'arithmétique*.
4. Enfin, l'ensemble des rationnels $\mathbb{Q}$ est construit en "ajoutant les inverses" $1/q$ pour $q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, ce qui répond au besoin de pouvoir "inverser" l'opération $\times$.

À partir de là, on pourrait penser être satisfait et s'arrêter là car l'ensemble $\mathbb{Q}$ a une structure suffisamment riche pour permettre toute sorte de calculs mathématiques avec les opérations $+$ et $\times$. Qu'est-ce qui motive donc l'introduction d'un ensemble plus grand, à savoir l'ensemble des réels $\mathbb{R}$? Cet ensemble est introduit pour répondre aux besoins de l'*analyse*; en particulier permettre l'utilisation de la notion de limites.

Un bon exemple motivant l'introduction de $\mathbb{R}$ est donné par la notion d'écriture décimale: tout rationnel peut être approché par une écriture décimale finie. Par exemple, le nombre $1/3 = 0.3333333\ldots$ peut être approché par les nombres suivants: $r_0 = 0$, $r_1 = 0.3$, $r_2 = 0.33$, etc... On peut prouver que l'écriture décimale d'un rationnel est nécessairement périodique. Par conséquent, le nombre dont l'écriture décimale (non périodique) serait donnée par $0.12345678910111213\ldots$ ne peut pas appartenir à l'ensemble $\mathbb{Q}$. Cependant, on "sent" qu'un tel nombre doit exister car il peut être approché par les rationnels $r_0 = 0$, $r_1 = 0.1$, $r_2 = 0.12$, $r_3 = 0.123$, etc...

Plus formellement, l'ensemble $\mathbb{R}$ répond au constat qu'il existe des suites $(r_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ (cette notation signifie $\forall n \in \mathbb{N}$, $r_n \in \mathbb{Q}$) dont l'écart entre les termes est aussi petit que l'on veut à partir d'un certain rang:

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists\ N \in \mathbb{N},\ \forall p, q \geq N,\ |r_p - r_q| < \epsilon.$$

De telles suites sont dites "de Cauchy". Le nombre r_n semble être de plus en plus proches d'un certain nombre au fur et à mesure que n grandit; cependant ce nombre n'appartient peut-être pas à l'ensemble $\mathbb{Q}$. L'ensemble $\mathbb{R}$ est construit pour pallier à ce problème, de telle sorte que toute suite de Cauchy $(r_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ converge effectivement vers un nombre limite $r \in \mathbb{R}$.

2. Suites réelles et limites

2.1. Vocabulaire des suites réelles

Definition 1.1. Une suite réelle est une application u de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rccl} u & : & \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ & & n & \mapsto & u(n). \end{array}$$

On note en pratique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou même plus simplement (u_n) une telle suite. L'ensemble des suites réelles est noté $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Il existe plusieurs manières de définir des suites:

1. Explicitement, par exemple:
$$\forall n \in \mathbb{N},\, u_n = n^2 + e^{-n} - 1.$$
2. Par récurrence: il faut connaître les n premiers termes pour calculer le terme d'ordre $n+1$. Par exemple:
$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N},\, u_{n+1} = \sqrt{1+u_n} \\ u_0 = 0 \end{cases}$$
3. Parfois implicitement. Par exemple, soit u_n l'unique solution positive x solution de l'équation
$$x^2 + 2x - n = 0.$$

Il faut connaître un certain nombre de qualificatifs pour les suites réelles:

Definition 1.2. Une suite (u_n) est dite:

- Majorée si
$$\exists M \in \mathbb{R},\, \forall n \in \mathbb{N},\, u_n \leq M.$$
- Minorée si
$$\exists m \in \mathbb{R},\, \forall n \in \mathbb{N},\, u_n \geq m$$
- Bornée si
$$\exists m, M \in \mathbb{R},\, \forall n \in \mathbb{N},\, m \leq u_n \leq M$$

Definition 1.3. Une suite réelle $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est dite

- Croissante si
$$\forall n \in \mathbb{N},\, u_{n+1} \geq u_n.$$
- Décroissante si
$$\forall n \in \mathbb{N},\, u_{n+1} \leq u_n.$$

2.2. Définition de la limite d'une suite

Pour formuler la notion de limite, il est nécessaire de formuler précisément ce que l'on entend par *distance* entre deux points. Dans $\mathbb{R}$, la distance entre deux éléments est mesurée par la valeur absolue:

Definition 1.4 (Valeur absolue). La valeur absolue est la fonction notée $|\cdot| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ et définie par
$$\forall x \in \mathbb{R},\, |x| = \max(x, -x).$$

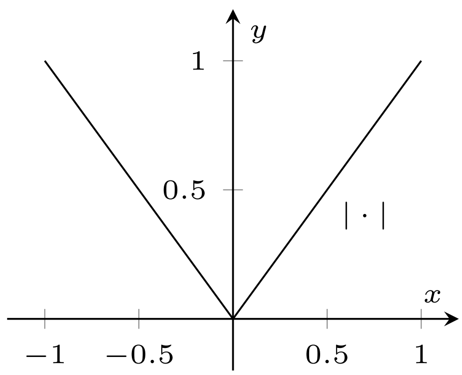


Figure 1. Graphe de la fonction valeur absolue.

Moralement, $|x|$ peut être interprété comme la "taille" du réel $x \in \mathbb{R}$, et $|x-y|$ comme la distance entre deux réels x et y (cf. Figure 2). La proposition suivante montre formellement que la valeur absolue joue le rôle d'une distance sur l'ensemble des réels:

Proposition 1.1. *La fonction valeur absolue vérifie les propriétés fondamentales suivantes:*

- *Positivité:*
$$\forall x \in \mathbb{R},\, |x| \geq 0.$$

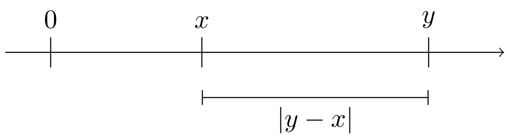


FIGURE 2. Interprétation de la valeur absolue comme distance sur la droite réelle.

- *Inégalité triangulaire:*
$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R},\ |x+y| \leq |x| + |y|,$$
$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R},\ ||x| - |y|| \leq |x-y|.$$
- *Homogénéité:*
$$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ |\lambda x| = |\lambda|\,|x|.$$
- *Caractère défini:*
$$\forall x \in \mathbb{R},\ |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

PREUVE. Contentons nous de prouver l'inégalité triangulaire, les autres propriétés étant triviales. Soit $x, y \in \mathbb{R}$, on commence par montrer $|x+y| \leq |x| + |y|$. En effet:

$$|x+y| = \max(x+y, -x-y) = \delta(x+y)$$

avec δ un nombre valant -1 ou $+1$. On a alors $\delta x \leq |x|$ et $\delta y \leq |y|$ d'où le résultat. La seconde inégalité triangulaire est une conséquence de la première, en effet:

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ |x| - |y| = |x-y+y| - |y| \leq |x-y| + |y| - |y| = |x-y|,$$

et de même en permutant x et y, $-(|x| - |y|) \leq |x-y|$, d'où le résultat car

$$||x| - |y|| = \max(|x| - |y|, -(|x| - |y|)).$$

$\square$

REMARQUE 1.1. L'interprétation de l'inégalité triangulaire est la suivante: la distance entre deux points x et y est toujours inférieure à la somme des distances en passant par un troisième point z:

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R},\ |x-y| = |x-z+z-y| \leq |x-z| + |z-y|.$$

Toutes ces propriétés font de la valeur absolue une *norme* sur $\mathbb{R}$, comme on le reverra aux chapitres suivant. Cette notion de distance permet de définir la limite d'une suite réelle.

DEFINITION 1.5 (Limite). Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite réelle. On dit que (u_n) converge si il existe un réel $\ell \in \mathbb{R}$ tel que u_n est arbitrairement proche de ℓ à partir d'un certain rang:

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N \Rightarrow |u_n - \ell| \leq \epsilon. \tag{1.1}$$

Lorsqu'un tel réel ℓ existe, il est nécessairement unique, et est appelé *la* limite de la suite u_n. On dit que (u_n) converge vers ℓ lorsque n tend vers $+\infty$, ce qui s'écrit

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \ell \quad \text{ou bien} \quad u_n \xrightarrow{n\to\infty} \ell.$$

Si un tel réel n'existe pas, on dit que la suite *diverge*.

PREUVE. Il faut justifier l'unicité de la limite. Intuitivement, si il existe deux limites ℓ et ℓ', alors la distance entre ℓ et ℓ' doit être petite car u_n doit être arbitrairement proche des deux nombres à la fois. Mathématiquement, pour tout $\epsilon > 0$, il doit exister $N \in \mathbb{N}$ tel que $|u_N - \ell| < \epsilon/2$ et $|u_N - \ell'| < \epsilon/2$, ce qui implique alors

$$|\ell - \ell'| \leq |\ell - u_N| + |\ell' - u_N| \leq \epsilon.$$

Puisque cette inégalité est vraie pour tout $\epsilon > 0$ arbitrairement petit, en particulier pour $\epsilon = |\ell - \ell'|/2$, il est nécessaire que $\ell = \ell'$. $\square$

La définition de la limite est illustrée sur la Figure 3. Il est aussi utile, en pratique, de définir la notion de divergence vers $+\infty$ ou $-\infty$.

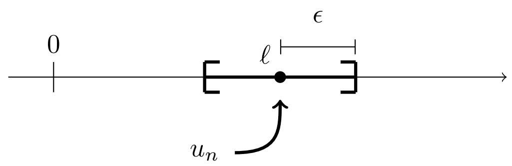


FIGURE 3. $u_n \xrightarrow{n\to+\infty} \ell$: à partir d'un certain rang, tous les u_n sont arbitrairement proches de la limite ℓ.

DEFINITION 1.6. Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite réelle. On dit que u_n tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$ si u_n est aussi grand que l'on veut à partir d'un certain rang:

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow u_n \geq M.$$

Dans ce cas, on note

$$u_n \xrightarrow{n\to+\infty} +\infty \quad \text{ou bien} \lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty.$$

On dit que u_n tend vers $-\infty$ quand n tend vers $+\infty$ si $-u_n$ tend vers $+\infty$.

3. Les trois propriétés fondamentales de l'ensemble des réels

Nous allons maintenant énoncer trois propriétés fondamentales équivalentes et qui distinguent l'ensemble des réels $\mathbb{R}$ par rapport à l'ensemble des rationnels $\mathbb{Q}$. Ces trois propriétés sont à la base de quasi tous les énoncés de l'analyse réelle et complexe. Nous ne donnerons pas de preuves qui nécessiteraient des développements sur la construction formelle de $\mathbb{R}$. Pour commencer, rappelons les notions de majorant, minorant d'un sous ensemble de $\mathbb{R}$.

DEFINITION 1.7. Soit $A \subset \mathbb{R}$ une partie de $\mathbb{R}$. On dit que

- A est majoré si
$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in A, x \leq M$$
- A est minoré si
$$\exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in A, x \geq m$$

REMARQUE 1.2. Vérifier qu'une suite $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est majorée (resp. minorée) si l'ensemble de tous les termes de la suite $A = \{u_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ est majoré (resp. minoré).

La propriété fondamentale des réels est l'existence de la borne supérieure:

THÉORÈME 1.1 (Théorème fondamental des réels (borne supérieure)). *Toute partie $A \subset \mathbb{R}$ majorée et non vide admet un plus petit majorant appelé* borne supérieure. *Ce plus petit majorant est dénoté* $\sup A$ *et satisfait, par définition:*

$$\forall x \in A\,, x \leq \sup A \qquad (\sup A \textit{ est un majorant de } A)$$

$$\forall M \in \mathbb{R},\ (\forall x \in A,\ x \leq M) \Rightarrow \sup A \leq M \qquad (\sup A \textit{ est le plus petit des majorants de } A).$$

On peut montrer que cette propriété est équivalente à la seconde suivante:

THÉORÈME 1.2 (Théorème fondamental des réels (suites croissantes majorées)). *Toute suite croissante majorée converge.*

Enfin, une troisième proposition équivalente peut être formulée à l'aide du concept de *suite de Cauchy* motivé dans l'introduction.

DEFINITION 1.8. Une suite réelle $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est dite *de Cauchy* si l'écart entre deux termes de rangs suffisamment grands est arbitrairement petit:

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \mathbb{N} \in \mathbb{N},\ \forall p \in \mathbb{N},\ \forall q \in \mathbb{N},\ p \geq N \text{ and } q \geq N \Rightarrow |u_p - u_q| \leq 2\epsilon. \tag{1.2}$$

Il est facile de montrer que toute suite de Cauchy est convergente:

PROPOSITION 1.2. *Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite convergente. Alors (u_n) est une suite de Cauchy.*

Preuve. Soit $\ell \in \mathbb{R}$ la limite de la suite (u_n). Alors pour tout $\epsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ assez grand tel que $|u_n - \ell| \leq \epsilon/2$ pour $n \geq N$. On a alors

$$\forall p, q \geq N,\ |u_p - u_q| = |u_p - \ell + \ell - u_q| \leq |u_p - \ell| + |u_q - \ell| \leq \epsilon.$$

□

La proposition précédente est également vraie dans $\mathbb{Q}$: toute suite de rationnels $(r_n) \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ convergeant vers un rationnels $\ell \in \mathbb{R}$ est de Cauchy. Cependant, nous l'avons vu dans l'introduction, la réciproque est fausse dans $\mathbb{Q}$: une suite de Cauchy de $\mathbb{Q}$ peut ne pas converger vers un rationnel. Dans $\mathbb{R}$, cette "pathologie" est soignée:

Théorème 1.3 (Théorème fondamental des réels (suites de Cauchy)). *Une suite réelle $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est de Cauchy si et seulement si elle converge. On dit que $\mathbb{R}$ est complet.*

Les trois précédents théorèmes sont équivalents, vrais pour l'ensemble des réels mais faux sur les rationnels. Par exemple, soit $(r_n) \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ une suite de rationnels croissante et convergeant (dans $\mathbb{R}$) vers un réel $\ell \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. On pose pose $A = \{r_n \,|\, n \in \mathbb{N}\})$. Alors on peut montrer que (r_n) est une suite de Cauchy, croissante et majorée, et pourtant elle ne converge pas dans $\mathbb{Q}$. L'ensemble A est une partie de $\mathbb{Q}$ majorée non vide, mais n'admet pas de borne supérieure dans $\mathbb{Q}$ puisque l'on montre que $\sup A = \ell \in \mathbb{R}$.

4. Propriétés des limites

Nous commençons avec une remarque qui sera utilisée tout au long de cours:

Proposition 1.3. *Une suite $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si la suite des valeurs absolues $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.*

Preuve. Si (u_n) est bornée, il existe $m, M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ m \leq u_n \leq M$, ce qui implique aussi $\forall n \in \mathbb{N}, -u_n \leq -m$ puis $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| = \max(u_n, -u_n) \leq \max(M, -m)$. Réciproquement si $(|u_n|)$ est majorée par $M \in \mathbb{R}$, on peut alors écrire pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq |u_n| \leq M$ et $-u_n \leq |u_n| \leq M$ donc $\forall n \in \mathbb{N}, -M \leq u_n \leq M$. □

Il est pratique d'introduire la *norme infinie* d'une suite bornée (u_n), qui est définie comme le meilleur majorant possible de l'ensemble $\{|u_n| \,|\, n \in \mathbb{N}\}$:

$$||u_n||_\infty = \sup \{\ |u_n| \,|\, n \in \mathbb{N}\}.$$

Nous reviendrons sur cette notion dans le chapitre 3.

