Optimisation de formes de systèmes multiphysiques

Florian Feppon

Directeurs de thèse : Grégoire Allaire, Charles Dapogny

Encadrement Safran Tech : Julien Cortial, Felipe Bordeu.

Soutenance de thèse

École polytechnique – 16 Décembre 2019

L'optimisation topologique

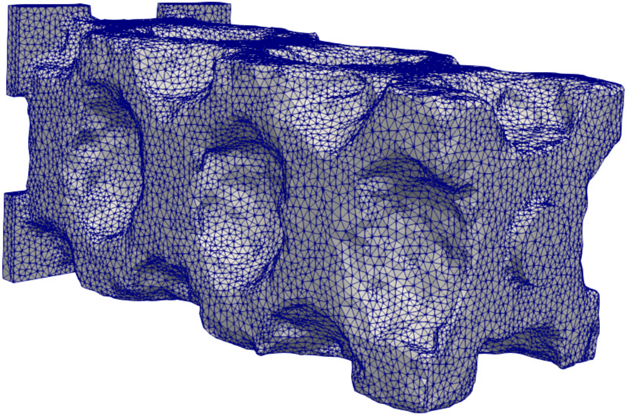


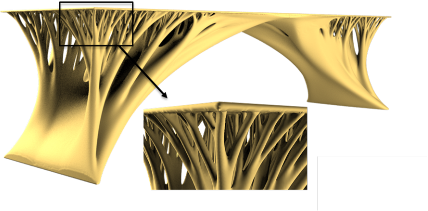
Figure: Optimisation d'une console en flexion

L'optimisation topologique

Un outil de plus en plus mature. . .

(a) Frustum (2017)

(b) APWorks (2016)



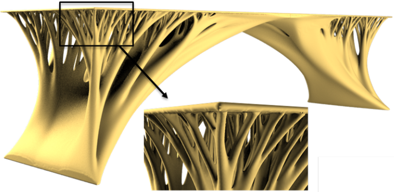
(c) M2DO (Kambampati et. al. 2018)

L'optimisation topologique

Un outil de plus en plus mature. . .

(a) Frustum (2017)

(b) APWorks (2016)

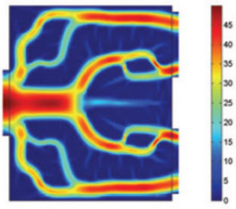


(c) M2DO (Kambampati et. al. 2018)

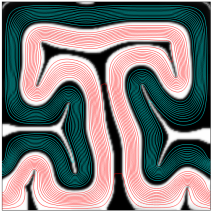
. . . pour les applications en mécanique.

L'optimisation topologique

Pour les systèmes fluides, l'état de l'art est plus limité.



(a) Dede (2009, Toyota)



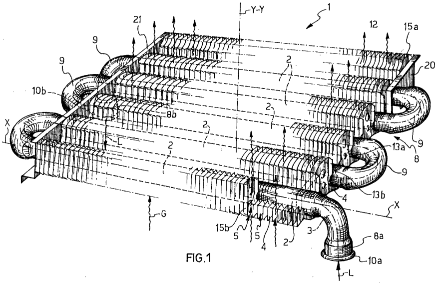
(b) Papazoglou (2015, TU Delft)

(c) Savier (2019, United Technologies)

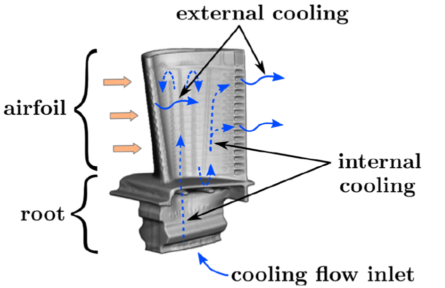
Figure: Canaux de fluides optimisés topologiquement pour des applications en transfert thermique.

L'optimisation topologique

Motivation principale de la thèse : explorer l'optimisation topologique pour les systèmes fluides, thermiques et mécaniques, pour des applications de l'industrie aéronautique.



(a) Échangeur de chaleur gaz-liquide (Giannoni 1999).



(b) Système de refroidissement par canaux internes d'une aube de turbine (Fransen 2013).

Cadre de travail

1. nous introduisons un modèle à trois physiques couplées simplifié

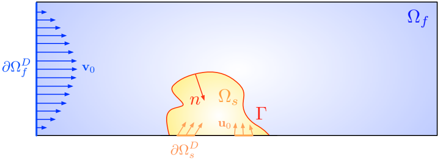
Cadre de travail

1. nous introduisons un modèle à trois physiques couplées simplifié
2. nous considérons la méthode de variations de frontières de Hadamard

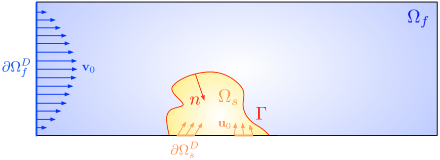
Cadre de travail

1. nous introduisons un modèle à trois physiques couplées simplifié
2. nous considérons la méthode de variations de frontières de Hadamard
3. nous conservons une description maillée de la forme durant tout le processus d'optimisation

Un modèle à trois physiques



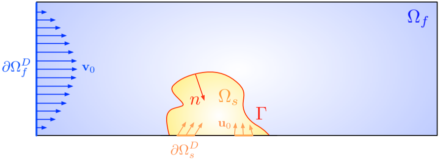
Un modèle à trois physiques



- Navier-Stokes incompressible pour le couple vitesse-pression $(\boldsymbol{v}, p)$ dans Ω_f

$$-\mathrm{div}(\sigma_f(\boldsymbol{v}, p)) + \rho \nabla \boldsymbol{v}\, \boldsymbol{v} = \boldsymbol{f}_f \text{ dans } \Omega_f$$

Un modèle à trois physiques



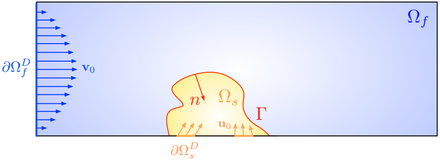
- Navier-Stokes incompressible pour le couple vitesse-pression $(\boldsymbol{v}, p)$ dans Ω_f

$$-\mathrm{div}(\sigma_f(\boldsymbol{v}, p)) + \rho \nabla \boldsymbol{v}\, \boldsymbol{v} = \boldsymbol{f}_f \text{ dans } \Omega_f$$

- Convection-diffusion pour la température T dans Ω_f et Ω_s :

$$\begin{aligned} -\mathrm{div}(k_f \nabla T_f) + \rho \boldsymbol{v} \cdot \nabla T_f &= Q_f \quad \text{dans } \Omega_f \\ -\mathrm{div}(k_s \nabla T_s) &= Q_s \quad \text{dans } \Omega_s \end{aligned}$$

Un modèle à trois physiques



- Navier-Stokes incompressible pour le couple vitesse-pression $(\boldsymbol{v}, p)$ dans Ω_f

$$-\mathrm{div}(\sigma_f(\boldsymbol{v}, p)) + \rho\nabla\boldsymbol{v}\,\boldsymbol{v} = \boldsymbol{f}_f \text{ dans } \Omega_f$$

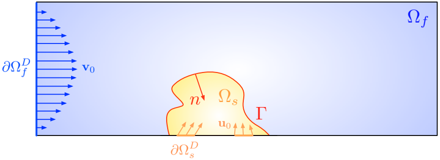
- Convection-diffusion pour la température T dans Ω_f et Ω_s :

$$\begin{aligned} -\mathrm{div}(k_f\nabla T_f) + \rho\boldsymbol{v}\cdot\nabla T_f &= Q_f \quad \text{dans } \Omega_f \\ -\mathrm{div}(k_s\nabla T_s) &= Q_s \quad \text{dans } \Omega_s \end{aligned}$$

- Thermo-élasticité avec interaction fluide structure pour la déformation mécanique $\boldsymbol{u}$ dans Ω_s :

$$\begin{aligned} -\mathrm{div}(\sigma_s(\boldsymbol{u}, T_s)) &= \boldsymbol{f}_s && \text{dans } \Omega_s \\ \sigma_s(\boldsymbol{u}, T_s)\cdot\boldsymbol{n} &= \sigma_f(\boldsymbol{v}, p)\cdot\boldsymbol{n} && \text{sur } \Gamma. \end{aligned}$$

Un modèle à trois physiques



- Navier-Stokes incompressible pour le couple vitesse-pression $(\boldsymbol{v}, p)$ dans Ω_f

$$-\mathrm{div}(\sigma_f(\boldsymbol{v}, p)) + \rho \nabla \boldsymbol{v}\, \boldsymbol{v} = \boldsymbol{f}_f \text{ dans } \Omega_f$$

- Convection-diffusion pour la température T dans Ω_f et Ω_s :

$$\begin{aligned} -\mathrm{div}(k_f \nabla T_f) + \rho \boldsymbol{v} \cdot \nabla T_f &= Q_f \quad \text{dans } \Omega_f \\ -\mathrm{div}(k_s \nabla T_s) &= Q_s \quad \text{dans } \Omega_s \end{aligned}$$

- Thermo-élasticité avec interaction fluide structure pour la déformation mécanique $\boldsymbol{u}$ dans Ω_s :

$$\begin{aligned} -\mathrm{div}(\sigma_s(\boldsymbol{u}, T_s)) &= \boldsymbol{f}_s \qquad \text{dans } \Omega_s \\ \sigma_s(\boldsymbol{u}, T_s) \cdot \boldsymbol{n} &= \sigma_f(\boldsymbol{v}, p) \cdot \boldsymbol{n} \qquad \text{sur } \Gamma. \end{aligned}$$

Le modèle est *faiblement* couplé (Ω_f ne se déforme pas).

Notre objectif : résoudre des problèmes d'optimisation sous contraintes du type

$$\min_{\Gamma} \quad J(\Gamma, \boldsymbol{v}(\Gamma), p(\Gamma), T(\Gamma), \boldsymbol{u}(\Gamma))$$

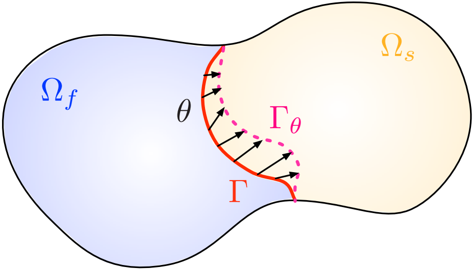
$$s.c. \begin{cases} g_i(\Gamma, \boldsymbol{v}(\Gamma), p(\Gamma), T(\Gamma), \boldsymbol{u}(\Gamma)) = 0, & 1 \leq i \leq p, \\ h_j(\Gamma, \boldsymbol{v}(\Gamma), p(\Gamma), T(\Gamma), \boldsymbol{u}(\Gamma)) \leq 0, & 1 \leq j \leq q, \end{cases}$$

J : la fonction objectif

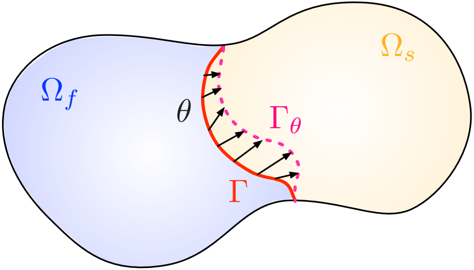
g_i : les contraintes d'égalité

h_j : les contraintes d'inégalité

$$\min_{\Gamma} \; J(\Gamma)$$



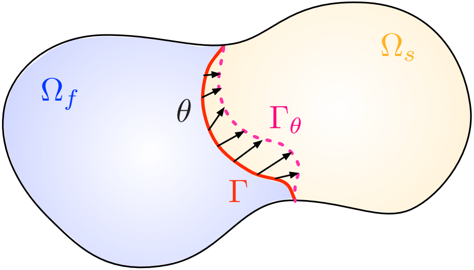
$$\min_{\Gamma} J(\Gamma)$$



$$\Gamma_{\boldsymbol{\theta}} = (I + \boldsymbol{\theta})\Gamma, \text{ avec } \boldsymbol{\theta} \in W_0^{1,\infty}(D, \mathbb{R}^d), \ ||\boldsymbol{\theta}||_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d)} < 1.$$

La méthode de variations de frontières de Hadamard

$$\min_{\Gamma} \; J(\Gamma)$$



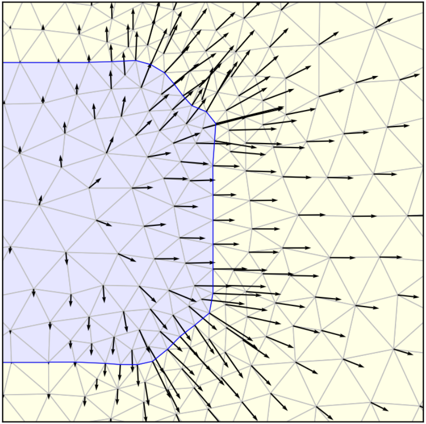
$$\Gamma_{\boldsymbol{\theta}} = (I + \boldsymbol{\theta})\Gamma, \text{ avec } \boldsymbol{\theta} \in W_0^{1,\infty}(D, \mathbb{R}^d), \; ||\boldsymbol{\theta}||_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d)} < 1.$$

$$J(\Gamma_{\boldsymbol{\theta}}) = J(\Gamma) + \frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{\theta}) + o(\boldsymbol{\theta}), \qquad \text{avec } \frac{|o(\boldsymbol{\theta})|}{||\boldsymbol{\theta}||_{W^{1,\infty}(D,\mathbb{R}^d)}} \xrightarrow{\boldsymbol{\theta}\to 0} 0.$$

Méthode d'évolution de formes par remaillage

Nous utilisons l'algorithme proposé par Allaire, Dapogny, Frey (2013): méthode level-set couplée à du remaillage.

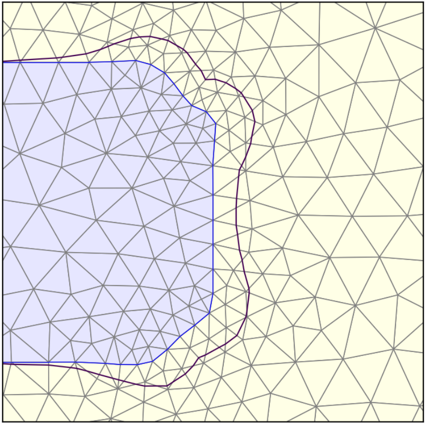
Étant donné un domaine Ω_f discrétisé et un champ de déformation $\boldsymbol{\theta}$.



Nous utilisons l’algorithme proposé par Allaire, Dapogny, Frey (2013): méthode level-set couplée à du remaillage.

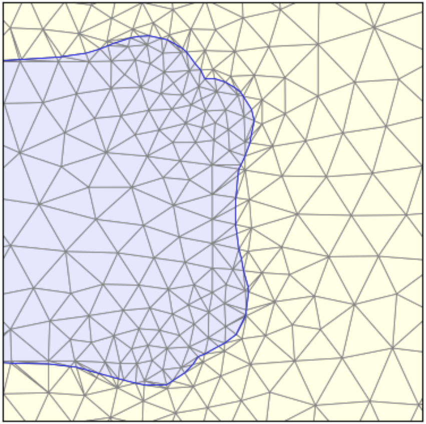
Advection d’une fonction lignes de niveaux décrivant Ω_f.

$$\partial_t \phi + \boldsymbol{\theta} \cdot \nabla \phi = 0$$



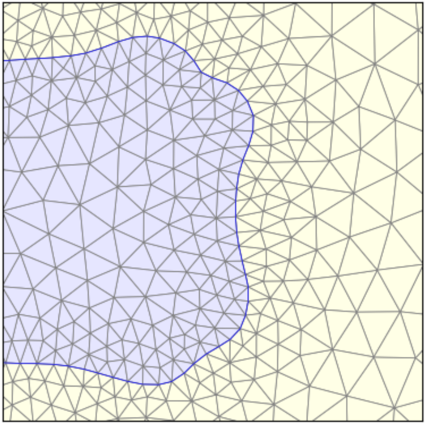
Nous utilisons l'algorithme proposé par Allaire, Dapogny, Frey (2013): méthode level-set couplée à du remaillage.

Discrétisation du nouveau domaine (avec la librairie `mmg`).



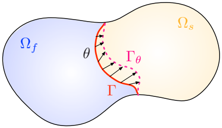
Nous utilisons l'algorithme proposé par Allaire, Dapogny, Frey (2013): méthode level-set couplée à du remaillage.

Remaillage adaptatif du nouveau domaine (avec la librairie `mmg`).

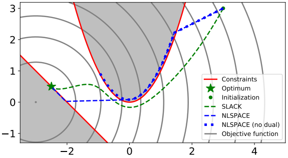


Plan et contributions

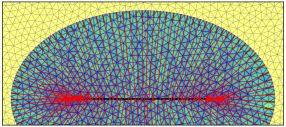
I. Calcul des dérivées de forme



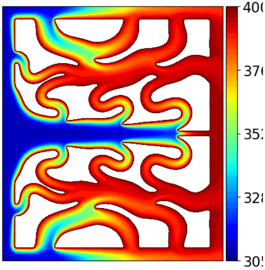
II. Algorithme d'optimisation "null space"



III. Implémentation des contraintes géométriques

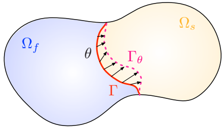


IV. Application : échangeurs de chaleur 2-d

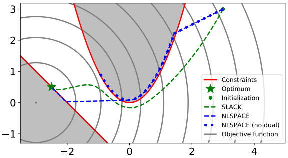


Plan et contributions

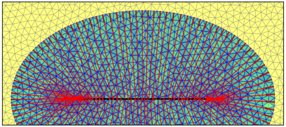
I. Calcul des dérivées de forme



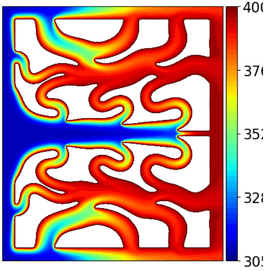
II. Algorithme d'optimisation "null space"



III. Implémentation des contraintes géométriques

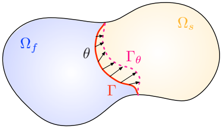


IV. Application : échangeurs de chaleur 2-d

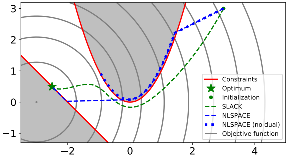


Plan et contributions

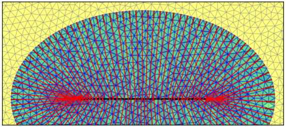
I. Calcul des dérivées de forme



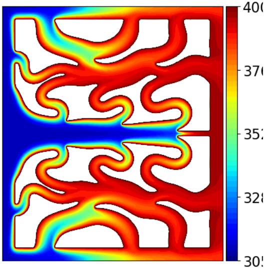
II. Algorithme d'optimisation "null space"



III. Implémentation des contraintes géométriques

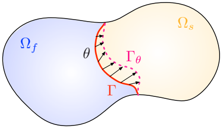


IV. Application : échangeurs de chaleur 2-d

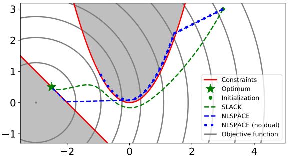


Plan et contributions

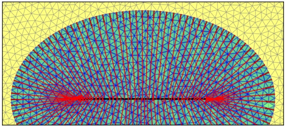
I. Calcul des dérivées de forme



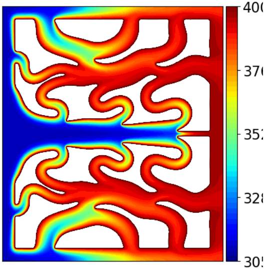
II. Algorithme d'optimisation "null space"