Proposition 1.4. *Toute suite convergente est bornée.*

Preuve. Supposons $u_n \xrightarrow{n\to+\infty} \ell$. Pour $\epsilon = 1$, la définition de la limite dit qu'il existe un rang N tel que $\forall n \geq N,\ |u_n - \ell| \leq 1$. Cela implique $\forall n \geq N,\ |u_n| \leq |u_n - \ell| + |\ell| \leq |\ell| + 1$. En définitive, $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leq \max(|\ell| + 1, \max\limits_{0\leq k\leq N} u_k)$. □

Definition 1.9. On dit qu'une suite $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tend vers 0^+ (resp. 0^-) si $u_n \xrightarrow{n\to+\infty} 0$ et si il existe u_n est strictement positif (resp. négatif) à partir d'un certain rang.

La proposition suivante est à connaître intuitivement. Essentiellement, tout se "passe bien" pour les opérations sur les limites de suites sauf dans les cas $\infty - \infty$, $0 \times \infty$, ∞/∞ et $0/0$.

Proposition 1.5 (Compatibilité avec les opérations). *Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles et $\ell, \ell', \lambda \in \mathbb{R}$. Les règles suivantes s'appliquent:*

- $u_n \xrightarrow{n\to+\infty} \ell$ *et* $v_n \xrightarrow{n\to+\infty} \ell' \Rightarrow u_n + \lambda v_n \xrightarrow{n\to+\infty} \ell + \lambda\ell'$ *et* $u_n v_n \xrightarrow{n\to+\infty} \ell\ell'$.
- $u_n \xrightarrow{n\to+\infty} +\infty$ *et* $\lambda > 0 \Rightarrow \lambda u_n \xrightarrow{n\to+\infty} +\infty$ *et* $-\lambda u_n \xrightarrow{n\to+\infty} -\infty$.
- $u_n \xrightarrow{n\to+\infty} 0^+ \Rightarrow 1/u_n \xrightarrow{n\to+\infty} +\infty$ *et* $-u_n \xrightarrow{n\to+\infty} 0^-$.

Preuve. Démontrons seulement le premier point, pour illustrer que toutes ces propriétés viennent de la Definition 1.5. Soit $\epsilon > 0$. Nous avons, à partir d'un certain rang N:

$$\forall n \geq N,\ |u_n + \lambda v_n - (\ell + \lambda\ell')| \leq |u_n - \ell| + |\lambda||v_n - \ell'| \leq (1 + |\lambda|)\epsilon$$

et

$$\forall n \geq N,\ \ |u_n v_n - \ell\ell'| = |(u_n - \ell)v_n + \ell(v_n - \ell')| \leq \epsilon|v_n| + |\ell|\epsilon \leq (||v_n||_\infty + |\ell|)\epsilon,$$

ce qui conclut la preuve, car nous avons montré que les écarts entre les suites respectives $(u_n + \lambda v_n)$ et $(u_n v_n)$ et leurs limites candidates sont aussi petits que l'on veut à partir d'un cetain rang. □

Remarque 1.3. Attention aux formes indéterminées! Par ailleurs, une limite de type $1/0$ est indéterminée à priori, par exemple la suite de terme général $1/((-1)^n e^{-n})$ diverge.

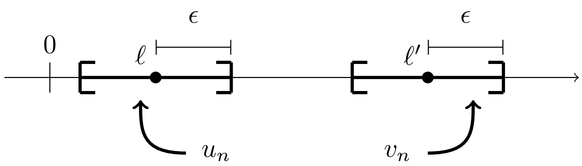
Proposition 1.6 (Passages d'inégalités à la limite). *Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles convergeant respectivement vers deux réels ℓ et ℓ'.*

- *Si $\ell < \ell'$, alors il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que*

$$\forall n \geq N,\, u_n < v_n.$$

- *Réciproquement, si $\forall n \in \mathbb{N},\, u_n \leq v_n$, alors $\ell \leq \ell'$.*

Preuve. La première propriété résulte d'un dessin:



La seconde est la contraposée de la première. □

Remarque 1.4. Attention, si $\forall n \in \mathbb{N},\, u_n < v_n$, cela n'implique pas $\ell < \ell'$. Par exemple, $\forall n \in \mathbb{N},\, \frac{1}{1+n} \geq 0$ et pourtant $\frac{1}{n+1} \xrightarrow{n\to+\infty} 0$.

Proposition 1.7 (Théorème des gendarmes). *Soit (u_n) une suite réelle. Si il existe une suite (α_n) telle que*

$$\forall n \in \mathbb{N},\, |u_n| \leq \alpha_n \text{ avec } \alpha_n \xrightarrow{n\to+\infty} 0,$$

alors

$$u_n \xrightarrow{n\to+\infty} 0.$$

Preuve. Soit $\epsilon > 0$ et N un rang à partir duquel $|\alpha_n| \leq \epsilon$. Alors à partir de ce rang, il est clair que $|u_n| \leq \alpha_n \leq |\alpha_n| \leq \epsilon$, d'où le résultat. □

Remarque 1.5. Le lecteur vérifiera aisément que ce résultat est équivalent à la formulation plus connue suivante: si $v_n \leq u_n \leq w_n$ avec $v_n \xrightarrow{n\to+\infty} \ell$ et $w_n \xrightarrow{n\to+\infty} \ell$, alors $u_n \xrightarrow{n\to+\infty} \ell$ (appliquer la propriété précédente avec $\alpha_n = \max(|w_n - \ell|, |v_n - \ell|)$). En pratique, on n'utilisera que la formulation de la Proposition 1.7 qui est plus pratique.

Exemple 1.1. Si u_n est borné et $v_n \xrightarrow{n\to+\infty} 0$, alors $u_n v_n \xrightarrow{n\to+\infty} 0$. Par exemple,

$$\frac{(-1)^n + \sin(n)}{n+1} \xrightarrow{n\to+\infty} 0.$$

On mentionne enfin le théorème des suites adjacentes, qui ne servira qu'une seule fois dans ce cours (à la Proposition 2.7).

Théorème 1.4 (Suites adjacentes). *Soit $(u_n), (v_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ deux suites vérifiant:*

(1) (u_n) est croissante
(2) (v_n) est décroissante
(3) $u_n - v_n \xrightarrow{n\to+\infty} 0$.

Alors les deux suites (u_n) et (v_n) sont convergentes vers une même limite.

Preuve. Pour commencer, (u_n) et (v_n) sont respectivement majorées et minorées en vertu de

$$\forall n \in \mathbb{N},\, u_n = u_n - v_n + v_n \leq |u_n - v_n| + v_0 \leq ||u_n - v_n||_\infty + v_0$$

$$\forall n \in \mathbb{N},\, v_n = v_n - u_n + u_n \geq u_0 - |u_n - v_n| \geq u_0 - ||u_n - v_n||_\infty$$

(on rappelle que la suite $(u_n - v_n)$ est bornée par convergence). Par conséquent, chacune des deux suites (u_n) et (v_n) convergent. Finalement, les limites doivent être les mêmes en vertu de $u_n - v_n \xrightarrow{n\to+\infty} 0$. □

5. Outils de comparaisons

On introduit maintenant quelques outils et notations qui permettent de simplifier les calculs de limites et de formuler des développements asymptotiques.

Definition 1.10. Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles avec $v_n \neq 0$ à partir d'un certain rang. On dit que:

(1) u_n est équivalent à v_n quand $n \to +\infty$ et l'on note $u_n \sim v_n$ si et seulement si $u_n/v_n \xrightarrow{n\to+\infty} 1$:

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \Leftrightarrow \frac{u_n}{v_n} \xrightarrow{n\to+\infty} 1.$$

(2) u_n est un "petit o" de v_n et l'on note $u_n = o(v_n)$ si et seulement si $u_n/v_n \xrightarrow{n\to+\infty} 0$:

$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n) \Leftrightarrow \frac{u_n}{v_n} \xrightarrow{n\to+\infty} 0.$$

(3) u_n est un "grand O" de v_n et l'on note $u_n = O(v_n)$ si et seulement si u_n/v_n est borné:

$$u_n = O(v_n) \Leftrightarrow \exists C \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}, \left|\frac{u_n}{v_n}\right| \leq C.$$

Moralement, $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ signifie que u_n et v_n ont au premier ordre le même comportement asymptotique quand n va à l'infini. La relation $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$ est la définition mathématique de la notation physique $u_n << v_n$ signifiant que u_n est négligeable devant v_n (pour n suffisamment grand). La relation $u_n = O(v_n)$ signifie que $|u_n|$ n'est *pas plus grand* que $|v_n|$.

Remarque 1.6. En pratique, et dans ce qui suivra, on omettra lorsqu'il n'y a pas d'ambiguité le symbole $n \to +\infty$ sous les symboles $\sim$ et $=$ lorsque l'on écrit les développements asymptotiques. Attention, dans ce contexte, il faut garder à l'esprit qu'une expression de la forme

$$u_n = v_n + o(v_n)$$

sous entend $n \to +\infty$, à ne pas confondre avec une expression de la forme

$$g(x) = f(x) + o(f(x))$$

qui sous entend $x \to 0$.

Nous nous servirons souvent des petit résultats suivant:

Proposition 1.8. *Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles.*

$$u_n \sim v_n \Leftrightarrow u_n = v_n + o(v_n).$$

$$u_n = o(v_n) \Leftrightarrow u_n = \epsilon_n v_n \ \textit{avec}\ \epsilon_n \xrightarrow{n\to+\infty} 0.$$

$$\begin{aligned} u_n \sim v_n \ \textit{ou}\ u_n = o(v_n) &\Rightarrow u_n = O(v_n) \\ &\Rightarrow \exists M \in \mathbb{R}_+, \forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq M|v_n| \end{aligned}$$

Preuve. Remarquer que $u_n{=}o(1) \Leftrightarrow u_n \xrightarrow{n\to+\infty} 0$ puis que $\frac{u_n}{v_n} \xrightarrow{n\to+\infty} 1$ signifie $\frac{u_n}{v_n} = 1 + o(1)$. Pour la seconde équivalence, on peut bien sûr poser $\epsilon_n = \frac{u_n}{v_n}\dots$ □

Les "petits o" et les "grand O" permettent d'écrire des développements asymptotiques du type

$$u_n{=}\log(n) + \frac{\log(n)}{n} + o\left(\frac{\log(n)}{n}\right),$$

qui dit que moralement, u_n se comporte à l'infini comme $\log(n) + \log(n)/n$ plus un terme négligeable devant $\log(n)/n$.

Puisque les relations faisant intervenir des "petits o" et les "grand O" sont écrites avec des "égalités", toutes les opérations usuelles (additions, multiplications, inverse...) sont permises avec ces objets. *Attention*, la relation d'équivalence "$\sim$", quant à elle, est utilisée pour "présenter" le premier terme du développement asymptotique, par exemple avec l'exemple ci-dessus, on a $u_n \sim \log(n)$. On gardera bien cela en tête, en particulier, **on ne peut pas sommer les équivalents** (par exemple, $u_n \sim u_n$ et $-u_n \sim -u_n$ cependant $u_n - u_n \not\sim 0$).

En pratique, on utilisera donc systématiquement les "petits o" et les "grand O" pour effectuer les calculs de limites ou de développements asymptotiques, et on réservera l'usage du symbole "$\sim$" pour la écrire le résultat final.

6. Rappels des limites et développements asymptotiques usuels

Proposition 1.9. *Soit $q \in \mathbb{R}$. La limite de la suite géométrique $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donnée en fonction de $|q|$ par*

$$\lim_{n\to+\infty} q^n = \begin{cases} 0 \text{ si } |q| < 1 \\ 1 \text{ si } q = 1 \\ +\infty \text{ si } |q| > 1. \end{cases}$$

On a alors les résultats suivant:

- Un polynôme en n est équivalent à son terme de degré le plus élevé:
$$\forall p, q \in \mathbb{N},\ p < q \Rightarrow n^p = o(n^q)$$
- Le factoriel gagne contre la puissance:
$$\forall q \in \mathbb{R},\ q^n = o(n!).$$
- La puissance gagne contre le polynôme:
$$\forall p \in \mathbb{N}, \forall q > 1,\ n^p = o(q^n)$$
$$\forall p \in \mathbb{N},\ \forall q \in\ [0,1[,\ q^n = o\left(\frac{1}{n^p}\right)$$
- Le polynôme gagne contre le logarithme:
$$\forall p \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{R},\ \log(n)^p = o(n^q)$$

Développements asymptotiques usuels à savoir retrouver par cœur:

$$e^x \underset{x\to 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots + \frac{x^k}{k!} + o(x^k)$$
$$\cos(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \cdots + \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2k})$$
$$\sin(x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \cdots + \frac{(-1)^{k+1} x^{2k+1}}{(2k+1)} + o(x^{2k+1})$$
$$\frac{1}{1-x} \underset{x\to 0}{=} 1 + x + x^2 + \cdots + x^k + o(x^k)$$
$$\frac{1}{1+x} \underset{x\to 0}{=} 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^k x^k + o(x^k)$$
$$\log(1+x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{k+1}\frac{x^{k+1}}{k+1} + o(x^{k+1})$$

On prendra bien garde au fait que les développements précédents sont valides avec $x \to 0$. On évitera donc d'écrire des âneries du type $\cos(n) = 1 - n^2/2 + o(n^2)$ avec $n \to +\infty$ (rappelons que la fonction cosinus est bornée...). En pratique on applique ces développements via un changement de variable du type $x = v_n$ avec v_n une suite qui tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$.

Exemple 1.2. Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé et (u_n) la suite définie par

$$u_n = \cos(x/n)^{n^2}.$$

Alors

$$u_n \xrightarrow{n\to+\infty} \exp(-x^2/2). \tag{1.3}$$

En effet, on peut écrire pour n suffisamment grand (pour que $\cos(1/n) > 0$):

$$u_n = \exp\left(n^2 \log(\cos(x/n))\right)$$

Puis appliquer le développement du cosinus en 0:

$$\cos(x/n) = 1 - \frac{x^2}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

En appliquant maintenant le développement de $\log(1+y)$ en 0 avec $y = -x^2/(2n^2)$, il vient:

$$\log(\cos(x/n)) = \log\left(1 - \frac{x^2}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = -\frac{x^2}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) + o\left(\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$
$$= -\frac{x^2}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

On obtient donc en multipliant par n^2:

$$u_n = \exp\left(-x^2/2 + o(1)\right) = \exp(-x^2/2)\exp(o(1)).$$

Étant donné que $o(1)$ est une suite qui tend vers 0, on obtient $\exp(o(1)) \xrightarrow{n\to+\infty} 1$ (par continuité de l'exponentielle en 0), puis le résultat (1.3).

CHAPITRE 2

Séries numériques

1. Introduction

Les séries sont un moyen "pratique" de définir de nouveaux nombres ou de nouvelles fonctions à partir de sommes infinies. On en manipule tous les jours via l'écriture décimale: la notation

$$\overline{a_0, a_1 a_2 a_3 \dots}$$

avec $a_k \in \{0, 1, \dots, 9\}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ est une écriture "pratique" de la somme

$$a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{100} + \cdots + \frac{a_k}{10^k} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{10^k}.$$

Lorsque l'on écrit un nombre ayant une infinité de décimale $a_k \in \{0, \dots, 9\}$ non nulles, on utilise donc une abréviation pour faire référence à la somme infinie des $a_k/10^k$. Remarquons que jusqu'au baccalauréat, personne n'a jamais justifié qu'une telle somme infinie a effectivement un sens... Noter que l'écriture d'une telle somme n'est d'ailleurs pas unique, un exemple "amusant" étant l'égalité 0.999999... =1. En effet, par définition de l'écriture décimale,

$$0.9999 \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{9}{10^k} = \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{1 - 1/10} = 1.$$

L'objectif de ce chapitre est de fournir un certain nombre de moyens "pratiques" permettant de déterminer si la somme infinie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$

a un sens étant donnée une suite $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

2. Rappels sur le symbole Σ et analogies discret–continu

Commençons par rappeler l'écriture et les propriétés élémentaires des sommes finies.

Definition 2.1 (Symboles $\sum$ et $\prod$). Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique, réelle ou complexe. On note

$$\sum_{k=p}^{q} u_k = u_p + u_{p+1} + \cdots + u_q \tag{2.1}$$

la somme des u_k pour k allant de p à q, et

$$\prod_{k=p}^{q} u_k = u_p \times u_{p+1} \times \cdots \times u_q \tag{2.2}$$

le produit des u_k pour k allant de p à q.

Remarque 2.1. Il est bon de savoir qu'il y a $q - p + 1$ termes dans la somme $\sum_{k=p}^{q} u_k$ ou dans le produit $\prod_{k=p}^{q} u_k$.

Proposition 2.1 (Analogies somme – intégrale). *Soit (u_n), (v_n) deux suites numériques, $p, q \in \mathbb{N}$, $(a_{k,l}) \in (\mathbb{C} \times \mathbb{C})^{\mathbb{N}}$ une suite à double indices. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, f et g deux fonctions intégrables sur un* *intervalle $[a,b] \subset \mathbb{R}$ et h une fonction de deux variables intégrable sur un pavé $[a,b]\times[c,f] \subset \mathbb{R}^2$. Alors on a les propriétés suivantes pour les sommes discrètes et continues:*

$$\sum_{k=p}^{q}(u_k+v_k) = \sum_{k=p}^{q} u_k + \sum_{k=p}^{q} v_k \qquad \int_a^b (f(x)+g(x))\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

$$\sum_{k=p}^{q}(\lambda u_k) = \lambda \sum_{k=p}^{q} u_k \qquad \int_a^b \lambda f(x)\mathrm{d}x = \lambda \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

$$\sum_{k=1}^{p}\sum_{l=1}^{q} a_{k,l} = \sum_{l=1}^{q}\sum_{k=1}^{p} a_{k,l} \qquad \int_a^b\int_c^d h(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_c^d\int_a^b h(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x.$$

Remarque 2.2. Dans la proposition ci-dessus, on sous-entend en toute rigueur h “Lebesgue intégrable” pour que la formule sur la double intégration (théorème de Fubini) soit vraie.

On pousse maintenant l'analogie un peu plus loin à l'aide du concept de suite dérivée:

Definition 2.2. Soit $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ une suite numérique.

(1) On appelle *suite dérivée* de (u_n) la suite $(D_n(u))$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N},\ D_n(u) = u_{n+1} - u_n. \tag{2.3}$$

(2) On appelle *somme partielle* de (u_n) la suite $S_n(u)$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N},\ S_n(u) = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

La suite dérivée $D_n(u)$ est comparable à un taux d'accroissement, étant donné que

$$v_n = \frac{u_{n+1}-u_n}{(n+1)-n},$$

d'où l'appellation “dérivée”. La somme partielle $S_n(u)$ est l'analogue discret de l'intégrale entre 0 et n. Nous allons maintenant voir que l'intégration et la dérivation discrète ont des propriétés analogues à ce qu'il se passe pour l'intégration et la dérivation des fonctions.

Proposition 2.2 (Analogies séries intégrales – sommes téléscopiques). *Soient $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, $n \in \mathbb{N}$ et f une fonction continument dérivable sur un intervalle $[a,b]$. Alors on a les propriétés analogues suivantes pour la somme discrète et l'intégration:*

$$\sum_{k=0}^{n}(u_{k+1}-u_k) = u_{n+1}-u_0 \qquad \int_a^b f'(x)\mathrm{d}x = f(b)-f(a)$$

$$\sum_{k=0}^{n+1} u_k - \sum_{k=0}^{n} u_k = u_{n+1} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t = f(x).$$

L'analogie de la proposition précédente permet de calculer certaines sommes. Le résultat de l'exemple suivant est à connaître.

Exemple 2.1. La somme des n premiers termes d'une suite géométrique de raison $q \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$ est donnée par

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}.$$

La somme des n premiers entiers est donnée par

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Pour retrouver ces résultats, on utilise l'analogie discret-continu: les sommes ci-dessous se calculent de manière analogue aux intégrales $\int_0^a q^x dx$ et $\int_0^a x\mathrm{d}x$. On se souvient que dans le cas continu, une primitive de $x \mapsto q^x$ est proportionnelle à q^x, et qu'une primitive de $x \mapsto x$ est proportionnelle à $x \mapsto x^2$. On calcule et on somme donc les "dérivées" des suite $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(n^2)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$\forall k \in \mathbb{N},\, q^{k+1} - q^k = (q-1)q^k \Rightarrow \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1}{q-1}\sum_{k=0}^{n}(q^{k+1}-q^k) = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}. \tag{2.4}$$

$$\begin{aligned}&\forall k \in \mathbb{N},\, (k+1)^2 - k^2 = 2k+1\\ &\qquad\Longrightarrow \sum_{k=0}^{n} k = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{n}((k+1)^2-k^2) - \sum_{k=0}^{n} 1\right) = \frac{1}{2}((n+1)^2-(n+1)) = \frac{n(n+1)}{2}.\end{aligned} \tag{2.5}$$

3. Définition et première propriété des séries

Definition 2.3 (Série). Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite réelle. La série de terme général (u_n) est la suite des sommes partielles $(S_n(u))_{n\in\mathbb{N}}$:

$$\forall n \in \mathbb{N},\, S_n(u) = \sum_{k=0}^{n} u_k. \tag{2.6}$$

En général, on note plus simplement $\sum u_n$ cette suite $(S_n(u))$. Si $(S_n(u))$ converge vers une limite finie lorsque n tend vers $+\infty$, on dit que la série $\sum u_n$ converge et on note

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k \tag{2.7}$$

cette limite. Dans le cas contraire, on dit que la série $\sum u_n$ diverge.

Exemple 2.2. Reprenons les sommes de l'Exemple 2.1.

- Pour $q \in \mathbb{R}$, $\sum q^n$ converge si et seulement si $|q| < 1$, et la limite est alors donnée par

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}. \tag{2.8}$$

  Ce résultat est à connaître **par cœur**. Il permet par exemple de retrouver le développement limité de $1/(1-x)$ en $x = 0$.
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} k = +\infty$ donc la série $\sum n$ diverge.

La proposition suivante fournit une condition nécessaire de convergence: le terme général doit tendre vers 0.

Proposition 2.3. *Si $\sum u_n$ converge, alors il est nécessaire que $u_n \xrightarrow{n\to+\infty} 0$.*

Preuve. On écrit que

$$\forall n \geq 1,\, u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k - \sum_{k=0}^{n-1} u_k,$$

puis on passe à la limite quand $n \to +\infty$; les deux sommes du terme de droite convergent vers la même limite $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$. □

Remarque 2.3. Attention, la réciproque de la Proposition 2.3 est fausse: il existe des suites (u_n) telles que $u_n \xrightarrow{n\to+\infty} 0$ sans que les sommes partielles $\sum_{k=0}^{n} u_k$ convergent. Nous verrons ci-dessous l'exemple suivant qui est "canonique":

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \log(n) \xrightarrow{n\to+\infty} +\infty$$

(penser à l'analogue continu $\int_1^x \frac{1}{t}\mathrm{d}t = \log(t)$). Moralement, $\frac{1}{n}$ converge "trop lentement" vers 0 pour que sa série converge.

4. Séries de référence

L'objectif de cette partie est de dresser un "catalogue" de séries de référence (Corollaire 1 ci-dessous) qui permettent d'analyser la convergence de séries plus générales. L'outil essentiel qui permet d'obtenir ce catalogue est la comparaison série-intégrale.

THÉORÈME 2.1 (Comparaison série–intégrale). *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ une fonction positive et décroissante. Alors la série $\sum f(n)$ et l'intégrale $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ sont de même nature , dans le sens où:*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^n f(t)\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} f(k),$$

cette limite pouvant être infinie. De plus:

- *Si $\int_0^n f(t)\mathrm{d}t \xrightarrow{n\to+\infty} +\infty$, alors*
$$\sum_{k=0}^{+\infty} f(k) \sim \int_0^n f(t)\mathrm{d}t \qquad \textit{quand } n \to +\infty.$$
- *Si $\int_0^n f(t)\mathrm{d}t$ converge et $f(n) = o\left(\int_n^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t\right)$ pour $n \to +\infty$, alors*
$$\sum_{k=n}^{+\infty} f(k) \sim \int_n^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t \qquad \textit{quand } n \to +\infty$$

PREUVE. L'idée de la preuve est donnée sur le dessin de la Figure 1. On commence par écrire:

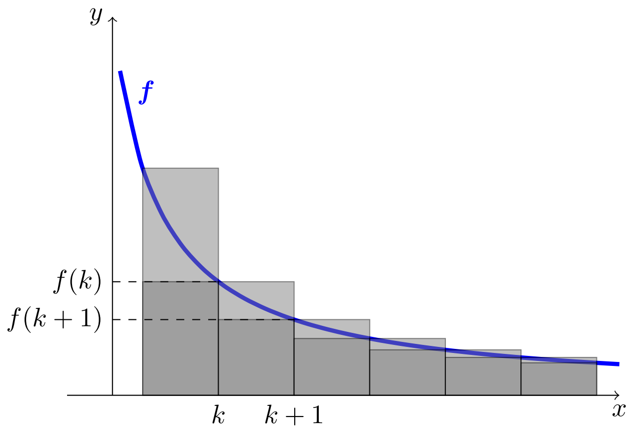


FIGURE 1. Comparaison série intégrale.

$$\forall k \in \mathbb{N},\, \forall t \in [k, k+1],\; f(k+1) \le f(t) \le f(k) \Rightarrow f(k+1) \le \int_k^{k+1} f(t)\mathrm{d}t \le f(k),$$

qui est exactement l'encadrement des aires visibles sur la Figure 1. On somme ces inégalités de $k = 0$ à $k = n-1$ pour obtenir

$$\forall n \in \mathbb{N},\, \sum_{k=1}^{n} f(k) \le \sum_{k=0}^{n-1} \int_k^{k+1} f(t)\mathrm{d}t = \int_0^n f(t)\mathrm{d}t \le \sum_{k=0}^{n-1} f(k).$$

Observer maintenant que tous les termes de cette inégalité sont des suites croissantes en n. Soit elles convergent, soit elles tendent vers $+\infty$. Cet encadrement implique alors que:

- Si $\int_0^n f(t)\mathrm{d}t \to +\infty$, alors il doit en être de même pour la somme et réciproquement. On a alors
$$f(n) - f(0) \le \int_0^n f(t)\mathrm{d}t - \sum_{k=0}^{n} f(k) \le -f(n)$$
puis $\sum_{k=0}^n f(k) = \int_0^n f(t)\mathrm{d}t + O(1)$, car $f(n)$ est borné. Puisque $\int_0^n f(t)\mathrm{d}t \xrightarrow{n\to+\infty} +\infty$, on a $O(1) = o\left(\int_0^n f(t)\mathrm{d}t\right)$ d'où l'équivalent annoncé.

- Si $\int_0^n f(t)\mathrm{d}t$ converge, alors la somme $\sum_{k=0}^n f(k)$ est majorée donc converge, et inversement. En sommant l'encadrement des aires plus haut de n à $+\infty$ on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k) \leq \int_n^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t \leq \sum_{k=n}^{+\infty} f(k)$$

puis

$$\sum_{k=n}^{+\infty} f(k) = \int_n^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t + O(f(n)),$$

d'où le résultat en utilisant l'hypothèse $f(n) = o\left(\int_n^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t\right)$.

□

Le "catalogue" suivant des séries de référence à connaître par cœur:

COROLLAIRE 1 (Séries de référence). *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.*

Série de Riemann: *La série*

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha} \tag{2.9}$$

converge si et seulement si $\alpha > 1$. Pour $\alpha = 1$, on a l'équivalent suivant:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \log(n) \text{ quand } n \to +\infty.$$

Série de Bertrand: *La série*

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n \log^\alpha n} \tag{2.10}$$

converge si et seulement si $\alpha > 1$. Pour $\alpha = 1$, on a l'équivalent suivant:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k \log(k)} \sim \log(\log(n)) \text{ quand } n \to +\infty.$$

Série géométrique: *Soit $q \in \mathbb{R}$. La série*

$$\sum q^n \tag{2.11}$$

converge si et seulement si $|q| < 1$.

PREUVE.
- Pour la série de Riemann, on utilise la comparaison série-intégrale avec $f(x) = x^{-\alpha}$. Pour $\alpha \neq 1$, on a $\int_1^n t^{-\alpha}\mathrm{d}t = \frac{n^{-\alpha+1}-1}{-\alpha+1}$ qui converge quand $n \to +\infty$ si $\alpha > 1$. Pour $\alpha = 1$, on a $\int_1^n t^{-1}\mathrm{d}t = \log(n)$ qui ne converge pas.
- Pour la série de Bertrand, on procède de même avec $f(x) = \frac{1}{x \log^\alpha(x)}$. En posant $y = \log(t)$, on obtient $\int_1^n \frac{\mathrm{d}t}{t \log^\alpha t} = \int_0^{\log(n)} \frac{\mathrm{d}y}{y^\alpha}$, qui converge par le premier point si $\alpha > 1$. Pour $\alpha = 1$, cette intégrale vaut $\log(\log(n))$ d'où l'équivalent annoncé.
- Cf. l'Exemple 2.2 pour la série géométrique.

□

5. Séries à termes positifs

DEFINITION 2.4 (Séries à termes positifs). Une série $\sum u_n$ est appelée "série à termes positifs" si pour tout $n \in \mathbb{N}$, le terme général $u_n \geq 0$ est positif.

La propriété fondamentale des séries à termes positifs est la suivante:

PROPOSITION 2.4. *Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs. Alors une et une seule des deux possibilités suivantes est vraie:*

- *La suite des sommes partielles est majorée, c'est-à-dire*

$$\exists M \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} u_k \leq M.$$

Alors la série $\sum u_n$ converge et on a en fait:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} u_k \leq \sum_{n=0}^{+\infty} u_n. \tag{2.12}$$

- *Dans le cas contraire, la suite des sommes partielles n'est pas majorée et l'on a*

$$\sum_{k=0}^{n} u_k \xrightarrow{n \to +\infty} +\infty.$$

Preuve. Puisque $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$, la suite $S_n(u) = \sum_{k=0}^{n} u_k$ est croissante (on rappelle que $u_n = S_n(u) - S_{n-1}(u)$). Si $(S_n(u))$ est majorée, alors cette suite converge, et autrement elle tend vers $+\infty$. L'inégalité (2.12) résulte du fait que la limite d'une suite croissante est le meilleur majorant de cette suite. □

Dans la pratique, on utilise la proposition précédente de la manière suivante:

Corollaire 2. *Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs tel qu'il existe $M > 0$ tel que*

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M v_n. \tag{2.13}$$

Alors:

(1) si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge. En particulier, si $u_n \sim v_n$ ou $u_n = o(v_n)$, et si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.

(2) si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge. En particulier, si $u_n \sim v_n$ ou $u_n = o(v_n)$, et si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge.