III. Implémentation des contraintes géométriques

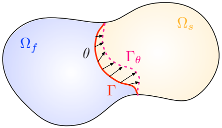


IV. Application : échangeurs de chaleur 2-d

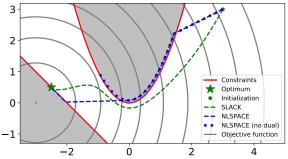


Plan et contributions

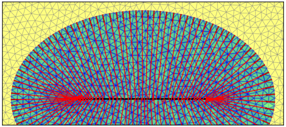
I. Calcul des dérivées de forme



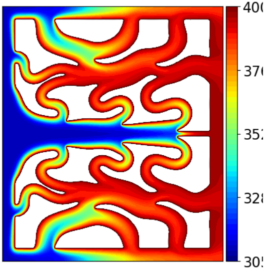
II. Algorithme d'optimisation "null space"



III. Implémentation des contraintes géométriques

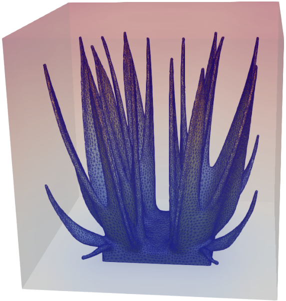


IV. Application : échangeurs de chaleur 2-d

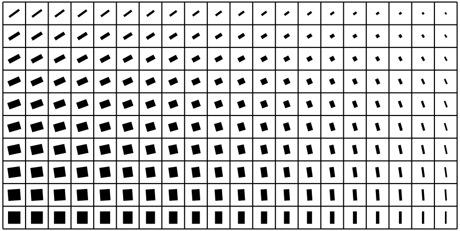


Plan et contributions

V. Implémentation de cas tests 3-d

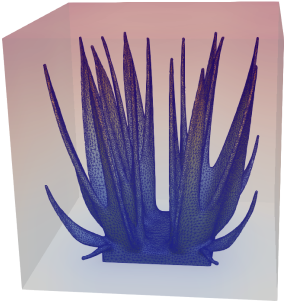


Conclusion : vers l'optimisation des systèmes poreux par la méthode d'homogenéisation

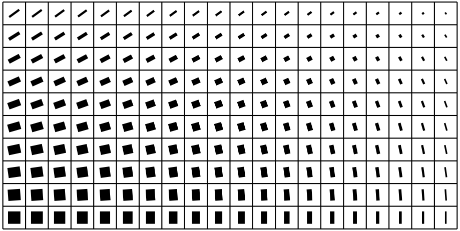


Plan et contributions

V. Implémentation de cas tests 3-d

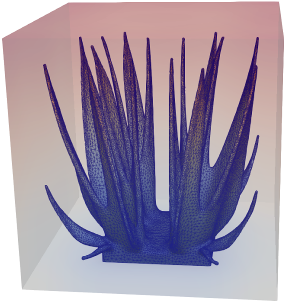


Conclusion : vers l'optimisation des systèmes poreux par la méthode d'homogenéisation

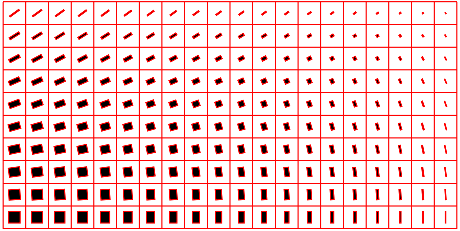


Plan et contributions

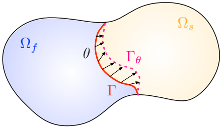
V. Implémentation de cas tests 3-d



Conclusion : vers l'optimisation des systèmes poreux par la méthode d'homogenéisation



I. Calcul des dérivées de forme



II. Algorithme d'optimisation "null space"

III. Implémentation des contraintes géométriques

IV. Application : échangeurs de chaleur 2-d

I. Calcul des dérivées de forme

Étant donnée une fonctionnelle $J(\Gamma, \boldsymbol{v}(\Gamma), p(\Gamma), T(\Gamma), \boldsymbol{u}(\Gamma))$:

- nous disposons d'une formule permettant le calcul automatique de la dérivée de forme

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}\boldsymbol{\theta}}\left[J(\Gamma_{\boldsymbol{\theta}}, \boldsymbol{v}(\Gamma_{\boldsymbol{\theta}}), p(\Gamma_{\boldsymbol{\theta}}), \boldsymbol{u}(\Gamma_{\boldsymbol{\theta}}))\right]$$

  à partir des seules dérivées partielles

$$\frac{\partial J}{\partial \boldsymbol{\theta}}, \frac{\partial J}{\partial(\boldsymbol{v}, p)}, \frac{\partial J}{\partial T}, \frac{\partial J}{\partial \boldsymbol{u}}$$

  faciles à calculer par un utilisateur externe ;

Étant donnée une fonctionnelle $J(\Gamma, \boldsymbol{v}(\Gamma), p(\Gamma), T(\Gamma), \boldsymbol{u}(\Gamma))$:

- nous disposons d'une formule permettant le calcul automatique de la dérivée de forme

  $$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}\boldsymbol{\theta}}\left[J(\Gamma_{\boldsymbol{\theta}}, \boldsymbol{v}(\Gamma_{\boldsymbol{\theta}}), p(\Gamma_{\boldsymbol{\theta}}), \boldsymbol{u}(\Gamma_{\boldsymbol{\theta}}))\right]$$

  à partir des seules dérivées partielles

  $$\frac{\partial J}{\partial \boldsymbol{\theta}}, \frac{\partial J}{\partial(\boldsymbol{v}, p)}, \frac{\partial J}{\partial T}, \frac{\partial J}{\partial \boldsymbol{u}}$$

  faciles à calculer par un utilisateur externe ;
- requiert la résolution d'un système adjoint en formulation variationnelle

Étant donnée une fonctionnelle $J(\Gamma, \boldsymbol{v}(\Gamma), p(\Gamma), T(\Gamma), \boldsymbol{u}(\Gamma))$:

- nous disposons d'une formule permettant le calcul automatique de la dérivée de forme

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}\boldsymbol{\theta}}\left[J(\Gamma_{\boldsymbol{\theta}}, \boldsymbol{v}(\Gamma_{\boldsymbol{\theta}}), p(\Gamma_{\boldsymbol{\theta}}), \boldsymbol{u}(\Gamma_{\boldsymbol{\theta}}))\right]$$

  à partir des seules dérivées partielles

$$\frac{\partial J}{\partial \boldsymbol{\theta}}, \frac{\partial J}{\partial(\boldsymbol{v}, p)}, \frac{\partial J}{\partial T}, \frac{\partial J}{\partial \boldsymbol{u}}$$

  faciles à calculer par un utilisateur externe ;
- requiert la résolution d'un système adjoint en formulation variationnelle
- l'implémentation permet une spécification et des changements aisés de J, g_i, h_i.

Proposition

Soit $J(\Gamma, \boldsymbol{u}, T, \boldsymbol{v}, p)$ *une fonctionnelle de coût arbitraire. Si* J *admet des dérivées partielles continues, alors* $\Gamma \mapsto J(\Gamma, \boldsymbol{u}(\Gamma), T(\Gamma), \boldsymbol{v}(\Gamma), p(\Gamma))$ *est dérivable par rapport à la forme et la dérivée est donnée par :*

Proposition

Soit $J(\Gamma, \boldsymbol{u}, T, \boldsymbol{v}, p)$ une fonctionnelle de coût arbitraire. Si J admet des dérivées partielles continues, alors $\Gamma \mapsto J(\Gamma, \boldsymbol{u}(\Gamma), T(\Gamma), \boldsymbol{v}(\Gamma), p(\Gamma))$ est dérivable par rapport à la forme et la dérivée est donnée par :

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\boldsymbol{\theta}}\Big[J(\Gamma_{\boldsymbol{\theta}}, \boldsymbol{v}(\Gamma_{\boldsymbol{\theta}}), p(\Gamma_{\boldsymbol{\theta}}), T(\Gamma_{\boldsymbol{\theta}}), \boldsymbol{u}(\Gamma_{\boldsymbol{\theta}}))\Big](\boldsymbol{\theta}) \\
&\quad = \overline{\frac{\partial \mathfrak{J}}{\partial \boldsymbol{\theta}}}(\boldsymbol{\theta}) + \int_\Gamma (\boldsymbol{f}_f \cdot \boldsymbol{w} - \sigma_f(\boldsymbol{v}, p) : \nabla \boldsymbol{w} + \boldsymbol{n} \cdot \sigma_f(\boldsymbol{w}, q) \nabla \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} + \boldsymbol{n} \cdot \sigma_f(\boldsymbol{v}, p) \nabla \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{n})(\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{n}) \mathrm{d}s \\
&\quad + \int_\Gamma \left(k_s \nabla T_s \cdot \nabla S_s - k_f \nabla T_f \cdot \nabla S_f + Q_f S_f - Q_s S_s - 2k_s \frac{\partial T_s}{\partial \boldsymbol{n}} \frac{\partial S_s}{\partial \boldsymbol{n}} + 2k_f \frac{\partial T_f}{\partial \boldsymbol{n}} \frac{\partial S_f}{\partial \boldsymbol{n}} \right) (\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{n}) \mathrm{d}s \\
&\quad + \int_\Gamma \left(\sigma_s(\boldsymbol{u}, T_s) : \nabla \boldsymbol{r} - \boldsymbol{f}_s \cdot \boldsymbol{r} - \boldsymbol{n} \cdot Ae(\boldsymbol{r}) \nabla \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n} - \boldsymbol{n} \cdot \sigma_s(\boldsymbol{u}, T_s) \nabla \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{n} \right) (\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{n}) \mathrm{d}s
\end{aligned}$$