Preuve. (1) En sommant l'équation (2.13), on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} u_k \leq M \sum_{k=0}^{n} v_k \leq M \sum_{n=0}^{+\infty} v_n \tag{2.14}$$

Ainsi la suite des sommes partielles $S_n(u)$ est majorée, donc elle converge. Pour la seconde partie, utiliser la Proposition 1.8.

(2) En sommant l'équation (2.13), l'inégalité $\sum_{k=0}^{n} v_k \geq \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{n} u_k$ avec $\sum_{k=0}^{n} u_k \xrightarrow{n \to +\infty} +\infty$ implique que la série $\sum v_n$ diverge.

□

Les séries de référence du Corollaire 1 fournissent un catalogue de suites (v_n) simples que l'on peut utiliser pour déduire la convergence de séries $\sum u_n$ avec un terme (u_n) positif et plus compliqué.

Exemple 2.3. 1. Quelque soit $\beta \in \mathbb{R}$ et $\alpha > 1$, la série

$$\sum \frac{1}{n^\alpha \log^\beta(n)}$$

converge. En effet, pour tout $\epsilon > 0$ tel que $\alpha - \epsilon > 1$,

$$\frac{1}{n^\alpha \log^\beta(n)} = o\left(\frac{1}{n^{\alpha-\epsilon}}\right)$$

et $\sum \frac{1}{n^{\alpha-\epsilon}}$ converge.

2. La série

$$\sum \frac{n^2}{n!}$$

converge. En effet, en se souvenant que le factoriel "gagne" contre le polynôme,

$$\frac{n^2}{n!} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

et $\sum \frac{1}{n^2}$ converge.

3. La série
$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n+\log(n)+\sqrt{n}}$$
diverge. En effet,
$$\frac{1}{n+\log(n)+\sqrt{n}} \sim \frac{1}{n}$$
et $\sum \frac{1}{n}$ diverge.

REMARQUE 2.4. Attention! Le critère de comparaison des séries ne fonctionne pas si les séries en jeu ne sont pas à termes positifs. Par exemple
$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \sim \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$$
or on verra plus loin que $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge.

On mentionne le critère suivant qui permet de simplifier l'analyse de convergence lorsqu'une série est comparable à la série géométrique:

PROPOSITION 2.5 (Critère de D'Alembert). *Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs. On suppose que*
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow{n\to+\infty} \ell.$$
Alors
- *Si $\ell < 1$, la série $\sum u_n$ converge.*
- *Si $\ell > 1$, la série $\sum u_n$ diverge.*
- *Si $\ell = 1$, on ne peut rien conclure.*

PREUVE.
- Si $\ell < 1$, la Proposition 1.6 montre qu'il existe $q \in \mathbb{R}$ tel que $0 \leq \ell < q < 1$ et tel que à partir d'un certain rang $N \in \mathbb{N}$, on aie
$$\forall n \geq N,\ u_{n+1} < q u_n$$
Ceci implique, par récurrence
$$\forall n \geq N,\ u_n < u_N q^{n-N}$$
En utilisant le critère de comparaison à la série géométrique $\sum q^n$, on en déduit la convergence de la série $\sum u_n$.
- Si $\ell > 1$, on a de même l'existence de $q \in \mathbb{R}$ tel que $1 < q < \ell$ et tel que à partir d'un certain rang $N \in \mathbb{N}$, on aie
$$\forall n \geq N,\ u_{n+1} > q u_n$$
ce qui implique $\forall n \geq N,\ u_n \geq u_N q^{n-N}$. Cette fois, le critère de comparaison montre que
$$\sum_{k=N}^{n} u_k \xrightarrow{n\to+\infty} +\infty.$$

□

6. Séries réelles à termes quelconques

Pour étudier la convergence d'une série $\sum u_n$ avec u_n quelconque, il existe deux outils à disposition: la convergence absolue, qui permet de se ramener au cas d'une série à termes positifs, et un critère dit de "semi-convergence".

PROPOSITION 2.6 (Convergence absolue). *Soit $\sum u_n$ une série à termes quelconques, ce qui signifie que $u_n \in \mathbb{R}$ peut prendre des valeurs positives ou négatives.*
- *Si la série des valeurs absolues $\sum |u_n|$ converge, alors la série $\sum u_n$ converge et on a l'inégalité*
$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|. \tag{2.15}$$
On dit que la série $\sum u_n$ est absolument convergente.
- *Si la série $\sum u_n$ converge mais que $\sum |u_n|$ diverge, on dit que $\sum u_n$ est semi-convergente.*

Sinon, $\sum u_n$ diverge.

Preuve. La preuve la plus simple que la convergence de $\sum |u_n|$ implique la convergence de $\sum u_n$ repose sur la *complétude* de $\mathbb{R}$ (voir le Théorème 1.3). On montre en effet que la suite des sommes partielles est de Cauchy: pour tous $p, q \in \mathbb{N}$,

$$|S_p(u) - S_q(u)| = \left|\sum_{k=0}^{p} u_k - \sum_{k=0}^{q} u_k\right| = \left|\sum_{k=p}^{q} u_k\right| \leq \sum_{k=p}^{q} |u_k| = \left|\sum_{k=0}^{p} |u_k| - \sum_{k=0}^{q} |u_k|\right|.$$

Puisque la série $\sum |u_n|$ est convergente, la suite des sommes partielles $(\sum_{k=0}^{n} |u_k|)$ est de Cauchy. L'inégalité précédente implique alors que $(S_n(u))$ est de Cauchy, donc converge par la propriété des réels du Théorème 1.3. L'inégalité triangulaire (2.15) est obtenue en passant l'inégalité

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left|\sum_{k=0}^{n} u_k\right| \leq \sum_{k=0}^{n} |u_k|$$

à la limite quand $n \to +\infty$. $\square$

Exemple 2.4. La proposition précédente permet d'appliquer les techniques de comparaison de la section précédente sur la série $\sum |u_n|$ (qui est une série à termes positifs) pour obtenir la convergence de la série $\sum u_n$. Par exemple, les séries suivantes sont absolument convergentes:

$$\sum \frac{(-1)^n}{n^2}, \quad \sum \frac{\sin(n)}{n^3}, \quad \sum (-1)^n \tan\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Le second outil fondamental de cette section est un critère de semi-convergence, qui permet de traiter un certain nombre de cas où il n'y a pas convergence absolue:

Proposition 2.7 (Critère de semi-convergence). *Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite vérifiant:*

(1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$
(2) (u_n) est décroissante
(3) $u_n \xrightarrow{n\to+\infty} 0$

Alors la série $\sum(-1)^n u_n$ converge.

Preuve. Soit $S_n(u) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k u_k$. On a $S_{2n+3}(u) - S_{2n+1}(u) = u_{2n+2} - u_{2n+3} \geq 0$ et $S_{2n+2} - S_{2n} = u_{2n+2} - u_{2n+1} \leq$ de sorte que les suites $(S_{2n}(u))$ et $(S_{2n+1}(u))$ sont respectivement décroissantes et croissantes. En outre $S_{2n+1}(u) - S_{2n}(u) = -u_{2n+1} \xrightarrow{n\to+\infty} 0.$ de sorte que par le Théorème 1.4, ces deux suites sont adjacentes et convergent donc vers une même limite. Cela implique que la suite $S_n(u)$ elle-même converge également vers cette limite. $\square$

Exemple 2.5. Les séries

$$\sum \frac{(-1)^n}{n}, \sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}, \sum \frac{(-1)^n}{\log(n)}$$

convergent mais ne convergent pas absolument.

Méthode pratique pour étudier la convergence d'une série.
En pratique, pour étudier la convergence d'une série $\sum u_n$ avec $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$:

(1) On vérifie que $u_n \xrightarrow{n\to+\infty} 0$, sans quoi $\sum u_n$ ne saurait être convergente.
(2) On effectue un développement asymptotique de u_n quand $n \to +\infty$ pour décomposer (u_n) en des termes absolument convergents, semi-convergents, et éventuellement divergents.
(3) On utilise le critère de comparaison du Corollaire 2 pour obtenir la convergence des termes absolument convergents.

Exemple 2.6. La série

$$\sum u_n \text{ avec } u_n = \frac{(-1)^n \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\sqrt{n}}$$

converge. En effet,

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)\right) = \frac{(-1)^n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

$\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge par le critère des séries semi-convergentes et $\sum O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ converge absolument. $\sum u_n$ est la somme de deux séries convergentes, donc converge.

7. Suites et séries à valeurs complexes

Pour finir ce chapitre, on étend les outils des suites et séries au cas complexe.

7.1. Préliminaires: norme et convergence dans $\mathbb{C}$

Definition 2.5. Une suite $(z_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ à valeurs complexes est une application de $\mathbb{N} \to \mathbb{C}$.

Pour définir les limites de suites complexes, on utilise le module, qui joue le rôle de *norme* sur $\mathbb{C}$ comme la valeur absolue jouait ce rôle sur $\mathbb{R}$.

Pour commencer rappelons les notions d'espace vectoriel et de normes sur un espace vectoriel.

Definition 2.6 (Espace vectoriel réel). Un $\mathbb{R}-$espace vectoriel est un triplet $(E, +, \cdot)$ composé d'un ensemble E et de deux opérations $+ \, : \, E \times E \to E$ et $\cdot \, : \, \mathbb{R} \times E \to E$, respectivement appelées *addition* et *multiplication par un scalaire* satisfaisant les axiomes suivant:

1. $+$ est une loi commutative de groupe sur E, autrement dit
   i. $+$ est associative: $\forall x, y, z \in E$, $x + (y + z) = (x + y) + z$
   ii. $+$ admet un élément neutre, noté $\mathbf{0} \in E$, tel que $\forall x \in E$, $\mathbf{0} + x = x + \mathbf{0} = x$
   iii. Tout élément $x \in E$ admet un inverse pour $+$, appelé opposé et noté $(-x)$: $x+(-x) = (-x)+x = 0$.
   iv. La loi $+$ est commutative: $\forall x, y \in E$, $x + y = y + x$.
2. $+$ et $\cdot$ sont compatibles, au sens où elles satisfont:
   i. $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\forall x \in E$, $\lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda\mu) \cdot x$
   ii. $\forall x \in E$, $1 \cdot x = x$ et $0 \cdot x = \mathbf{0}$.
   iii. $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\forall x \in E$, $(\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$
   iv. $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $x, y \in E$, $\lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$.

Dans la pratique, on omet le $\cdot$ lorsqu'on multiplie un vecteur par un scalaire. Rappelons alors la définition d'une norme pour un $\mathbb{R}$ espace vectoriel.

Definition 2.7 (Norme). Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Une application $|| \cdot || \, : \, E \to \mathbb{R}$ est appelée *norme* sur E si elle vérifie les propriétés suivantes:

(1) Positivité:
$$\forall x \in \; E, \; ||x|| \geq 0.$$
(2) Homogénéité:
$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \, \forall x \in E, \; ||\lambda x|| = |\lambda| \, ||x||.$$
(3) Inégalité triangulaire:
$$\forall x, y \in E, \; ||x + y|| \leq ||x|| + ||y||.$$
$$\forall x, y \in E, \; | \, ||x|| - ||y|| \, | \leq ||x - y||.$$
(4) Caractère défini:
$$\forall x \in E, \; ||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

On dit que $(E, || \cdot ||)$ est un espace vectoriel normé.

Exemple 2.7. La Proposition 1.1 dit que la valeur absolue est une norme sur l'ensemble des réels.

On rappelle que tout nombre complexe $z \in \mathbb{C}$ s'écrit de manière unique $z = a + ib$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$, et que le module de z est le nombre positif $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\overline{z}}$.

Proposition 2.8. *Le module* $|\cdot| \, : \, \mathbb{C} \to \mathbb{R}_+$ *est une norme sur l'ensemble* $\mathbb{C}$ *des nombres complexes, vu comme un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel de dimension 2.*

Lorsque l'on dispose d'une norme, on dispose par la même occasion de la notion de limite (voir la Figure 2).

Definition 2.8 (Limite dans un $\mathbb{R}$-e.v. normé). Soit $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$ une suite de E, ce qui signifie que $u_n \in E$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On dit que la suite (u_n) converge vers une limite $\ell \in E$ si u_n est aussi proche que l'on veut de ℓ à partir d'un certain rang:
$$\forall \epsilon > 0, \, \exists N \in \mathbb{N}, \, \forall n \in \mathbb{N}, \, n \geq N \Rightarrow ||u_n - \ell|| < \epsilon.$$
Lorsque la limite existe, elle est nécessairement unique et l'on note $u_n \xrightarrow{n \to +\infty} \ell$ pour la norme $|| \cdot ||$.

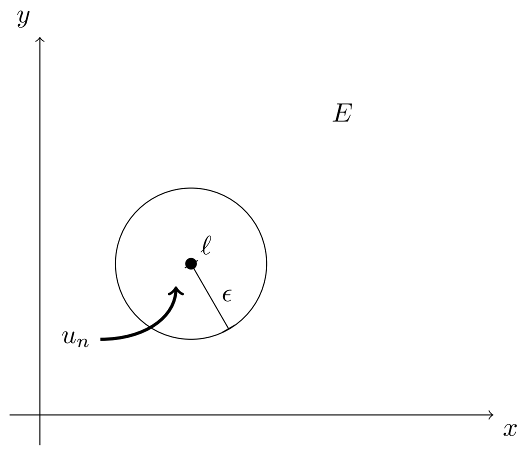


FIGURE 2. À partir d'un certain rang, tous les $u_n \in E$ sont aussi proches de ℓ que l'on veut.

REMARQUE 2.5. On aurait pu aussi définir $u_n \xrightarrow{n\to+\infty} \ell$ dans E si et seulement si la suite réelle $(||u_n - \ell||)_n$ converge vers 0.

On peut donc définir la limite d'une suite complexe de la manière suivante:

DEFINITION 2.9 (Limite d'une suite à valeurs complexes). Soit $(z_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ une suite complexe. On dit que $z_n \xrightarrow{n\to+\infty} \ell$ avec $\ell \in \mathbb{C}$ si

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N},\, n \geq N \Rightarrow |z_n - \ell| \leq \epsilon. \tag{2.16}$$

La proposition suivante montre l'équivalence entre la convergence dans $\mathbb{C}$ au sens donné par la norme du module, et la convergence des parties réelles et imaginaires.

PROPOSITION 2.9. *Soit $(z_n) \in \mathbb{C}$ et $\ell \in \mathbb{C}$ tels que*

$$\forall n \in \mathbb{N}, z_n = a_n + ib_n \text{ avec } a_n \in \mathbb{R},\, b_n \in \mathbb{R}$$

$$\ell = a + ib \text{ avec } a \in \mathbb{R},\, b \in \mathbb{R}$$

Alors

$$z_n \xrightarrow{n\to+\infty} \ell \Leftrightarrow a_n \xrightarrow{n\to+\infty} a \text{ et } b_n \xrightarrow{n\to+\infty} b.$$

PREUVE.

- Si $z_n \xrightarrow{n\to+\infty} \ell$, alors les inégalités

$$\forall n \in \mathbb{N},\, |a - n - a| \leq |z_n - \ell| \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\, |b_n - b| \leq |z_n - \ell|$$

  montrent les convergences de (a_n) et (b_n) vers a et b.
- Réciproquement, si $a_n \xrightarrow{n\to+\infty} a$ et $b_n \xrightarrow{n\to+\infty} b$, alors

$$|z_n - \ell| = \sqrt{(a_n - a)^2 + (b_n - b)^2} \xrightarrow{n\to+\infty} 0$$

  ce qui est précisémment la définition de la convergence de (z_n) vers ℓ.

□

7.2. Complétude et convergence absolue

Il n'y a pas de notion de suite croissante ou décroissante dans $\mathbb{C}$, on utilise donc uniquement l'absolue convergence pour étudier les séries. Rappelons que l'absolue convergence est une propriété qui résulte de la complétude de l'espace, voir la preuve de Proposition 2.6. Il est facile de montrer que $\mathbb{C}$ est complet à partir de la complétude de $\mathbb{R}$:

PROPOSITION 2.10 (Complétude de $\mathbb{C}$). *Soit $(z_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ une suite complexe. On dit que (z_n) est une suite de Cauchy de $\mathbb{C}$ si elle satisfait*

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p, q \in \mathbb{N},\, p \geq N \text{ et } q \geq N \Rightarrow |z_p - z_q| < \epsilon. \tag{2.17}$$

L'ensemble $\mathbb{C}$ est complet: toute suite de Cauchy $(z_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ converge vers une limite $\ell \in \mathbb{C}$, et réciproquement, toute suite convergente est de Cauchy.

Preuve. En notant $z_n = a_n + ib_n$ une suite de Cauchy avec $(a_n), (b_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, il est facile de voir que (a_n) et (b_n) sont des suites de Cauchy de $\mathbb{R}$ en vertu de l'inégalité $|a_p - a_q| \leq |z_p - z_q|$ et $|b_p - b_q| \leq |z_p - z_q|$ pour tous $p, q \in \mathbb{N}$. Les parties imaginaires (a_n) et (b_n) convergent donc, ce qui entraîne la convergence de (z_n) dans $\mathbb{C}$. □

La complétude de l'espace $\mathbb{C}$ implique une propriété de convergence absolue analogue à la Proposition 2.6:

Proposition 2.11 (Convergence absolue des suites complexes). *Soit $\sum z_n$ une série à termes complexes, ce qui signifie que $z_n \in \mathbb{C}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Si la série des modules $\sum |z_n|$ converge dans $\mathbb{R}$, alors la série $\sum z_n$ converge dans $\mathbb{C}$ et l'on a l'inégalité*

$$\left| \sum_{n=0}^{+\infty} z_n \right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |z_n|.$$

On dit que la série $\sum z_n$ converge absolument.

Exemple 2.8. La série

$$\sum z^n$$

converge pour tout $z \in \mathbb{C}$ satisfaisant $|z| < 1$. La série

$$\sum \frac{z^n}{n!}$$

converge pour tout $z \in \mathbb{C}$. On verra plus tard que ce nombre est égal à e^z.

CHAPITRE 3

Suites et séries de fonctions: convergence uniforme, convergence normale

1. Introduction

Le but principal de ce cours est le résultat suivant qui sera rendu précis au prochain chapitre:

Théorème 3.1. *Toute fonction continue 2π-périodique f peut se décomposer en une somme infinie de fonctions sinusoïdales: il existe des coefficients $(a_n), (b_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tels que*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)).$$

Ce théorème énonce donc que tout signal périodique de période 2π est somme de signaux sinusoïdaux de période multiples de 2π, ce qui a des conséquences profondes en physique. La série intervenant ci-dessus dépend de la variable $x \in \mathbb{R}$, en notant $u_n : x \mapsto a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$, f est donc une somme de fonctions:

$$f = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

Afin de pouvoir effectuer toutes sortes de calculs avec de tels objets, des questions naturelles émergent:

- si u_n est continue quel que soit $n \in \mathbb{N}$, f est-elle continue?
- si u_n est dérivable quel que soit $n \in \mathbb{N}$, f est-elle dérivable et peut-on écrire

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n'(x).$$

- si u_n est intégrable sur un intervalle $[a, b]$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$, f est-elle intégrable et peut-on écrire

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b u_n(x)\mathrm{d}x.$$

Répondre à ces questions requiert l'introduction d'une notion de convergence "adaptée" pour les fonctions, qui est l'objet principal de ce chapitre. Il existe de multiples notions de convergence pour les fonctions. Dans ce cours, nous nous contenterons essentiellement de la convergence uniforme qui est la plus "accessible" à notre niveau.

Dans toute la suite de ce chapitre, I est un intervalle de $\mathbb{R}$.

2. Convergence simple et convergence uniforme

La notion la plus intuitive de convergence pour des fonctions est la convergence simple.

Definition 3.1 (Convergence simple). Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions

$$f_n : I \to \mathbb{R}$$

définies sur I. On dit que la suite (f_n) converge simplement vers une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ si

$$\forall x \in I,\ f_n(x) \xrightarrow{n\to+\infty} f(x).$$

On note alors $f_n \xrightarrow{s} f$.

Malheureusement, cette notion de convergence n'est pas assez "forte", car un certains nombre de cas pathologiques peuvent se présenter.

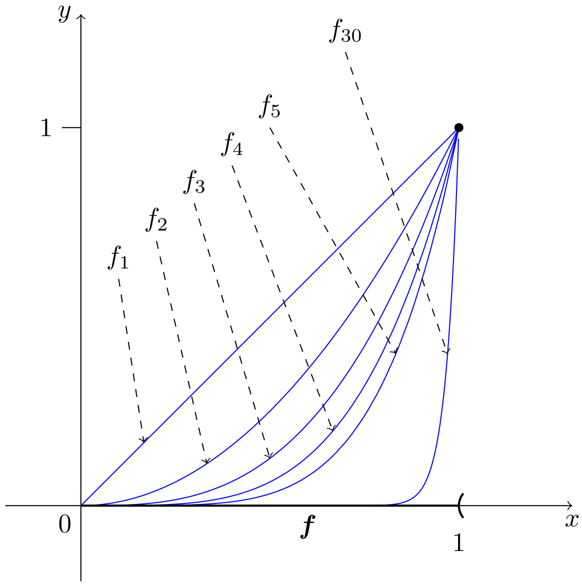


FIGURE 1. Une suite de fonctions continues (f_n) tendant simplement vers une fonction discontinue f.

EXEMPLE 3.1. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définies sur $I = [0,1]$ par

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in\ [0,1],\ f_n(x) = x^n.$$

Quelques fonctions f_n sont tracées sur le graphe de la Figure 1. Alors $f_n \xrightarrow{s} f$ où $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ est la fonction définie par

$$\forall x \in [0,1],\ f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \in\ [0,1[\\ 1 \text{ si } x = 1. \end{cases}$$

En particulier, f est discontinue en 1 bien que toutes les fonctions f_n soient continues.

Nous allons donc étudier une notion de convergence plus forte qui garantit la continuité de la fonction limite. Pour cela, nous allons définir la convergence au moyen d'une norme, comme à la Definition 2.8. Cette norme doit être associée à un $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{E}(I)$ de fonctions, que l'on introduit maintenant.

DEFINITION 3.2 (Espace des fonctions bornées). L'ensemble des fonctions bornées sur I noté

$$\mathcal{E}(I) = \{f : I \to \mathbb{R} \,|\, \exists M \in \mathbb{R}_+,\ \forall x \in I,\ |f(x)| \leq M\},$$

est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel.

PREUVE. Pour vérifier que $\mathcal{E}(I)$ est un espace vectoriel, il est suffisant de vérifier que la somme de deux fonctions bornées et la multiplication par un scalaire d'une fonction bornée restent bornées. □

DEFINITION 3.3 (Norme infinie). Pour toute fonction $f \in \mathcal{E}(I)$, on définit le nombre

$$||f||_\infty = \ \sup\{\ |f(x)| \,|\, x \in I\}\ . \tag{3.1}$$

L'application $||\cdot||_\infty : \mathcal{E}(I) \to \mathbb{R}_+$ ainsi définie est une norme sur $\mathcal{E}(I)$, appelée "norme infinie" ou "norme uniforme".

REMARQUE 3.1. Dans la pratique, on utilise plutôt l'abréviation suivante pour écrire le supremum de la définition (3.1):

$$\sup_{x\in I} |f(x)| := \sup\{|f(x)| \,|\, x \in I\}.$$

Ce supremum existe puisque chaque fonction $f \in \mathcal{E}(I)$ étant bornée, l'ensemble des valeurs $A = \{|f(x)| \,|\, x \in I\}$ est non vide et majoré, il admet donc une borne supérieure (Théorème 1.1). Par définition de la borne supérieure, le nombre $||f||_\infty$ vérifie les propriétés suivantes:

1. $||f||_\infty$ est un majorant de $|f|$:

$$\forall x \in I,\ |f(x)| \leq ||f||_\infty.$$

   $||f||_\infty$ majore donc $|f(x)|$ uniformément en x, d'où l'appellation "norme uniforme".

2. $||f||_\infty$ est plus petit que tout autre majorant de $|f|$:
$$\forall M \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in I, \, |f(x)| \leq M \Longrightarrow \sup_{x \in I} |f(x)| \leq M \tag{3.2}$$
Autrement dit, on peut “passer au sup” dans une inégalité valable pour tout $x \in I$.

En pratique, pour estimer la valeur de $||f||_\infty$, on cherche donc une majoration de $|f(x)|$ par un nombre M qui ne dépende pas de x avant d'appliquer (3.2).

Preuve. Il faut vérifier les axiomes de la Definition 2.7.

1. Positivité: pour tout $f \in \mathcal{E}(I)$, $||f||_\infty \geq 0$ en vertu de
$$\forall x \in I, 0 \leq |f(x)| \leq ||f||_\infty.$$
2. Homogénéité: pour tout $f \in \mathcal{E}(I)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,
$$\forall x \in I, \, |\lambda f(x)| = |\lambda||f(x)|$$
Ce qui implique $||\lambda f||_\infty = |\lambda|||f||_\infty$ en passant au sup.
3. Inégalité triangulaire: pour tout $f, g \in \mathcal{E}(I)$,
$$\forall x \in I, \, |f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq ||f||_\infty + ||g||_\infty$$
Donc en passant au sup, $||f + g||_\infty \leq ||f||_\infty + ||g||_\infty$.
4. Caractère défini: il est clair que si f est la fonction nulle, alors $||f||_\infty = 0$. Réciproquement, si $||f||_\infty = 0$, alors
$$\forall x \in I, \, |f(x)| \leq ||f||_\infty = 0$$
ce qui signifie que $\forall x \in I, f(x) = 0$, autrement dit f est nulle.

□

On dispose d'un espace vectoriel $\mathcal{E}(I)$ et d'une norme $||\cdot||_\infty$ sur $\mathcal{E}(I)$. En recopiant la Definition 2.8, on peut donc définir une notion de convergence relativement à cette norme:

Definition 3.4 (Convergence uniforme). Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $(f_n) \in \mathcal{E}(I)^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions $f_n : I \to \mathbb{R}$ bornées. On dit que (f_n) converge uniformément vers une fonction $f : I \to \mathbb{R} \in \mathcal{E}(I)$ si et seulement si l'écart $||f_n - f||_\infty$ converge vers 0 (dans $\mathbb{R}$), autrement dit si
$$\forall \epsilon > 0, \, \exists N \in \mathbb{N}, \, \forall n \in \mathbb{N}, \, n \geq N \Rightarrow ||f_n - f||_\infty \leq \epsilon.$$
Lorsqu'une telle limite f existe, elle est unique et on note
$$f_n \xrightarrow{u} f$$
pour dire que (f_n) converge uniformément vers f.

Avant de passer en revue les propriétés pratiques de la convergence uniforme, mentionnons qu'il existe d'autres choix de normes possibles pour les fonctions, qui donnent lieu à d'autres modes de convergences (avec d'autres propriétés). N'ayant pas les éléments nécessaires en ce qui concerne les espaces appropriés pour définir ces normes, on doit se contenter dans ce cours de la convergence uniforme. À titre indicatif, voici quelques unes des normes possibles, à comparer avec leurs équivalents discrets: dans le tableau ci-dessous, $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur (de dimension finie) et $f : I \to \mathbb{R}$ est une fonction, autrement dit un vecteur $(f(x))_{x \in I}$ composée d'une infinité de valeurs.

Norme infinie	$\lVert u\rVert_\infty = \max\limits_{1 \leq i \leq n} \lvert u_i\rvert$	$\lVert f\rVert_\infty = \sup\limits_{x \in I} \lvert f(x)\rvert$
Norme 2 (euclidienne)	$\lVert u\rVert_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} u_i^2\right)^{1/2}$	$\lVert f\rVert_2 = \left(\int_I \lvert f(x)\rvert^2 \mathrm{d}x\right)^{1/2}$
Norme p	$\lVert u\rVert_p = \left(\sum_{i=1}^{p} \lvert u_i\rvert^p\right)^{1/p}$	$\lVert f\rVert_p = \left(\int_I \lvert f(x)\rvert^p \mathrm{d}x\right)^{1/p}$

Toujours pour la culture, la notation “infinie” pour la norme uniforme vient de la propriété suivante: $||u||_\infty = \lim\limits_{p \to +\infty} ||u||_p$ et $||f||_\infty = \lim\limits_{p \to +\infty} ||f||_p$.

3. Les propriétés de la convergence uniforme

Les principaux intérêts de la convergence uniforme sont les suivants. Supposons données une suite de fonction $(f_n) \in \mathcal{E}(I)^{\mathbb{N}}$ et $f \in \mathcal{E}(I)$ telles que $f_n \xrightarrow{u} f$.

- La limite uniforme d'une suite de fonctions continues sur un intervalle $[a,b]$ est continue
- On peut échanger limite et intégrale:
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \lim_{n\to+\infty} f_n \mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x.$$
- On peut même sous certaines conditions échanger limite uniforme et dérivation.

Notons que ces propriétés ne sont pas vraies en général pour la limite simple (Definition 3.1). En pratique, ces résultats nous serons essentiellement utiles pour prouver la continuité, dérivabilité, ou calculer des intégrales de séries de fonctions $\sum f_n$ (voir la section suivante).

Proposition 3.1. *La convergence uniforme implique la convergence simple: si $(f_n) \in \mathcal{E}(I)^{\mathbb{N}}$ et $f \in E$,*
$$f_n \xrightarrow{u} f \quad \Longrightarrow \quad f_n \xrightarrow{s} f$$

Preuve. Pour un $x \in I$ fixé, il suffit de remarquer que
$$|f_n(x) - f(x)| \leq ||f_n - f||_\infty \xrightarrow{n\to+\infty} 0.$$
□

Afin de pouvoir énoncer le résultat de continuité de la limite uniforme, commençons par rappeler la définition des classes de régularités.

Definition 3.5. (Espace $\mathcal{C}^k([a,b])$). Pour $k = 0$, on note $\mathcal{C}^0([a,b])$ l'ensemble des fonctions $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continues sur le segment $[a,b]$. Cela signifie que
$$\forall x_0 \in \ [a,b],\ \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$
Pour $k \geq 1$, on note $\mathcal{C}^k([a,b])$ l'ensemble des fonctions f qui sont k fois dérivables sur $[a,b]$ et telles que la dérivée $k-$ième est continue. Enfin, on note $\mathcal{C}^\infty([a,b])$ l'ensemble des fonctions infiniment dérivables sur $[a,b]$

Les ensembles $\mathcal{C}^k([a,b])$ sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels. On rappelle l'inclusion $\mathcal{C}^0([a,b]) \subset \mathcal{E}([a,b])$, où $\mathcal{E}([a,b])$ est l'ensemble des fonctions bornées sur $[a,b]$: toute fonction continue $f \in \ \mathcal{C}^0([a,b])$ est bornée et atteint même ses bornes.