Proposition

Soit $J(\Gamma, \boldsymbol{u}, T, \boldsymbol{v}, p)$ une fonctionnelle de coût arbitraire. Si J admet des dérivées partielles continues, alors $\Gamma \mapsto J(\Gamma, \boldsymbol{u}(\Gamma), T(\Gamma), \boldsymbol{v}(\Gamma), p(\Gamma))$ est dérivable par rapport à la forme et la dérivée est donnée par :

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\boldsymbol{\theta}}\Big[J(\Gamma_{\boldsymbol{\theta}}, \boldsymbol{v}(\Gamma_{\boldsymbol{\theta}}), p(\Gamma_{\boldsymbol{\theta}}), T(\Gamma_{\boldsymbol{\theta}}), \boldsymbol{u}(\Gamma_{\boldsymbol{\theta}}))\Big](\boldsymbol{\theta}) \\
&\quad= \overline{\frac{\partial \mathfrak{J}}{\partial \boldsymbol{\theta}}}(\boldsymbol{\theta}) + \int_\Gamma (\boldsymbol{f}_f \cdot \boldsymbol{w} - \sigma_f(\boldsymbol{v}, p) : \nabla \boldsymbol{w} + \boldsymbol{n} \cdot \sigma_f(\boldsymbol{w}, q) \nabla \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} + \boldsymbol{n} \cdot \sigma_f(\boldsymbol{v}, p) \nabla \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{n})(\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{n}) \mathrm{d}s \\
&\quad+ \int_\Gamma \left(k_s \nabla T_s \cdot \nabla S_s - k_f \nabla T_f \cdot \nabla S_f + Q_f S_f - Q_s S_s - 2k_s \frac{\partial T_s}{\partial \boldsymbol{n}} \frac{\partial S_s}{\partial \boldsymbol{n}} + 2k_f \frac{\partial T_f}{\partial \boldsymbol{n}} \frac{\partial S_f}{\partial \boldsymbol{n}} \right) (\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{n}) \mathrm{d}s \\
&\quad+ \int_\Gamma (\sigma_s(\boldsymbol{u}, T_s) : \nabla \boldsymbol{r} - \boldsymbol{f}_s \cdot \boldsymbol{r} - \boldsymbol{n} \cdot Ae(\boldsymbol{r}) \nabla \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n} - \boldsymbol{n} \cdot \sigma_s(\boldsymbol{u}, T_s) \nabla \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{n}) (\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{n}) \mathrm{d}s
\end{aligned}
$$

$\mathfrak{J}$ est une fonctionnelle “Lagrangienne”:

$$
\mathfrak{J}(\boldsymbol{\theta}, \hat{\boldsymbol{v}}, \hat{p}, \hat{T}, \hat{\boldsymbol{u}}) := J(\Gamma_{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{v}} \circ (I + \boldsymbol{\theta})^{-1}, \hat{p} \circ (I + \boldsymbol{\theta})^{-1}, \hat{T} \circ (I + \boldsymbol{\theta})^{-1}, \hat{\boldsymbol{u}} \circ (I + \boldsymbol{\theta})^{-1}).
$$

Proposition

Soit $J(\Gamma, \boldsymbol{u}, T, \boldsymbol{v}, p)$ une fonctionnelle de coût arbitraire. Si J admet des dérivées partielles continues, alors $\Gamma \mapsto J(\Gamma, \boldsymbol{u}(\Gamma), T(\Gamma), \boldsymbol{v}(\Gamma), p(\Gamma))$ est dérivable par rapport à la forme et la dérivée est donnée par :

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\boldsymbol{\theta}}\Big[J(\Gamma_{\boldsymbol{\theta}}, \boldsymbol{v}(\Gamma_{\boldsymbol{\theta}}), p(\Gamma_{\boldsymbol{\theta}}), T(\Gamma_{\boldsymbol{\theta}}), \boldsymbol{u}(\Gamma_{\boldsymbol{\theta}}))\Big](\boldsymbol{\theta}) \\
&\quad = \overline{\frac{\partial \mathfrak{J}}{\partial \boldsymbol{\theta}}}(\boldsymbol{\theta}) + \int_\Gamma (\boldsymbol{f}_f \cdot \boldsymbol{w} - \sigma_f(\boldsymbol{v}, p) : \nabla \boldsymbol{w} + \boldsymbol{n} \cdot \sigma_f(\boldsymbol{w}, q) \nabla \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} + \boldsymbol{n} \cdot \sigma_f(\boldsymbol{v}, p) \nabla \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{n})(\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{n}) \mathrm{d}s \\
&\quad + \int_\Gamma \left(k_s \nabla T_s \cdot \nabla S_s - k_f \nabla T_f \cdot \nabla S_f + Q_f S_f - Q_s S_s - 2k_s \frac{\partial T_s}{\partial \boldsymbol{n}} \frac{\partial S_s}{\partial \boldsymbol{n}} + 2k_f \frac{\partial T_f}{\partial \boldsymbol{n}} \frac{\partial S_f}{\partial \boldsymbol{n}} \right) (\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{n}) \mathrm{d}s \\
&\quad + \int_\Gamma (\sigma_s(\boldsymbol{u}, T_s) : \nabla \boldsymbol{r} - \boldsymbol{f}_s \cdot \boldsymbol{r} - \boldsymbol{n} \cdot Ae(\boldsymbol{r}) \nabla \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n} - \boldsymbol{n} \cdot \sigma_s(\boldsymbol{u}, T_s) \nabla \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{n}) \, (\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{n}) \mathrm{d}s
\end{aligned}$$

Trois termes adjoints correspondant à chacune des physiques

Proposition

Soit $J(\Gamma, \boldsymbol{u}, T, \boldsymbol{v}, p)$ une fonctionnelle de coût arbitraire. Si J admet des dérivées partielles continues, alors $\Gamma \mapsto J(\Gamma, \boldsymbol{u}(\Gamma), T(\Gamma), \boldsymbol{v}(\Gamma), p(\Gamma))$ est dérivable par rapport à la forme et la dérivée est donnée par :

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\boldsymbol{\theta}}\Big[J(\Gamma_{\boldsymbol{\theta}}, \boldsymbol{v}(\Gamma_{\boldsymbol{\theta}}), p(\Gamma_{\boldsymbol{\theta}}), T(\Gamma_{\boldsymbol{\theta}}), \boldsymbol{u}(\Gamma_{\boldsymbol{\theta}}))\Big](\boldsymbol{\theta}) \\
&\quad = \overline{\frac{\partial \mathfrak{J}}{\partial \boldsymbol{\theta}}}(\boldsymbol{\theta}) + \int_\Gamma (\boldsymbol{f}_f \cdot \boldsymbol{w} - \sigma_f(\boldsymbol{v}, p) : \nabla \boldsymbol{w} + \boldsymbol{n} \cdot \sigma_f(\boldsymbol{w}, q) \nabla \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} + \boldsymbol{n} \cdot \sigma_f(\boldsymbol{v}, p) \nabla \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{n})(\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{n}) \mathrm{d}s \\
&\quad + \int_\Gamma \left(k_s \nabla T_s \cdot \nabla S_s - k_f \nabla T_f \cdot \nabla S_f + Q_f S_f - Q_s S_s - 2k_s \frac{\partial T_s}{\partial \boldsymbol{n}} \frac{\partial S_s}{\partial \boldsymbol{n}} + 2k_f \frac{\partial T_f}{\partial \boldsymbol{n}} \frac{\partial S_f}{\partial \boldsymbol{n}} \right) (\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{n}) \mathrm{d}s \\
&\quad + \int_\Gamma \left(\sigma_s(\boldsymbol{u}, T_s) : \nabla \boldsymbol{r} - \boldsymbol{f}_s \cdot \boldsymbol{r} - \boldsymbol{n} \cdot Ae(\boldsymbol{r}) \nabla \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n} - \boldsymbol{n} \cdot \sigma_s(\boldsymbol{u}, T_s) \nabla \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{n}\right) (\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{n}) \mathrm{d}s
\end{aligned}$$

Trois termes adjoints correspondant à chacune des physiques

Proposition

Soit $J(\Gamma, \boldsymbol{u}, T, \boldsymbol{v}, p)$ une fonctionnelle de coût arbitraire. Si J admet des dérivées partielles continues, alors $\Gamma \mapsto J(\Gamma, \boldsymbol{u}(\Gamma), T(\Gamma), \boldsymbol{v}(\Gamma), p(\Gamma))$ est dérivable par rapport à la forme et la dérivée est donnée par :

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\boldsymbol{\theta}}\Big[J(\Gamma_{\boldsymbol{\theta}}, \boldsymbol{v}(\Gamma_{\boldsymbol{\theta}}), p(\Gamma_{\boldsymbol{\theta}}), T(\Gamma_{\boldsymbol{\theta}}), \boldsymbol{u}(\Gamma_{\boldsymbol{\theta}}))\Big](\boldsymbol{\theta}) \\
&\quad = \overline{\frac{\partial \mathfrak{J}}{\partial \boldsymbol{\theta}}}(\boldsymbol{\theta}) + \int_\Gamma (\boldsymbol{f}_f \cdot \boldsymbol{w} - \sigma_f(\boldsymbol{v}, p) : \nabla \boldsymbol{w} + \boldsymbol{n} \cdot \sigma_f(\boldsymbol{w}, q) \nabla \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} + \boldsymbol{n} \cdot \sigma_f(\boldsymbol{v}, p) \nabla \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{n})(\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{n}) \mathrm{d}s \\
&\quad + \int_\Gamma \left(k_s \nabla T_s \cdot \nabla S_s - k_f \nabla T_f \cdot \nabla S_f + Q_f S_f - Q_s S_s - 2k_s \frac{\partial T_s}{\partial \boldsymbol{n}} \frac{\partial S_s}{\partial \boldsymbol{n}} + 2k_f \frac{\partial T_f}{\partial \boldsymbol{n}} \frac{\partial S_f}{\partial \boldsymbol{n}} \right) (\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{n}) \mathrm{d}s \\
&\quad + \int_\Gamma (\sigma_s(\boldsymbol{u}, T_s) : \nabla \boldsymbol{r} - \boldsymbol{f}_s \cdot \boldsymbol{r} - \boldsymbol{n} \cdot Ae(\boldsymbol{r}) \nabla \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n} - \boldsymbol{n} \cdot \sigma_s(\boldsymbol{u}, T_s) \nabla \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{n}) (\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{n}) \mathrm{d}s
\end{aligned}$$