Proposition 3.2 (Continuité de la limite uniforme). *Soit $(f_n) \in \mathcal{C}^0([a,b])$ une suite de fonctions continues convergeant uniformément vers une fonction f. Alors f est une fonction continue:*
$$\forall n \in \mathbb{N},\ f_n \in \mathcal{C}^0([a,b]) \ \text{et}\ f_n \xrightarrow{u} f \quad \Longrightarrow \quad f \in \mathcal{C}^0([a,b]).$$

Preuve. Soit $\epsilon > 0$. Puisque $f_n \xrightarrow{u} f$, on peut trouver $n \in \mathbb{N}$ assez grand et fixé tel que $||f_n - f||_\infty \leq \epsilon$. La fonction f_n est continue en x_0 donc il existe un nombre $\eta > 0$ (qui dépend de x_0 et de n) tel que
$$\forall x \in \ [a,b],\ |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f_n(x) - f_n(x_0)| < \epsilon.$$
On a alors
$$\begin{aligned}\forall x \in [a,b],\ |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| &\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| \\ &\leq 2||f - f_n||_\infty + \epsilon \\ &< 3\epsilon,\end{aligned}$$
ce qui montre précisément la continuité de f en x_0. □

Proposition 3.3 (Interversion limite – intégrale). *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues sur $[a,b]$ et $f \in \mathcal{C}^0([a,b]$ une fonction telle que $f_n \xrightarrow{u} f$. Alors on a la convergence uniforme des primitives:*
$$x \mapsto \int_a^x f_n(x)\mathrm{d}x \quad \xrightarrow{u} \quad x \mapsto \int_a^x f(x)\mathrm{d}x.$$
En particulier, la convergence simple en $x = b$ implique la formule d'interversion limite – intégrale suivante:
$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

Preuve. On utilise la majoration suivante:

$$\forall x \in [a,b], \left|\int_a^x f_n(x)\mathrm{d}x - \int_a^x f(x)\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^x |f_n(x) - f(x)|\mathrm{d}x$$
$$\leq \int_a^b ||f_n - f||_\infty \mathrm{d}x = (b-a)||f_n - f||_\infty \xrightarrow{n\to+\infty} 0.$$

□

De la proposition précédente, on en déduit un théorème de dérivation de la limite uniforme:

Corollaire 3 (Dérivation de la limite uniforme). *Si (f_n) est une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ telle que:*

(1) La suite des dérivées converge uniformément vers une fonction $g \in \mathcal{C}^0([a,b])$:

$$f_n' \xrightarrow{u} g$$

(2) Il y a convergence ponctuelle au point a: il existe une limite $\ell \in \mathbb{R}$ telle que $f_n(a) \xrightarrow{n\to+\infty} \ell$.

Alors la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers une fonction dérivable f et l'on a

$$g = f' \text{ et } \ell = f(a).$$

Preuve. Par la propriété précédente, on a la convergence uniforme des primitives $x \mapsto \int_a^x f_n'(x)\mathrm{d}x$, c'est à dire des fonctions $x \mapsto f_n(x) - f_n(a)$. Par interversion de la limite et de l'intégrale, on a donc la convergence

$$f_n - f_n(a) \quad \xrightarrow{u} \quad x \mapsto \int_a^x g(x)\mathrm{d}x.$$

Enfin, puisque $f_n(a) \xrightarrow{n\to+\infty} \ell$, on obtient la convergence uniforme de (f_n) vers la fonction $f : x \mapsto \ell + \int_a^x g(x)\mathrm{d}x$, qui est dérivable et a pour dérivée la fonction g. □

4. Séries de fonctions, convergence normale

Dans la pratique, on s'intéresse plus souvent à des séries $\sum f_n$ plutôt qu'à des suites f_n, car celles-ci permettent de définir de nouvelles fonctions pour lesquelles il n'existe pas d'expression simple de la somme limite. Les propriétés de la convergence uniforme s'exportent aux séries de fonctions.

4.1. Définitions

Definition 3.6 (Série de fonction). Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{E}(I)^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions bornées sur $[a,b]$. La suite de fonctions $(S_n(f))$ définie par

$$\forall x \in [a,b], \forall n \in \mathbb{N}, S_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$$

est appelée série des fonctions f_n. On note cette suite plus simplement $\sum f_n$.

- Si pour tout $x \in I$, la série $\sum f_n(x)$ converge, on dit que la série $\sum f_n$ converge simplement sur I et on note $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ la fonction limite:
$$\forall x \in I, \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) := \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} f_k(x).$$
- Si de plus, la suite de fonction $(S_n(f))$ converge uniformément sur I, on dit que la série $\sum f_n$ converge uniformément.

Plus explicitement, dire que $\sum f_n$ converge uniformément signifie que

$$\left|\left|\sum_{k=0}^{n} f_k - \sum_{k=0}^{+\infty} f_k\right|\right|_\infty = \left|\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k\right|\right|_\infty \xrightarrow{n\to+\infty} 0.$$

Pour de nombreux cas d'études, le calcul explicite de la norme infinie de la fonction $\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k$ n'est pas évident: il faut d'abord montrer que la série réelle $\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)$ converge, puis trouver une majoration uniforme en x de cette somme infinie qui tende vers 0. On préfère donc utiliser un critère de convergence plus simple à exploiter, à savoir la convergence normale, qui est l'analogue direct de la convergence absolue pour les séries de fonctions.

Proposition 3.4 (Convergence normale). *Soit* $(f_n) \in \mathcal{E}(I)^{\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions bornées sur* I. *Si la série à termes positifs* $\sum ||f_n||_\infty$ *converge, alors la série de fonction* $\sum f_n$ *converge uniformément et l'on a*

$$\left|\left|\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right|\right|_\infty \leq \sum_{n=0}^{+\infty} ||f_n||_\infty.$$

Dans ce cas, on dit que la série de fonctions $\sum f_n$ *converge* normalement *sur* I.

Preuve. La preuve est la même que celle de la Proposition 2.6 pour la convergence absolue des séries réelles, l'ingrédient essentiel étant la *complétude* de l'espace $\mathcal{E}(I)$: une suite de fonctions de $\mathcal{E}(I)$ qui est de Cauchy pour la norme $||\cdot||_\infty$ converge. La complétude de $\mathcal{E}(I)$ peut être admise et est détaillée dans l'appendice 5 ci-dessous. □

Remarque 3.2. La convergence normale de la série de fonctions $\sum f_n$ implique la convergence absolue de $\sum f_n(x)$ pour tout $x \in I$.

4.2. Propriétés de la convergence uniforme des séries de fonctions

Les propriétés suivantes sont à connaître.

Proposition 3.5. *Soit* $\sum f_n$ *une série de fonctions de* $\mathcal{E}(I)$ *convergeant uniformément sur* I. *Alors il est nécessaire que la suite de fonctions* (f_n) *converge uniformément vers 0 sur* I*:*

$$f_n \xrightarrow{u} 0.$$

Preuve. La preuve est la même que celle de la Proposition 2.3. □

Les propositions suivantes sont obtenues en appliquant directement les propriétés de la Section 3 à la suite des sommes partielles $S_n(f) = \sum_{k=n} f_k$:

Proposition 3.6. *Si* $(f_n) \in \mathcal{E}(I)^{\mathbb{N}}$ *est une suite de fonctions continues sur un intervalle* $I = [a, b]$, *et si la série de fonctions* $\sum f_n$ *converge uniformément, alors la limite* $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ *est une fonction continue:*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f_n \in \mathcal{C}^0([a, b]) \text{ et } \sum f_n \text{ converge uniformément sur } [a, b] \Longrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \in \mathcal{C}^0([a, b]).$$

Proposition 3.7 (Intégration terme à terme). *Si* $f_n \in \mathcal{C}^0([a, b])$ *est une fonction continue pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et* $\sum f_n$ *converge uniformément, alors on a la formule d'interversion des symboles* $\sum$ *et* $\int$ *suivante:*

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x.$$

Proposition 3.8 (Dérivation terme à terme). *Si* $f_n \in \mathcal{C}^1([a, b])$ *est une fonction dérivable pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et si:*

(1) la série des dérivées $\sum f_n'$ *converge uniformément*
(2) La série $\sum f_n(a)$ *converge,*

alors la série $\sum f_n$ *converge uniformément. De plus, la limite* $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ *est une fonction dérivable et l'on a la formule*

$$\forall x \in I,\ \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'(x).$$

Dans la pratique, pour étudier une série de fonction $\sum f_n$:

(1) On commence par vérifier que la série $\sum f_n$ converge simplement, c'est à dire que $\sum f_n(x)$ converge pour tout $x \in I$ fixé (sans quoi il ne saurait y avoir convergence uniforme).
(2) On estime $||f_n||_\infty$, et on détermine si $\sum ||f_n||_\infty$ converge. Le cas échéant, la série $\sum f_n$ converge normalement, donc uniformément. On a alors le droit d'appliquer par exemple Proposition 3.6 ou 3.7 ci-dessus.

5. Appendice: l'espace des fonctions bornées est complet pour la norme uniforme

Dans cette appendice, on montre que l'espace $\mathcal{E}(I)$ de la Definition 3.4 est complet, ce qui est l'ingrédient essentiel caché derrière l'implication "convergence normale"⇒"convergence absolue". On note, au passage, que la uniforme d'une suite de fonctions bornées $(f_n) \in \mathcal{E}(I)^{\mathbb{N}}$ est nécessairement bornée. Cette partie du cours n'est pas exigible.

Proposition 3.9. *Soit $(f_n) \in \mathcal{E}(I)^{\mathbb{N}}$ une suites de fonctions. On dit que (f_n) est une suite de Cauchy de $\mathcal{E}(I)$ pour la norme $||\cdot||_\infty$ si*

$$\forall \epsilon > 0,\, \exists N \in \mathbb{N},\, \forall p, q \in \mathbb{N},\, p \geq N \text{ et } q \geq N \Rightarrow ||f_p - f_q||_\infty < \epsilon.$$

L'espace $\mathcal{E}(I)$ est complet: toute suite de Cauchy de $\mathcal{E}(I)$ pour la norme $||\cdot||_\infty$ converge uniformément vers une fonction $f \in \mathcal{E}(I)$ bornée et réciproquement. En outre on a

$$||f_n||_\infty \xrightarrow{n\to+\infty} ||f||_\infty.$$

Preuve. Si $f_n \xrightarrow{u} f$, il est clair que (f_n) est une suite de Cauchy de $\mathcal{E}(I)$ en vertu de

$$||f_p - f_q||_\infty \leq ||f_p - f||_\infty + ||f_q - f||_\infty.$$

Réciproquement, si (f_n) est une suite de Cauchy de $\mathcal{E}(I)$, alors pour tout $x \in I$, la suite $(f_n(x))$ est de Cauchy de $\mathbb{R}$ en vertu de l'inégalité

$$|f_p(x) - f_q(x)| \leq ||f_p - f_q||_\infty.$$

Par conséquent la suite $(f_n(x))$ converge vers un certain réel que l'on note $f(x)$. Il faut maintenant montrer que $f \in \mathcal{E}(I)$ et $f_n \xrightarrow{u} f$.

1. $f_n \xrightarrow{u} f$. Par définition du supremum, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $||f_n - f||_\infty - \frac{1}{n+1}$ ne peut pas être un majorant de $\{|f_n(x) - f(x)| \,|\, x \in I\}$. Il existe donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, un nombre $x_n \in I$ vérifiant:

$$\forall n \in \mathbb{N},\, \exists x_n \in I,\, |f_n(x_n) - f(x_n)| \geq ||f_n - f||_\infty - \frac{1}{n+1}.$$

Alors pour tout $\epsilon > 0$, on note $N \in \mathbb{N}$ un entier tel que pour tous $p, n \geq N$, $||f_p - f_n||_\infty < \epsilon$ et $\frac{1}{n+1} \leq \epsilon$. Pour un tel $n \geq N$, La convergence $f_p(x_n) \xrightarrow{p\to+\infty} f(x_n)$ implique qu'il existe $p_n \geq N$ assez grand tel que $|f_{p_n}(x_n) - f(x_n)| < \epsilon$. On a alors

$$\begin{aligned}\forall n \geq N,\, ||f_n - f||_\infty &\leq \frac{1}{n+1} + |f_n(x_n) - f(x_n)| \\ &\leq \epsilon + |f_n(x_n) - f_{p_n}(x_n)| + |f_{p_n}(x_n) - f(x_n)| \\ &\leq ||f_n - f_{p_n}||_\infty + 2\epsilon \leq 3\epsilon.\end{aligned}$$

Ce qui implique bien $f_n \xrightarrow{u} f$.

2. $f \in \mathcal{E}(I)$. Pour cela il suffit de remarquer que

$$\forall x \in I,\, |f(x)| \leq |f_0(x)| + |f_0(x) - f(x)| \leq ||f_0||_\infty + ||f - f_0||_\infty,$$

ce qui montre que f est bornée sur I. Finalement, en utilisant alors l'inégalité triangulaire

$$\big|||f_n||_\infty - ||f||_\infty\big| \leq ||f_n - f||_\infty \xrightarrow{n\to+\infty} 0,$$

on obtient la convergence annoncée.

□

CHAPITRE 4

Séries de Fourier

Les séries de Fourier ont été introduites historiquement pour construire des solutions analytiques à des équations différentielles décrivant des processus physiques oscillants.

Supposons par exemple qu'une quantité physique y soit la solution de l'équation différentielle

$$y'' + ay' + by = f(t) \tag{4.1}$$

avec $a, b \in \mathbb{R}$ et $f(t)$ un terme source 2π–périodique. Si f est quelconque, on n'est *a priori* pas capable de déterminer une expression simple pour y s'écrivant uniquement à l'aide d'un nombre fini de fonctions usuelles. Cependant, si f est un signal périodique sinusoïdal, par exemple $f(x) = e^{ikx} = \cos(nx) + i\sin(nx)$, il est alors facile de trouver une solution. En effet, si l'on pose $y = C_n e^{inx}$, on constate que

$$y'' + ay + by = (-n^2 + ain + b)C_n e^{inx}$$

donc y est solution en posant

$$C_n = \frac{1}{b - n^2 + ian}.$$

Maintenant, le théorème de décomposition en série de Fourier énonce que toute fonction f continue périodique peut se décomposer en une série de telles fonctions sinusoïdales: il existe toujours des coefficients $c_n(f)$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(f) e^{inx}.$$

Par linéarité, on obtient que la fonction

$$\forall x \in I,\ y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{c_n(f)}{b - n^2 + ian} e^{inx}$$

est une solution de l'équation différentielle (4.1). L'écriture de f sous forme de série trigonométrique a donc permis de trouver une formule pour y sous forme de série.

Dans ce chapitre:

- on établit un théorème de décomposition d'une fonction f périodique et continue (par morceaux) en série de Fourier.
- on énonce des théorèmes permettant de dériver ou d'intégrer sous le signe somme.

1. Coefficients de Fourier des fonctions $\mathcal{C}^k$ par morceaux 2π-périodiques

Definition 4.1. On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est 2π périodique si

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x + 2\pi) = f(x).$$

Naturellement, observer que la fonction $x \to e^{inx}$ est 2π-périodique pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$.

Definition 4.2. On appelle série de Fourier toute série de fonctions en la variable $x \in \mathbb{R}$ de la forme

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx}. \tag{4.2}$$

Les nombres complexes $(c_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ sont appelés coefficients de Fourier.

Remarque 4.1. Une série de Fourier est donc une somme de fonctions trigonométriques. En séparant les sinus des cosinus, on peut réécrire la série (4.2) de manière équivalente sous la forme:

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx} = c_0 + \sum_{n \geq 1} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx).$$

avec $a_n = (c_n + c_{-n})$ et $b_n = i(c_n - c_{-n})$. On constate donc qu'une série de Fourier est à valeurs réelles si et seulement si $c_{-n} = \overline{c_n}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et dans ce cas, $a_n = 2\Re(c_n)$, $b_n = -2\Im(c_n)$. Réciproquement, étant donnée une série de Fourier en termes des coefficients a_n et b_n, les coefficients c_n sont donnés par

$$\forall n \geq 1,\ c_n = \frac{a_n - ib_n}{2} \text{ et } c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}.$$

Dans la pratique, on utilise plutôt la forme complexe (4.2) écrite en terme des $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, car les sommes exponentielles sont plus faciles à calculer.

Exemple 4.1. Montrer que

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} \cos(kt) = \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \cos\left(\frac{n}{2}t\right). \tag{4.3}$$

La question qui va nous intéresser maintenant est la suivante: soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction 2π–périodique. Peut on décomposer f sous la forme

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f) e^{inx} \tag{4.4}$$

pour des coefficients $(c_n(f)) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ à déterminer? Pour des raisons qui apparaitront ci-après, nous aurons besoin que f soit intégrable sur $[0, 2\pi]$ pour répondre à cette question. Par simplicité, nous restreignons donc notre étude aux fonctions f continues par morceaux:

Definition 4.3 (Continuité par morceaux). On dit qu'une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est continue par morceaux sur $[a, b]$ si il existe un nombre fini de points

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_N = b$$

tels que sur chaque intervalle ouvert $]x_k, x_{k+1}[$, f est la restriction d'une fonction continue sur l'intervalle fermé $[x_k, x_{k+1}[$. Autrement dit, f est continue sur chaque intervalle ouvert $]x_k, x_{k+1}[$ et les limites aux bornes

$$\lim_{x\to x_k+} f(x) \qquad \lim_{x\to x_{k+1}-} f(x)$$

existent. On dit que f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $[a, b]$ si sur chaque intervalle $]x_k, x_{k+1}[$, f est la restriction d'une fonction de classe $\mathcal{C}^k$ sur $[x_k, x_{k+1}]$.

Exemple 4.2. (1) Soit $f : [0, 2\pi[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f : x \mapsto \begin{cases} 0 \text{ si } 0 \leq x < \pi \\ \dfrac{1}{4} \text{ si } x = \pi \\ 1 \text{ si } \pi < x < 2\pi \end{cases}$$

Alors f est continue par morceaux sur $[0, 2\pi[$.

(2) La fonction $f : [0, 2\pi[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x = 0, \\ \dfrac{1}{x} \text{ si } 0 < x < 2\pi \end{cases}$$

n'est pas continue par morceaux sur $[0, 2\pi[$.

(3) Soit $f : [0, 2\pi[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } 0 \leq x \leq \pi \\ x - \pi \text{ si } \pi < x < 2\pi \end{cases}$$

f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $[0, 2\pi[$ et continue sur cet intervalle.

L'ensemble $\mathcal{C}^0_{p.m.}([a, b])$ fournit alors une classe de fonctions intégrables.

Definition 4.4 (Intégration des fonctions $\mathcal{C}^0_{p.m.}$). Soit $f \in \mathcal{C}^0_{p.m.}([a, b])$ et une subdivision $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ telle que f est la restriction d'une fonction continue sur chacun des intervalles $[x_k, x_{k+1}]$. On définit l'intégrale de f sur $[a, b]$ par la somme des intégrales sur chacun des intervalles $]x_k, x_{k+1}[$:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x := \sum_{k=0}^{N-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\mathrm{d}x,$$

les intégrales du membre de droite étant prise au sens “classique”.

La première remarque essentielle est que si une décomposition de la forme (4.8) existe, et si l'on peut intervertir les symboles $\sum$ et $\int$ dans le calcul suivant, on peut alors écrire

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-ipx}\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e^{inx}\right)e^{-ipx}\mathrm{d}x = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{inx}e^{-ipx}\mathrm{d}x = c_p(f). \tag{4.5}$$

La dernière égalité est obtenue par le petit lemme suivant à connaître:

Lemme 1. *On a les formules suivantes:*

$$\forall p,n\in\mathbb{Z},\ \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{inx}e^{-ipx}\mathrm{d}x = \begin{cases}1 \ si\ p=n\\ 0\ si\ p\neq n.\end{cases}$$

$$\forall p,n\in\mathbb{Z},\ \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \cos(nx)\cos(px)\mathrm{d}x = \begin{cases}1 \ si\ p=n\\ 0\ si\ p\neq n.\end{cases}$$

$$\forall p,n\in\mathbb{Z},\ \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin(nx)\sin(px)\mathrm{d}x = \begin{cases}1 \ si\ p=n\\ 0\ si\ p\neq n.\end{cases}$$

L'analyse mathématique rigoureuse consiste à définir les $(c_n(f))$ via la formule (4.5), avant de montrer que sous certaines conditions, la série de Fourier $\sum c_n(f)e^{inx}$ obtenue converge et sa somme est égale à $f(x)$. Pour pouvoir définir le coefficient de Fourier $c_n(f)$, il faut donc que la fonction $x\mapsto f(x)e^{-inx}$ soit intégrable sur $[0,2\pi]$, ce qui est permis pour les fonctions $\mathcal{C}^0_{p.m.}$ sur $[0,2\pi]$.

Definition 4.5 (coefficient de Fourier). Soit f une fonction 2π-périodique et continue par morceaux sur $[0,2\pi]$: $f\in\mathcal{C}^0_{p.m.}([0,2\pi])$. On appelle coefficients de Fourier de f les nombres $c_n(f)$ définies pour tout $n\in\mathbb{Z}$ par

$$\forall n\in\mathbb{Z},\ c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}\mathrm{d}x.$$

La série de fonction en x,

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e^{inx}$$

est appelée série de Fourier de f.

2. Propriété des coefficients de Fourier et Théorème de Dirichlet

Toute la question est donc de savoir sous quelle conditions sur f la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e^{inx}$ converge, et si la limite obtenue est égale à $f(x)$. Une première condition nécessaire de suffisante est clairement que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $c_n(f)e^{inx}\xrightarrow{n\to+\infty}0$. Ce résultat est vrai:

Proposition 4.1 (Lemme de Riemann-Lebesgue). *Soit f une fonction 2π-périodique et continue par morceaux sur $[0,2\pi]$. Alors la suite des coefficients de Fourier de f tend vers 0:*

$$c_n(f)\xrightarrow{n\to\pm\infty}0.$$

Preuve. La preuve se décompose en deux étapes: on commence par montrer que le résultat est vrai pour f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, puis on utilise un théorème d'approximation.

- On commence par prouver le résultat pour une fonction en escalier. Soit $a,b\in[0,2\pi]$ et $\mathbf{1}_{[a,b]}$ la fonction 2π-périodique qui vaut 1 sur $[a,b]$ et 0 sur $[0,2\pi]\backslash[a,b]$. Alors pour $n\neq 0$,

$$c_n(\mathbf{1}_{[a,b]}) = \frac{1}{2\pi}\int_a^b e^{-inx}\mathrm{d}x = \frac{e^{-inb}-e^{-ina}}{-2ni\pi}\xrightarrow{n\to\pm\infty}0.$$

  Par linéarité, $c_n(f)\xrightarrow{n\to\pm\infty}0$ pour toute fonction f 2π-périodique et en escalier sur $[0,2\pi]$.
- Supposons maintenant f seulement continue par morceaux sur $[0,2\pi]$ et 2π-périodique. On admet (voir l'appendice de la Section 5 pour la preuve) que f peut être approximée en norme uniforme par une suite de fonctions en escalier sur $[0,2\pi]$: il existe une suite (f_p) de fonctions 2π-périodiques, en escalier, telle que

$$||f_p-f||_\infty\xrightarrow{p\to+\infty}0.$$

Alors on peut écrire

$$c_n(f) = c_n(f_{|n|}) + c_n(f - f_{|n|})$$

avec $c_n(f_{|n|}) \xrightarrow{n\to\pm\infty} 0$ car $f_{|n|}$ est une fonction en escalier. Enfin,

$$|c_n(f - f_{|n|})| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi} (f(x) - f_{|n|}(x))e^{-inx}\mathrm{d}x\right| \le ||f - f_{|n|}||_\infty \xrightarrow{n\to\pm\infty} 0.$$

□

Proposition 4.2. *Si f est 2π périodique et de classe $\mathcal{C}^1$, alors*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ c_n(f') = in\, c_n(f).$$

Preuve. Le résultat est une conséquence de l'intégration par partie suivante:

$$c_n(f') = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f'(x)e^{-inx}\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\left[f(x)e^{-inx}\right]_0^{2\pi} + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} in\, f(x)e^{-inx}\mathrm{d}x.$$

□

Conclusion : le passage en coefficients de Fourier échange dérivation et multiplication par in. Ceci implique le fait **essentiel** suivant: plus une fonction f est dérivable (autrement dit, régulière), et plus la décroissance des coefficients $c_n(f)$ vers 0 est rapide:

Proposition 4.3. *Si f est 2π-périodique, de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathbb{R}$, alors*

$$c_n(f) = o\left(\frac{1}{n^k}\right) \text{ quand } |n| \to \pm\infty.$$

Preuve. D'après la proposition précédente, on a clairement $c_n(f) = \frac{1}{(in)^k}c_n(f^{(k)})$. Puisque $f^{(k)}$ est une fonction continue, la Proposition 4.1 implique $c_n(f^{(k)}) = o(1)$ d'où le résultat. □

Corollaire 4. *Si f est 2π-périodique et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, alors la série de Fourier $\sum c_n(f)e^{inx}$ converge normalement.*

Preuve. Évidemment, la fonction $e_n : x \mapsto e^{inx}$ vérifie $||e_n||_\infty = 1$. □

Le résultat n'est pas satisfaisant car (i) quid des fonctions seulement $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ ou $\mathcal{C}^0_{p.m.}([0, 2\pi])$ et (ii) la limite est-elle f?

Théorème 4.1 (Dirichlet). *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction 2π périodique et continue par morceaux sur $[0, 2\pi]$: $f \in \mathcal{C}^0_{p.m.}([0, 2\pi])$. Alors*

(1) La série de Fourier de f converge simplement sur $\mathbb{R}$: quel que soit $x \in \mathbb{R}$, $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e^{inx}$ converge.

(2) On a la formule suivante:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e^{inx} = \frac{f(x_-) + f(x_+)}{2}$$

avec $f(x_-)$ et $f(x_+)$ les limites à gauche et à droite de x:

$$f(x_-) := \lim_{\substack{t\to x\\ t<x}} f(t) \text{ et } f(x_+) := \lim_{\substack{t\to x\\ t>x}} f(t)$$

En particulier, la somme est égale à $f(x)$ si f est continue au point x.

Preuve. Ce résultat est admis. □

3. Interprétation géométrique des séries de Fourier et formule de Parseval

3.1. Rappels sur les espaces euclidiens.

DEFINITION 4.6 (Produit scalaire). Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Un produit scalaire sur E est une application $< \cdot, \cdot >: E \times E \to \mathbb{R}$ vérifiant les propriétés suivantes:

(1) bilinéarité : $\forall x \in E$, $< x, \cdot >: E \to \mathbb{R}$ et $< \cdot, x >: E \to \mathbb{R}$ sont des applications linéaires
(2) symétrie : $\forall x, y \in E$, $< x, y >=< y, x >$
(3) positivité : $\forall x \in E$, $< x, x >\geq 0$
(4) caractère défini : $\forall x \in E$, $< x, x >= 0 \Leftrightarrow x = 0$

PROPOSITION 4.4. *Étant donné un produit scalaire $< \cdot, \cdot >$ sur E, l'application $x \mapsto ||x||$ définie par $||x|| := \sqrt{< x, x >}$ est une norme sur E appelée* norme euclidienne*, et on a l'inégalité de Cauchy-Schwartz:*

$$\forall x, y \in E, \; | < x, y > | \leq ||x|| \, ||y||.$$

EXEMPLE 4.3. Soit $E = \mathbb{R}^n$. Pour $u = (u_1, \ldots, u_n) = (u_i)_{1\leq i\leq n}$ et $v = (v_1, \ldots, v_n) = (v_i)_{1\leq i\leq n}$, on définit

$$< u, v >:= \sum_{i=1}^{n} u_i v_i. \tag{4.6}$$

Alors $< \cdot, \cdot >$ est un produit scalaire sur E, appelé le produit scalaire *canonique*.

DEFINITION 4.7 (Base orthonormée). Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n. On dit qu'une famille de vecteurs $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ est une *base orthonormée* de E pour le produit scalaire $< \cdot, \cdot >$ si elle vérifie:

$$< e_i, e_j >= \begin{cases} 0 \text{ si } i \neq j \\ 1 \text{ si } i = j. \end{cases} \tag{4.7}$$

Une base orthonormée $(e_i)_{i\in I}$ est une base de E, et tout vecteur $x \in E$ se décompose sur base selon la formule

$$x = \sum_{i=1}^{n} < x, e_i > e_i. \tag{4.8}$$

En outre, la norme euclidienne de x est donnée par

$$||x|| = \left(\sum_{i=1}^{n} | < x, e_i > |^2 \right)^{1/2}. \tag{4.9}$$

REMARQUE 4.2. La relation (4.7) exprime que les vecteurs e_i et e_j sont orthogonaux entre eux (angles à 90 degrés). La relation (4.9) est ni plus ni moins que le "théorème de Pythagore" (observer que (4.8) décompose x en une somme de vecteurs orthogonaux).

3.2. Interprétation géométrique des séries de Fourier

On considère maintenant $E = \{f \in \mathcal{C}^0_{p.m.}(\mathbb{C}) \,|\, f \text{ est } 2\pi- \text{ périodique } \}$ qui est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, mais qui n'est pas de dimension finie. Étant donné deux fonctions f et g, on définit l'application $< \cdot, \cdot >: E \times E \to \mathbb{R}$ suivante:

$$< f, g >:= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)} \mathrm{d}t. \tag{4.10}$$

Lorsque f et g sont des fonctions *réelles*, la formule (4.10) est l'analogue pour les fonctions de (4.6). Il se trouve que $< \cdot, \cdot >$ vérifie *quasiment* toutes les propriétés d'un produit scalaire: pour f et g des fonctions *réelles*,

(1) $< f, \cdot >$ et $< g, \cdot >$ sont linéaires
(2) $< f, g >=< g, f >$
(3) $< f, f >\geq 0$.

L'unique axiome non rigoureusement vérifié est le caractère défini: $< f, f >= 0$ signifie que

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \mathrm{d}t = 0,$$

ce qui implique $f(t) = 0$ à tous les points où f est continue, mais pas nécessairement pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Il se trouve que cette "limitation" apparente peut être résolue en considérant un espace un peu différent de l'espace E, qui vérifie la propriété

$$\forall f \in E', < f, f >= 0 \Rightarrow f = 0.$$

Cet espace, appelé "espace $L^2([0, 2\pi])$", nécessite pour sa définition l'utilisation de l'intégrale de Lebesgue. Sa norme associée, notée habituellement $|| \cdot ||_2$, est donnée par:

$$||f||_{L^2} := \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \mathrm{d}t \right).$$

Essentiellement, on pourra retenir $f \in L^2([0, 2\pi])$ équivaut à dire que l'intégrale $\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \mathrm{d}t$ est bien définie. C'est bien le cas pour les fonctions $f \in \mathcal{C}^0_{p.m.}([0, 2\pi])$.