Trois termes adjoints correspondant à chacune des physiques

Proposition

Soit $J(\Gamma, \boldsymbol{u}, T, \boldsymbol{v}, p)$ une fonctionnelle de coût arbitraire. Si J admet des dérivées partielles continues, alors $\Gamma \mapsto J(\Gamma, \boldsymbol{u}(\Gamma), T(\Gamma), \boldsymbol{v}(\Gamma), p(\Gamma))$ est dérivable par rapport à la forme et la dérivée est donnée par :

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\boldsymbol{\theta}}\Big[J(\Gamma_{\boldsymbol{\theta}}, \boldsymbol{v}(\Gamma_{\boldsymbol{\theta}}), p(\Gamma_{\boldsymbol{\theta}}), T(\Gamma_{\boldsymbol{\theta}}), \boldsymbol{u}(\Gamma_{\boldsymbol{\theta}}))\Big](\boldsymbol{\theta}) \\
&\quad = \overline{\frac{\partial \mathfrak{J}}{\partial \boldsymbol{\theta}}}(\boldsymbol{\theta}) + \int_\Gamma (\boldsymbol{f}_f \cdot \boldsymbol{w} - \sigma_f(\boldsymbol{v}, p) : \nabla \boldsymbol{w} + \boldsymbol{n} \cdot \sigma_f(\boldsymbol{w}, q) \nabla \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} + \boldsymbol{n} \cdot \sigma_f(\boldsymbol{v}, p) \nabla \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{n})(\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{n}) \mathrm{d}s \\
&\quad + \int_\Gamma \left(k_s \nabla T_s \cdot \nabla S_s - k_f \nabla T_f \cdot \nabla S_f + Q_f S_f - Q_s S_s - 2 k_s \frac{\partial T_s}{\partial \boldsymbol{n}} \frac{\partial S_s}{\partial \boldsymbol{n}} + 2 k_f \frac{\partial T_f}{\partial \boldsymbol{n}} \frac{\partial S_f}{\partial \boldsymbol{n}} \right) (\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{n}) \mathrm{d}s \\
&\quad + \int_\Gamma (\sigma_s(\boldsymbol{u}, T_s) : \nabla \boldsymbol{r} - \boldsymbol{f}_s \cdot \boldsymbol{r} - \boldsymbol{n} \cdot Ae(\boldsymbol{r}) \nabla \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n} - \boldsymbol{n} \cdot \sigma_s(\boldsymbol{u}, T_s) \nabla \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{n}) (\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{n}) \mathrm{d}s
\end{aligned}
$$

Les variables adjointes $\boldsymbol{w}, q, S_f, S_s, \boldsymbol{r}$ sont résolues en une cascade "inverse".

Proposition

Soit $J(\Gamma, \boldsymbol{u}, T, \boldsymbol{v}, p)$ une fonctionnelle de coût arbitraire. Si J admet des dérivées partielles continues, alors $\Gamma \mapsto J(\Gamma, \boldsymbol{u}(\Gamma), T(\Gamma), \boldsymbol{v}(\Gamma), p(\Gamma))$ est dérivable par rapport à la forme et la dérivée est donnée par :

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\boldsymbol{\theta}}\Big[J(\Gamma_{\boldsymbol{\theta}}, \boldsymbol{v}(\Gamma_{\boldsymbol{\theta}}), p(\Gamma_{\boldsymbol{\theta}}), T(\Gamma_{\boldsymbol{\theta}}), \boldsymbol{u}(\Gamma_{\boldsymbol{\theta}}))\Big](\boldsymbol{\theta}) \\
&\quad = \overline{\frac{\partial \mathfrak{J}}{\partial \boldsymbol{\theta}}}(\boldsymbol{\theta}) + \int_\Gamma (\boldsymbol{f}_f \cdot \boldsymbol{w} - \sigma_f(\boldsymbol{v}, p) : \nabla \boldsymbol{w} + \boldsymbol{n} \cdot \sigma_f(\boldsymbol{w}, q) \nabla \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} + \boldsymbol{n} \cdot \sigma_f(\boldsymbol{v}, p) \nabla \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{n})(\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{n}) \mathrm{d}s \\
&\quad + \int_\Gamma \left(k_s \nabla T_s \cdot \nabla S_s - k_f \nabla T_f \cdot \nabla S_f + Q_f S_f - Q_s S_s - 2k_s \frac{\partial T_s}{\partial \boldsymbol{n}} \frac{\partial S_s}{\partial \boldsymbol{n}} + 2k_f \frac{\partial T_f}{\partial \boldsymbol{n}} \frac{\partial S_f}{\partial \boldsymbol{n}} \right) (\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{n}) \mathrm{d}s \\
&\quad + \int_\Gamma (\sigma_s(\boldsymbol{u}, T_s) : \nabla \boldsymbol{r} - \boldsymbol{f}_s \cdot \boldsymbol{r} - \boldsymbol{n} \cdot Ae(\boldsymbol{r}) \nabla \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n} - \boldsymbol{n} \cdot \sigma_s(\boldsymbol{u}, T_s) \nabla \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{n}) (\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{n}) \mathrm{d}s
\end{aligned}$$

Dérivée partielle de J par rapport à la forme.

$$\int_{\Omega_s} Ae(\boldsymbol{r}) : \nabla \boldsymbol{r}' \mathrm{d}x = \frac{\partial \mathfrak{J}}{\partial \hat{\boldsymbol{u}}}(\boldsymbol{r}') \quad \forall \boldsymbol{r}' \in V_{\boldsymbol{u}}(\Gamma) .$$

Dérivées partielles fournies en forme faible.

I. Calcul des dérivées de forme

$$\int_{\Omega_s} Ae(\boldsymbol{r}) : \nabla \boldsymbol{r}' \mathrm{dx} = \frac{\partial \mathfrak{J}}{\partial \hat{\boldsymbol{u}}}(\boldsymbol{r}') \quad \forall \boldsymbol{r}' \in V_{\boldsymbol{u}}(\Gamma)\,.$$

$$\downarrow$$

$$\int_{\Omega_s} k_s \nabla S \cdot \nabla S' \mathrm{dx} + \int_{\Omega_f} (k_f \nabla S \cdot \nabla S' + \rho c_p S \boldsymbol{v} \cdot \nabla S') \mathrm{dx} = \int_{\Omega_s} \alpha \mathrm{div}(\boldsymbol{r}) S' \mathrm{dx} + \frac{\partial \mathfrak{J}}{\partial \hat{T}}(S) \quad \forall S' \in V_T(\Gamma)\,.$$

Dérivées partielles fournies en forme faible.

I. Calcul des dérivées de forme

$$\int_{\Omega_s} Ae(\boldsymbol{r}) : \nabla \boldsymbol{r}' \mathrm{d}x = \frac{\partial \mathfrak{J}}{\partial \hat{\boldsymbol{u}}}(\boldsymbol{r}') \quad \forall \boldsymbol{r}' \in V_{\boldsymbol{u}}(\Gamma)\,.$$

$$\downarrow$$

$$\int_{\Omega_s} k_s \nabla S \cdot \nabla S' \mathrm{d}x + \int_{\Omega_f} (k_f \nabla S \cdot \nabla S' + \rho c_p S \boldsymbol{v} \cdot \nabla S') \mathrm{d}x = \int_{\Omega_s} \alpha \mathrm{div}(\boldsymbol{r}) S' \mathrm{d}x + \frac{\partial \mathfrak{J}}{\partial \hat{T}}(S) \quad \forall S' \in V_T(\Gamma)\,.$$

$$\downarrow$$

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{r} \text{ sur } \Gamma \text{ et } \forall (\boldsymbol{w}', q') \in V_{\boldsymbol{v},p}(\Gamma)$$

$$\int_{\Omega_f} \Big(\sigma_f(\boldsymbol{w}, q) : \nabla \boldsymbol{w}' + \rho \boldsymbol{w} \cdot \nabla \boldsymbol{w}' \cdot \boldsymbol{v} + \rho \boldsymbol{w} \cdot \nabla \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w}' - q' \mathrm{div}(\boldsymbol{w}) \Big) \mathrm{d}x =$$

$$\int_{\Omega_f} -\rho c_p S \nabla T \cdot \boldsymbol{w}' \mathrm{d}x + \frac{\partial \mathfrak{J}}{\partial (\boldsymbol{v}', p')}(\boldsymbol{w}', q'),$$

Dérivées partielles fournies en forme faible.

I. Calcul des dérivées de forme

$$\int_{\Omega_s} Ae(\boldsymbol{r}) : \nabla \boldsymbol{r}' \mathrm{dx} = \frac{\partial \mathfrak{J}}{\partial \hat{\boldsymbol{u}}}(\boldsymbol{r}') \quad \forall \boldsymbol{r}' \in V_{\boldsymbol{u}}(\Gamma)\,.$$

$$\downarrow$$

$$\int_{\Omega_s} k_s \nabla S \cdot \nabla S' \mathrm{dx} + \int_{\Omega_f} (k_f \nabla S \cdot \nabla S' + \rho c_p S \boldsymbol{v} \cdot \nabla S') \mathrm{dx} = \int_{\Omega_s} \alpha \mathrm{div}(\boldsymbol{r}) S' \mathrm{dx} + \frac{\partial \mathfrak{J}}{\partial \hat{T}}(S) \quad \forall S' \in V_T(\Gamma)\,.$$

$$\downarrow$$

$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{r}$ sur Γ et $\forall (\boldsymbol{w}', q') \in V_{\boldsymbol{v},p}(\Gamma)$

$$\int_{\Omega_f} \Big(\sigma_f(\boldsymbol{w}, q) : \nabla \boldsymbol{w}' + \rho \boldsymbol{w} \cdot \nabla \boldsymbol{w}' \cdot \boldsymbol{v} + \rho \boldsymbol{w} \cdot \nabla \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w}' - q' \mathrm{div}(\boldsymbol{w}) \Big) \mathrm{dx} =$$

$$\int_{\Omega_f} -\rho c_p S \nabla T \cdot \boldsymbol{w}' \mathrm{dx} + \frac{\partial \mathfrak{J}}{\partial (\boldsymbol{v}', p')}(\boldsymbol{w}', q'),$$

$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{r}$ sur Γ : condition de frontière “étrange” duale de l'égalité des contraintes normales $\sigma_s(\boldsymbol{u}, T_s) \cdot \boldsymbol{n} = \sigma_f(\boldsymbol{v}, p) \cdot \boldsymbol{n}$ sur Γ.

Maximisation de la conduction thermique :

$$\min_{\Omega_f \subset D} \quad \int_D T \,\mathrm{d}x$$
$$s.c. \quad \int_{\Omega_f} \mathrm{d}x \leq V_0$$

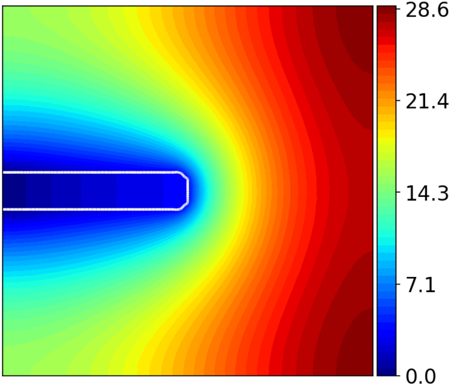


Figure: Diffusion thermique

Maximisation de la conduction thermique :

$$\begin{aligned} \min_{\Omega_f \subset D} \quad & \int_D T \mathrm{d}x \\ s.c. \quad & \int_{\Omega_f} \mathrm{d}x \leq V_0 \end{aligned}$$

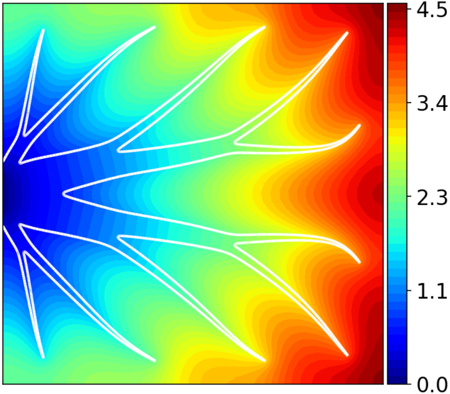
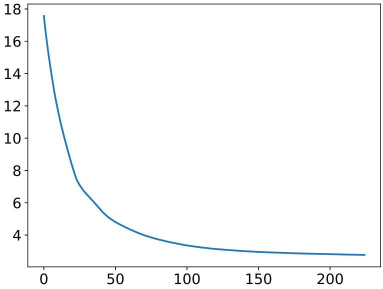
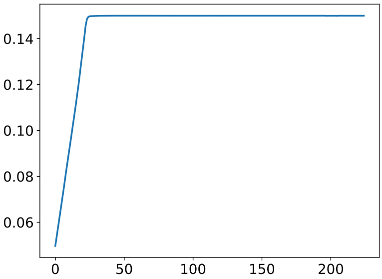


Figure: Diffusion thermique

Courbes de convergence :



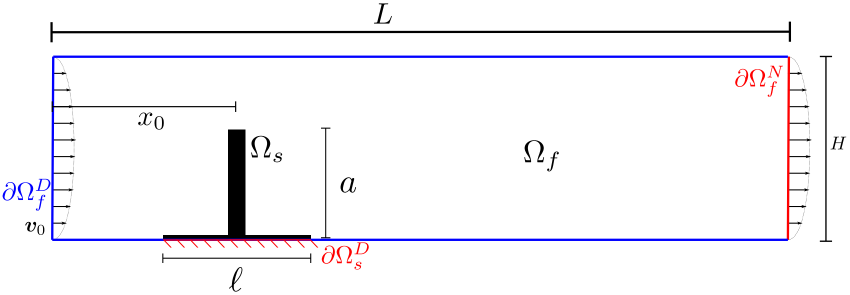
(a) Fonction objectif J.



(b) Contrainte $\mathrm{Vol}(\Omega_f)$.

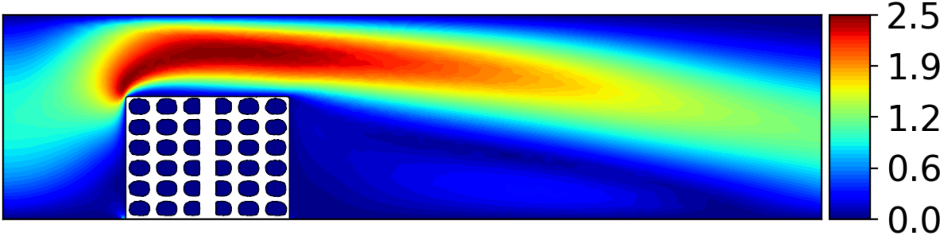
Un cas test d'interaction fluide-structure :

$$\min_{\Gamma} \quad J(\Gamma, \boldsymbol{u}(\Gamma)) = \int_{\Omega_s} Ae(\boldsymbol{u}) : e(\boldsymbol{u}) \mathrm{d}x$$
$$s.c. \quad \mathrm{Vol}(\Omega_s) = V_{target}.$$



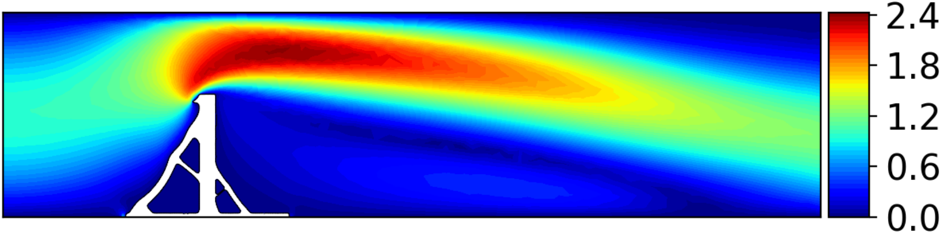
Un cas test d'interaction fluide-structure :

$$\begin{aligned} \min_{\Gamma} \quad & J(\Gamma, \boldsymbol{u}(\Gamma)) = \int_{\Omega_s} Ae(\boldsymbol{u}) : e(\boldsymbol{u}) \mathrm{d}x \\ s.c. \quad & \mathrm{Vol}(\Omega_s) = V_{target}. \end{aligned}$$



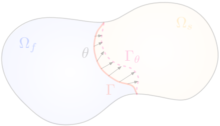
Un cas test d'interaction fluide-structure :

$$\begin{aligned} \min_{\Gamma} \quad & J(\Gamma, \boldsymbol{u}(\Gamma)) = \int_{\Omega_s} Ae(\boldsymbol{u}) : e(\boldsymbol{u}) \mathrm{d}x \\ s.c. \quad & \mathrm{Vol}(\Omega_s) = V_{target}. \end{aligned}$$

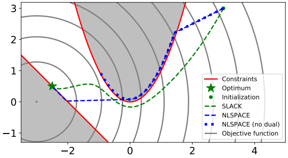


Plan et contributions

I. Calcul des dérivées de forme



II. Algorithme d'optimisation "null space"



III. Implémentation des contraintes géométriques

IV. Application : échangeurs de chaleur 2-d

Notre but : résoudre des problèmes d'optimisation génériques du type

$$\begin{aligned} \min_{\Gamma} \quad & J(\Gamma, \boldsymbol{v}(\Gamma), p(\Gamma), T(\Gamma), \boldsymbol{u}(\Gamma)) \\ \text{s.c.} \quad & g_i(\Gamma, \boldsymbol{v}(\Gamma), p(\Gamma), T(\Gamma), \boldsymbol{u}(\Gamma)) = 0,\ 1 \leq i \leq p\cdot \\ & h_i(\Gamma, \boldsymbol{v}(\Gamma), p(\Gamma), T(\Gamma), \boldsymbol{u}(\Gamma)) \leq 0,\ 1 \leq i \leq q \end{aligned}$$

avec une fonctions objectif J et des contraintes g_i, h_i *arbitraires*.

Notre but : résoudre des problèmes d'optimisation génériques du type

$$\begin{aligned} \min_{\Gamma} \quad & J(\Gamma, \boldsymbol{v}(\Gamma), p(\Gamma), T(\Gamma), \boldsymbol{u}(\Gamma)) \\ \text{s.c.} \quad & g_i(\Gamma, \boldsymbol{v}(\Gamma), p(\Gamma), T(\Gamma), \boldsymbol{u}(\Gamma)) = 0, \ 1 \leq i \leq p \cdot \\ & h_i(\Gamma, \boldsymbol{v}(\Gamma), p(\Gamma), T(\Gamma), \boldsymbol{u}(\Gamma)) \leq 0, \ 1 \leq i \leq q \end{aligned}$$

avec une fonctions objectif J et des contraintes g_i, h_i *arbitraires*.