Nous avons les analogies suivantes:

i. La famille de fonctions $(e^{in\cdot})_{n\in\mathbb{Z}}$ est orthonormale. Le Lemme 1 exprime que

$$< e^{in\cdot}, e^{ip\cdot} >= \begin{cases} 1 \text{ si } p = n \\ 0 \text{ si } p \neq n \end{cases}$$

ii. Le coefficient de Fourier $c_n(f)$ est la composante de f selon le vecteur $e^{in\cdot}$:

$$c_n(f) =< e^{in\cdot}, f >$$

iii. La famille $(e^{in\cdot})_{n\in\mathbb{Z}}$ est une "base" de E au sens que toute fonction f (continue) se décompose sur cette base selon la formule

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall f \in E \cap \mathcal{C}^0(\mathbb{R}), \ f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} < e^{in\cdot}, f > e^{int}. \tag{4.11}$$

Poursuivant cette analogie, nous admettrons que l'analogue de la formule (4.9) est aussi vraie:

Proposition 4.5 (Formule de Parseval). *Soit $f \in \mathcal{C}^0_{p.m.}$ et 2π–périodique. Alors on a la formule suivante:*

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \mathrm{d}t = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2. \tag{4.12}$$

Autrement dit, à partir de la décomposition (4.11), on peut écrire

$$||f||^2 =< f, f >= \sum_{n\in\mathbb{Z}} | < e^{in\cdot}, f > |^2.$$

La formule de Parseval est donc une "généralisation" du théorème de Pythagore aux fonctions.

Exemple 4.4.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

4. Récapitulatif

Les résultats de ce chapitre peuvent être résumés de manière chronologique par rapport à la régularité dont on dispose. Soit f une fonction 2π-périodique:

- Si f est juste "intégrable", alors le coefficient de Fourier existe et tend vers 0:

$$\int_0^1 |f(t)| \mathrm{d}t \text{ existe } \Longrightarrow c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} \mathrm{d}t \xrightarrow{n\to+\infty} 0.$$

- Si f est de carré intégrable ($f \in L^2([0, 2\pi])$), alors f est somme de sa série de Fourier en un sens L^2, et la formule de Parseval est vraie:

$$\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \mathrm{d}t \text{ existe } \Longrightarrow \left|\left| f - \sum_{k=-n}^{n} c_k(f) e^{ik\cdot} \right|\right|_{L^2} \xrightarrow{n\to+\infty} 0$$

$$\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \mathrm{d}t \text{ existe } \Longrightarrow \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \mathrm{d}t = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2$$

- Si $f \in \mathcal{C}^0_{p.m.}([0,2\pi])$, alors le théorème de Dirichlet s'applique et on a la convergence simple de la série de Fourier:
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \frac{f(x^-)+f(x^+)}{2} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e^{inx}$$
- Si $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}^1_{p.m.}(\mathbb{R})$, on peut montrer que la convergence de la série de Fourier est uniforme.
- Si $f \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R})$, avec $k \geq 2$, alors la série de Fourier converge normalement et on a convergence uniforme des séries dérivées. Enfin, la formule
$$c_n(f') = inc_n(f)$$
permet de *dériver* terme à termes.

5. Appendice : densité des fonctions en escalier dans l'ensemble des fonctions continues

DEFINITION 4.8. On dit qu'une fonction f est en escalier sur $[0,2\pi]$ si il existe une subdivision finie
$$0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 2\pi$$
telle que f est constante sur chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}[$ pour $0 \leq i \leq n-1$.

LEMME 2. *Pour $a, b \in [0,2\pi]$, on note $\mathbf{1}_{[a,b[}$ la fonction*
$$\forall x \in [0,2\pi],\ \mathbf{1}_{[a,b[} = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in [a,b[\\ \quad 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$
Alors si f est en escalier comme dans la Definition 4.8, f peut être écrite selon la combinaison linéaire suivante:
$$\forall x \in [0,2\pi[, f(x) = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\mathbf{1}_{[x_i,x_{i+1}[}.$$
Réciproquement, toute fonction f satisfaisant
$$\forall x \in [0,2\pi[, f(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i\mathbf{1}_{[x_i,x_{i+1}[}$$
pour des coefficients a_i et des nombres $x_i \in [0,2\pi[$ est en escalier.

PROPOSITION 4.6. *Soit $f \in \mathcal{C}^0_{p.m.}([0,2\pi])$. Alors il existe une suite de fonctions (f_n) en escalier sur $[0,2\pi]$ qui converge uniformément vers f:*
$$||f_n - f||_\infty \xrightarrow{n\to+\infty} 0.$$

PREUVE. Il suffit de prouver le résultat pour f continue sur un intervalle $[a,b]$, puis de "recoller" les morceaux sur chaque intervalle où f est continue. Soit $n > 0$. Par uniforme continuité de f, il existe $\eta_n > 0$ tel que
$$\forall x, y \in [a,b],\ |x-y| \leq \eta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{1}{n}. \tag{4.13}$$
Sans perte de généralité, on peut supposer que $\eta_n = \frac{b-a}{N}$ pour un N assez grand qui dépend de n. On définit alors f_n la fonction en escalier suivante:
$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{N-1} f(k\eta_n)\mathbf{1}_{[k\eta_n,(k+1)\eta_n[}.$$
On a alors pour un $x \in [a,b]$,
$$|f_n(x) - f(x)| = |f(k_x\eta_n) - f(x)|$$
où k est l'unique entier tel que $k_x\eta_n \leq x < (k_x+1)\eta_n$. Puisque $|x - k_x\eta_n| \leq \eta_n$, on a alors en utilisant (4.13)
$$\forall x \in [a,b], |f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{n}$$
ce qui montre $||f_n - f||_\infty \leq \frac{1}{n}$ puis le résultat. □

CHAPITRE 5

Séries entières

Dans ce chapitre final, nous étudions une catégorie de séries de fonctions où "tout se passe bien". Essentiellement, il s'agit de généraliser les polynômes: on étudie des séries impliquant un nombre infini de monômes:

$$f(z) = \sum a_n z^n, z \in \mathbb{C}$$

Une particularité inédite: dans ce chapitre, les fonctions f que l'on cherche à développer en série sont de la variable complexe z.

Definition 5.1. On appelle "série entière" une série de fonctions de la variable $z \in \mathbb{C}$ de la forme

$$\sum a_n z^n.$$

La suite $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ est appelée suite des coefficients de la série entière.

1. Critère de développement en séries entières basé sur la formule de Taylor-Lagrange avec reste intégral

Les séries entières apparaissent naturellement lorsque l'on écrit des développements limités. Par exemple, nous savons que pour tout $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$,

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

Seulement ce développement ne donne qu'une information locale ($x \to 0$). A-t-on

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$$

quel que soit $x > -1$? La proposition suivante et son corollaire fournissent un critère pour qu'une fonction soit égale à la série obtenue en sommant le développement limité "à l'infini".

Proposition 5.1 (Formule de Taylor-Lagrange avec reste intégral.). *Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur un intervalle $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Alors*

$$\forall x \in [a,b],\ f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t.$$

Preuve. La preuve se fait par récurrence sur n. Pour $n = 0$, la formule se réduit au théorème fondamental de l'analyse:

$$f(b) = f(a) + \int_a^b f'(t)\mathrm{d}t$$

Supposons donc maintenant la formule vraie au rang n et montrons la propriété au rang $n+1$. Si f est de classe $\mathcal{C}^{(n+2)}([a,b])$, alors on peut effectuer l'intégration par partie suivante sur le reste intégral:

$$\begin{aligned}\int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t &= \left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\right]_a^x + \int_a^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\mathrm{d}t \\ &= \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} + \int_a^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

La formule est alors démontrée. □

Remarque 5.1. L'intégration par partie de la preuve précédente est à connaître, car elle permet d'écrire la formule de Taylor-Lagrange sans se tromper.

Corollaire 5. *Si* $f \in \mathcal{C}^\infty([a,b])$ *et si les dérivées de* f *sont uniformément bornées sur* $[a,b]$*:*

$$\exists M > 0\,, \forall n \in \mathbb{N},\ ||f^{(n)}||_\infty \leq M,$$

Alors la série $\sum \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ *converge uniformément sur* $[a,b]$ *vers* f*. En particulier:*

$$\forall x \in [a,b],\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Preuve. On majore uniformément le reste:

$$\forall x \in [a,b],\ \left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{n!}(x-a)^n \right| = \left| \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t \right|$$

$$\leq M \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!}\mathrm{d}t = M\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \leq M\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow{n\to+\infty} 0.$$

□

Exemple 5.1. Puisque $\exp^{(n)} = \exp$ quelque soit $n \in \mathbb{N}$, le critère du corollaire précédent s'applique pour la fonction exponentielle sur tout intervalle $[a,b] \subset \mathbb{R}$ et l'on obtient la formule

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \exp(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

2. Rayon de convergence

Nous étudions maintenant des propriétés plus générales et plus faciles à utiliser pour développer des fonctions en série entières. La remarque essentielle de cette section est que les coefficients a_n d'une série entière ne peuvent pas croître plus vite qu'une certaine puissance.

Proposition 5.2. *Soit* $z_0 \in \mathbb{C}$ *tel que la série* $\sum a_n z_0^n$ *converge. Alors*

$$a_n = o\left(\frac{1}{|z_0|^n}\right).$$

En particulier,

$$\forall z \in \mathbb{C},\ |z| < |z_0| \Rightarrow \sum a_n z^n \text{ converge }.$$

En fait, la série $\sum a_n z^n$ *converge même normalement sur tout disque* $B(0, \delta|z_0|)$ *avec* $0 < \delta < 1$.

Preuve. Le fait que $\sum a_n z_0^n$ implique $a_n z_0^n \xrightarrow{n\to+\infty} 0$, c'est à dire exactement $a_n = o(1/|z_0|^n)$. Ensuite pour $z \in B(0,\delta|z_0|)$, c'est-à-dire $|z| < \delta|z_0|$, on peut écrire

$$|a_n z^n| = o\left(\frac{\delta^n |z_0|^n}{|z_0|^n}\right) = o(\delta^n)$$

Or la série $\sum \delta^n$ converge, d'où le résultat. □

Definition 5.2 (Rayon de convergence). Étant donnée une série entière $\sum a_n z^n$, il existe un nombre réel $R > 0$ (éventuellement, $R = +\infty$) tel que

$$\forall z \in \mathbb{C}, \begin{cases} |z| < R \Rightarrow \sum a_n z^n \text{ converge} \\ |z| > R \Rightarrow \sum a_n z^n \text{ diverge} \end{cases}$$

Ce nombre R est appelé *rayon de convergence* de la série entière et est plus explicitement donné par

$$R := \sup\{r > 0 \,|\, a_n r^n \text{ est borné }\}. \tag{5.1}$$

Preuve. Vérifions que R défini par (5.1) vérifie les deux propriétés de la définition. Si $|z| < R$, alors il existe $r > 0$ tel que $|z| < r < R$ et

$$|a_n z^n| = |a_n r^n (z/r)^n| = o\left(\left|\frac{z}{r}\right|^n\right).$$

Comme $\sum z^n / r^n$ converge absolument, on en déduit la convergence de $\sum a_n z^n$. La seconde implication est analogue et laissée en exercice au lecteur. □

REMARQUE 5.2. Le calcul du rayon de convergence est la première étape nécessaire pour étudier une série entière. Plusieurs cas de figures sont possibles:

(1) $R = +\infty$ (rayon de convergence infini). Dans ce cas $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est défini quel que soit $z \in \mathbb{C}$. Par exemple $\sum \frac{z^n}{n!}$.

(2) $0 < R < +\infty$ (rayon de convergence fini et non nul). La série entière n'est définie que sur le disque (ouvert)
$$B(0, R) = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| < R\}$$
Important: on ne sait pas ce qu'il se passe pour $|z| = R$. La série peut converger ou diverger. Par exemple, $\sum z^n$ (rayon $R = 1$).

(3) $R = 0$ (rayon de convergence nul). Les coefficients a_n grossissent trop vite, et la série entière $\sum a_n z^n$ n'est définie que pour $z = 0$. Par exemple, $\sum n! z^n$.

En pratique, pour calculer le rayon d'une série entière, on peut tenter d'appliquer le critère de d'Alembert sur la suite $a_n z^n$, ou bien directement de trouver une minoration du rayon via l'implication
$$a_n r^n \text{ est borné } \Rightarrow R \geq r.$$

3. Propriétés des séries entières

PROPOSITION 5.3. *Les séries*
$$\sum a_n z^n, \qquad \sum_{n \geq 1} n a_n z^{n-1}, \qquad \sum \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}$$
ont même rayon de convergence R. En particulier, la fonction f définie sur $]-R, R[$ par
$$\forall x \in]-R, R[, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$
est dérivable pour tout $x \in]-R, R[$ et on a
$$\forall x \in]-R, R[,\ f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n-1}.$$
Une primitive de f est donnée par la fonction g définie sur $]-R, R[$ par
$$\forall x \in]-R, R[,\ g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}.$$
En particulier, une série entière est infiniment dérivable à l'intérieur de son disque de convergence.

PREUVE. Il suffit d'appliquer la Proposition 3.8, dont les conditions sont satisfaites par convergence normale des trois séries sur tout disque $B(0, \delta R) \subset B(0, R)$ avec $0 < \delta < 1$. □

Les séries entières usuelles suivantes (qui sont les même que pour les développements limités) sont à connaître:
$$\forall z \in \mathbb{C},\ e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$$
(c'est en fait la définition de la fonction exponentielle...).
$$\forall z \in \mathbb{C},\ \cosh(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$
$$\forall z \in \mathbb{C},\ \sinh(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$
$$\forall z \in \mathbb{C},\ \cos(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$$
$$\forall z \in \mathbb{C},\ \sin(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\forall z \in \mathbb{C},\ |z| < 1,\ \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n$$

$$\forall z \in \mathbb{C},\ |z| < 1,\ \frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n z^n$$

$$\forall z \in \mathbb{C},\ |z| < 1,\ \log(1+z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} z^{n+1}}{(n+1)!} \text{ (c'est la définition de } \log(1+z) \text{ pour } z \in \mathbb{C},\ |z| < 1).$$

$$\forall z \in \mathbb{C},\ |z| < 1,\ \frac{1}{1+z^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n z^{2n}$$

$$\forall z \in \mathbb{C},\ |z| < 1,\ \arctan(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n+1}$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{R},\ \forall z \in \mathbb{C},\ (1+z)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} z^n$$

où le coefficient binomial est défini même pour α réel par

$$\binom{\alpha}{n} := \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}.$$

Le résultat suivant (admis) éclaire ce qui peut se passer au bord du disque de convergence:

Proposition 5.4 (Continuité radiale). *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon $0 < R < +\infty$ fini. Si $\sum a_n z_0^n$ converge pour un $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $|z_0| = R$, alors on a la continuité de la série entière en z_0:*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z_0^n = \lim_{\substack{z \to z_0 \\ |z| < |z_0|}} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n.$$

Exemple 5.2.

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1}.$$

Proposition 5.5 (Unicité du développement en série entière). *On qu'une fonction f est développable en série entière au voisinage de 0 si il existe une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence $R > 0$ non nul tel que*

$$\forall z \in \mathbb{C},\ |z| < R,\ f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n.$$

Si f est développable en série entière en 0, alors les coefficients a_n du développement sont uniques et donnés par

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \frac{f^{(n)}}{n!}.$$

Preuve. Il suffit de dériver n fois la série entière par rapport à $z = x \in \mathbb{R}$ au voisinage de 0, et de calculer la valeur de la série obtenue en 0. $\square$

Remarque 5.3. Il existe des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ non développable en séries entières au voisinage de 0. Par exemple, la fonction

$$f : x \mapsto \begin{cases} \exp(-1/x^2) \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$$

vérifie $f^{(n)}(0) = 0$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$ et pourtant est non nulle.