L'algorithme "null space" répond aux besoins suivants :

II. Algorithme d'optimisation "null space"

Notre but : résoudre des problèmes d'optimisation génériques du type

$$\begin{aligned} \min_{\Gamma} \quad & J(\Gamma, \boldsymbol{v}(\Gamma), p(\Gamma), T(\Gamma), \boldsymbol{u}(\Gamma)) \\ \text{s.c.} \quad & g_i(\Gamma, \boldsymbol{v}(\Gamma), p(\Gamma), T(\Gamma), \boldsymbol{u}(\Gamma)) = 0,\ 1 \leq i \leq p\cdot \\ & h_i(\Gamma, \boldsymbol{v}(\Gamma), p(\Gamma), T(\Gamma), \boldsymbol{u}(\Gamma)) \leq 0,\ 1 \leq i \leq q \end{aligned}$$

avec une fonctions objectif J et des contraintes g_i, h_i *arbitraires*.

L'algorithme "null space" répond aux besoins suivants :

- utilisation directe d'algorithmes d'optimisation dans $\mathbb{R}^n$ compliquée pour nos applications *non paramétriques* ;

II. Algorithme d'optimisation "null space"

Notre but : résoudre des problèmes d'optimisation génériques du type

$$\begin{aligned} \min_{\Gamma} \quad & J(\Gamma, \boldsymbol{v}(\Gamma), p(\Gamma), T(\Gamma), \boldsymbol{u}(\Gamma)) \\ \text{s.c.} \quad & g_i(\Gamma, \boldsymbol{v}(\Gamma), p(\Gamma), T(\Gamma), \boldsymbol{u}(\Gamma)) = 0, \; 1 \leq i \leq p \cdot \\ & h_i(\Gamma, \boldsymbol{v}(\Gamma), p(\Gamma), T(\Gamma), \boldsymbol{u}(\Gamma)) \leq 0, \; 1 \leq i \leq q \end{aligned}$$

avec une fonctions objectif J et des contraintes g_i, h_i *arbitraires*.

L'algorithme "null space" répond aux besoins suivants :

- utilisation directe d'algorithmes d'optimisation dans $\mathbb{R}^n$ compliquée pour nos applications *non paramétriques* ;
- pas de réglages fins et pénibles de méta-paramètres d'optimisation ;

II. Algorithme d'optimisation "null space"

Notre but : résoudre des problèmes d'optimisation génériques du type

$$\begin{aligned} \min_{\Gamma} \quad & J(\Gamma, \boldsymbol{v}(\Gamma), p(\Gamma), T(\Gamma), \boldsymbol{u}(\Gamma)) \\ \text{s.c.} \quad & g_i(\Gamma, \boldsymbol{v}(\Gamma), p(\Gamma), T(\Gamma), \boldsymbol{u}(\Gamma)) = 0,\ 1 \leq i \leq p \cdot \\ & h_i(\Gamma, \boldsymbol{v}(\Gamma), p(\Gamma), T(\Gamma), \boldsymbol{u}(\Gamma)) \leq 0,\ 1 \leq i \leq q \end{aligned}$$

avec une fonctions objectif J et des contraintes g_i, h_i *arbitraires*.

L'algorithme "null space" répond aux besoins suivants :

- utilisation directe d'algorithmes d'optimisation dans $\mathbb{R}^n$ compliquée pour nos applications *non paramétriques* ;
- pas de réglages fins et pénibles de méta-paramètres d'optimisation ;
- correction graduelle des initialisations non faisables.

Pour exposer la méthode, considérons le problème simplifié

$$\min_{x\in V} \quad J(x)$$
$$\text{s.c.} \begin{cases} \boldsymbol{g}(x) = 0 \\ \boldsymbol{h}(x) \leq 0, \end{cases}$$

avec

- $J : V \to \mathbb{R}$, $\boldsymbol{g} : V \to \mathbb{R}^p$ and $\boldsymbol{h} : V \to \mathbb{R}^q$ Fréchet différentiables.
- V est un espace de Hilbert équipé d'un produit scalaire $(\cdot,\cdot)_V$.

Pour exposer la méthode, considérons le problème simplifié

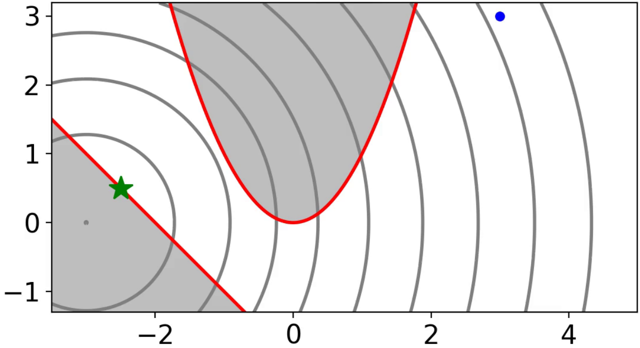
$$\min_{x\in V} \quad J(x)$$
$$\text{s.c.} \begin{cases} \boldsymbol{g}(x) = 0 \\ \boldsymbol{h}(x) \leq 0, \end{cases}$$

avec

- $J : V \to \mathbb{R}$, $\boldsymbol{g} : V \to \mathbb{R}^p$ and $\boldsymbol{h} : V \to \mathbb{R}^q$ Fréchet différentiables.
- V est un espace de Hilbert équipé d'un produit scalaire $(\cdot,\cdot)_V$.

$$\min_{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2} \quad J(x_1,x_2) = x_1^2 + (x_2+3)^2$$

$$\text{s.c.} \quad \begin{cases} h_1(x_1,x_2) = -x_1^2 + x_2 & \leq 0 \\ h_2(x_1,x_2) = -x_1 - x_2 - 2 & \leq 0 \end{cases}$$



Nous utilisons une approche "système dynamique" pour l'optimisation sous contraintes :

$$\dot{x} = -\alpha_J \boldsymbol{\xi}_J(x) - \alpha_C \boldsymbol{\xi}_C(x)$$

II. Algorithme d'optimisation "null space"

Nous utilisons une approche "système dynamique" pour l'optimisation sous contraintes :

$$\dot{x} = -\alpha_J \boldsymbol{\xi}_J(x) - \alpha_C \boldsymbol{\xi}_C(x)$$

- $\xi_J(x(t))$ est la direction "null space". Elle décroît la fonction objectif en respectant les contraintes linéarisées :

$$\boldsymbol{\xi}_J(x) \propto \arg\min_{\boldsymbol{\xi}\in V} \quad \mathrm{D}J(x)\boldsymbol{\xi}$$

$$\text{s.c.} \quad \begin{cases} \mathrm{D}\boldsymbol{g}(x)\boldsymbol{\xi} = 0 \\ \mathrm{D}\boldsymbol{h}_{\widetilde{I}(x)}(x)\boldsymbol{\xi} \leq 0 \\ ||\boldsymbol{\xi}||_V \leq 1. \end{cases}$$

II. Algorithme d'optimisation "null space"

Nous utilisons une approche "système dynamique" pour l'optimisation sous contraintes :

$$\dot{x} = -\alpha_J \boldsymbol{\xi}_J(x) - \alpha_C \boldsymbol{\xi}_C(x)$$

- $\boldsymbol{\xi}_J(x(t))$ est la direction "null space". Elle décroît la fonction objectif en respectant les contraintes linéarisées :

$$\boldsymbol{\xi}_J(x) \propto \arg\min_{\boldsymbol{\xi}\in V} \quad \mathrm{D}J(x)\boldsymbol{\xi}$$

$$\text{s.c.} \quad \begin{cases} \mathrm{D}\boldsymbol{g}(x)\boldsymbol{\xi} = 0 \\ \mathrm{D}\boldsymbol{h}_{\widetilde{I}(x)}(x)\boldsymbol{\xi} \leq 0 \\ ||\boldsymbol{\xi}||_V \leq 1. \end{cases}$$

$\widetilde{I}(x) := \{i \in \{1, \ldots, q\} \mid h_i(x) \geqslant 0\}$ sont les contraintes saturées ou violées.

II. Algorithme d'optimisation "null space"

Nous utilisons une approche "système dynamique" pour l'optimisation sous contraintes :

$$\dot{x} = -\alpha_J \boldsymbol{\xi}_J(x) - \alpha_C \boldsymbol{\xi}_C(x)$$

- $\boldsymbol{\xi}_J(x(t))$ est la direction "null space". Elle décroît la fonction objectif en respectant les contraintes linéarisées :

$$\boldsymbol{\xi}_J(x) \propto \arg\min_{\boldsymbol{\xi} \in V} \quad \mathrm{D}J(x)\boldsymbol{\xi}$$

$$\text{s.c.} \begin{cases} \mathrm{D}\boldsymbol{g}(x)\boldsymbol{\xi} = 0 \\ \mathrm{D}\boldsymbol{h}_{\widetilde{I}(x)}(x)\boldsymbol{\xi} \leq 0 \\ ||\boldsymbol{\xi}||_V \leq 1. \end{cases}$$

  Ce système peut être résolu facilement via un problème dual.

II. Algorithme d'optimisation "null space"

Nous utilisons une approche "système dynamique" pour l'optimisation sous contraintes :

$$\dot{x} = -\alpha_J \boldsymbol{\xi}_J(x) - \alpha_C \boldsymbol{\xi}_C(x)$$

- $\xi_C(x(t))$ est la direction "range space". Elle décroît la violation des contraintes :

$$\boldsymbol{\xi}_C(x) := \mathrm{D}\boldsymbol{C}_{\widetilde{I}(x)}^T(\mathrm{D}\boldsymbol{C}_{\widetilde{I}(x)}\mathrm{D}\boldsymbol{C}_{\widetilde{I}(x)}^T)^{-1}\boldsymbol{C}_{\widetilde{I}(x)}(x).$$

Nous utilisons une approche "système dynamique" pour l'optimisation sous contraintes :

$$\dot{x} = -\alpha_J \boldsymbol{\xi}_J(x) - \alpha_C \boldsymbol{\xi}_C(x)$$

- $\boldsymbol{\xi}_C(x(t))$ est la direction "range space". Elle décroît la violation des contraintes :

$$\boldsymbol{\xi}_C(x) := \mathrm{D}\boldsymbol{C}_{\widetilde{I}(x)}^T (\mathrm{D}\boldsymbol{C}_{\widetilde{I}(x)} \mathrm{D}\boldsymbol{C}_{\widetilde{I}(x)}^T)^{-1} \boldsymbol{C}_{\widetilde{I}(x)}(x).$$

  Cela assure la décroissance exponentielle $C_{\widetilde{I}(x(t))} \leq e^{-\alpha_C t} C_{\widetilde{I}(x(0))}$ des contraintes $\widetilde{I}(x(t))$ saturées ou violées.

II. Algorithme d'optimisation "null space"

Notre approche est une généralisation :

- du flot de gradient "classique" en l'absence de contraintes :

$$\dot{x} = -\nabla J(x);$$

II. Algorithme d'optimisation "null space"

Notre approche est une généralisation :

- du flot de gradient "classique" en l'absence de contraintes :

$$\dot{x} = -\nabla J(x);$$

- d'un système dynamique "projeté" proposé par Yamashita (1980) pour l'optimisation sous contraintes d'*égalités*:

$$\dot{x} = -\alpha_J \underbrace{(I - \mathrm{D}\boldsymbol{g}^T(\mathrm{D}\boldsymbol{g}\mathrm{D}\boldsymbol{g}^T)^{-1}\mathrm{D}\boldsymbol{g})\nabla J(x)}_{\boldsymbol{\xi}_J(x)} - \alpha_C \underbrace{\mathrm{D}\boldsymbol{g}^T(\mathrm{D}\boldsymbol{g}\mathrm{D}\boldsymbol{g}^T)^{-1}\boldsymbol{g}(x)}_{\boldsymbol{\xi}_C(x)}.$$

Notre approche est une généralisation :

- du flot de gradient "classique" en l'absence de contraintes :

$$\dot{x} = -\nabla J(x);$$

- d'un système dynamique "projeté" proposé par Yamashita (1980) pour l'optimisation sous contraintes d'*égalités*:

$$\dot{x} = -\alpha_J \underbrace{(I - \mathrm{D}\boldsymbol{g}^T(\mathrm{D}\boldsymbol{g}\mathrm{D}\boldsymbol{g}^T)^{-1}\mathrm{D}\boldsymbol{g})\nabla J(x)}_{\boldsymbol{\xi}_J(x)} - \alpha_C \underbrace{\mathrm{D}\boldsymbol{g}^T(\mathrm{D}\boldsymbol{g}\mathrm{D}\boldsymbol{g}^T)^{-1}\boldsymbol{g}(x)}_{\boldsymbol{\xi}_C(x)}.$$

$\boldsymbol{\xi}_J(x) = \Pi_{\mathrm{Ker}(\mathrm{D}\boldsymbol{g})}(\nabla J)$ est la projection sur l'espace tangent aux contraintes d'égalités.

II. Algorithme d'optimisation "null space"

Notre approche est une généralisation :

- du flot de gradient "classique" en l'absence de contraintes :

$$\dot{x} = -\nabla J(x);$$

- d'un système dynamique "projeté" proposé par Yamashita (1980) pour l'optimisation sous contraintes d'*égalités*:

$$\dot{x} = -\alpha_J \underbrace{(I - \mathrm{D}\boldsymbol{g}^T(\mathrm{D}\boldsymbol{g}\mathrm{D}\boldsymbol{g}^T)^{-1}\mathrm{D}\boldsymbol{g})\nabla J(x)}_{\boldsymbol{\xi}_J(x)} - \alpha_C \underbrace{\mathrm{D}\boldsymbol{g}^T(\mathrm{D}\boldsymbol{g}\mathrm{D}\boldsymbol{g}^T)^{-1}\boldsymbol{g}(x)}_{\boldsymbol{\xi}_C(x)}.$$

  $\boldsymbol{\xi}_J(x) = \Pi_{\mathrm{Ker}(\mathrm{D}\boldsymbol{g})}(\nabla J)$ est la projection sur l'espace tangent aux contraintes d'égalités.

- Pour les contraintes d'inégalités, $\boldsymbol{\xi}_J(x) = \Pi_{\mathrm{Ker}(\mathrm{D}\boldsymbol{C}_{\widehat{I}(x)})}(\nabla J(x))$ est la projection sur un sous-ensemble optimal de contraintes $\widehat{I}(x) \subset \widetilde{I}(x)$ (obtenu par la résolution d'un sous problème problème quadratic dual).

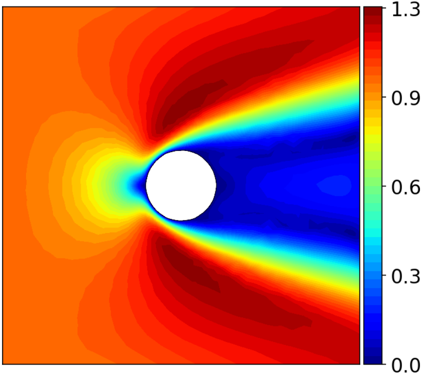
Un exemple avec plus de contraintes : maximisation de la portance sous contrainte de traînée :

$$\min \quad -\mathrm{Lift}(\Gamma, \boldsymbol{v}(\Gamma), p(\Gamma))$$

$$s.c. \begin{cases} \mathrm{Drag}(\Gamma, \boldsymbol{v}(\Gamma), p(\Gamma)) \leq \mathtt{DRAG}_0 \\ \mathrm{Vol}(\Omega_f) = V_0 \\ \boldsymbol{X}(\Omega_s) := \dfrac{1}{|\Omega_s|} \displaystyle\int_{\Omega_s} \boldsymbol{x} \mathrm{d}x = \boldsymbol{x}_0, \end{cases}$$

$$\mathrm{Lift}(\Gamma, \boldsymbol{v}(\Gamma), p(\Gamma)) := -\int_\Gamma \boldsymbol{e}_y \cdot \sigma_f(\boldsymbol{v}, p) \boldsymbol{n} \mathrm{d}s,$$

$$\mathrm{Drag}(\Gamma, \boldsymbol{v}(\Gamma), p(\Gamma)) := \int_{\Omega_f} \sigma_f(\boldsymbol{v}, p) : \nabla \boldsymbol{v} \mathrm{d}x.$$



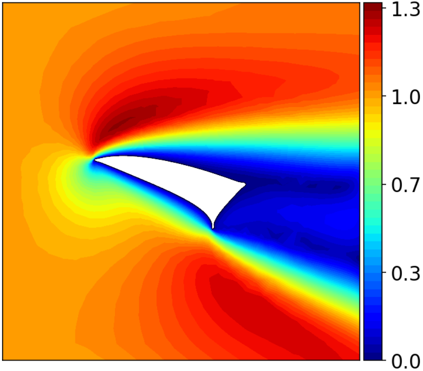
Un exemple avec plus de contraintes : maximisation de la portance sous contrainte de traînée :

$$\min \quad -\mathrm{Lift}(\Gamma, \boldsymbol{v}(\Gamma), p(\Gamma))$$

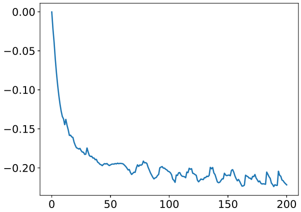
$$s.c. \begin{cases} \mathrm{Drag}(\Gamma, \boldsymbol{v}(\Gamma), p(\Gamma)) \leq \mathtt{DRAG}_0 \\ \mathrm{Vol}(\Omega_f) = V_0 \\ \boldsymbol{X}(\Omega_s) := \frac{1}{|\Omega_s|} \int_{\Omega_s} \boldsymbol{x} \mathrm{d}x = \boldsymbol{x}_0, \end{cases}$$

$$\mathrm{Lift}(\Gamma, \boldsymbol{v}(\Gamma), p(\Gamma)) := -\int_\Gamma \boldsymbol{e}_y \cdot \sigma_f(\boldsymbol{v}, p) \boldsymbol{n} \mathrm{d}s,$$

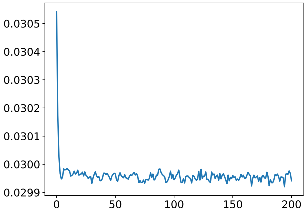
$$\mathrm{Drag}(\Gamma, \boldsymbol{v}(\Gamma), p(\Gamma)) := \int_{\Omega_f} \sigma_f(\boldsymbol{v}, p) : \nabla \boldsymbol{v} \mathrm{d}x.$$



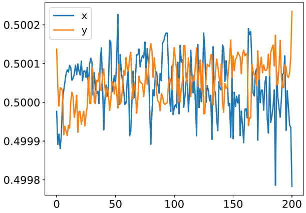
Courbes de convergence :



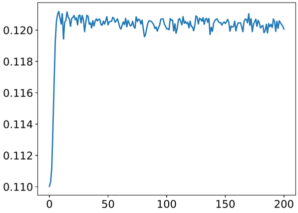
(a) $\mathrm{Lift}(\Gamma, \boldsymbol{v}(\Gamma), p(\Gamma))$.



(b) $\mathrm{Vol}(\Omega_f, \boldsymbol{v}(\Gamma), p(\Gamma))$.



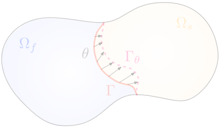
(c) $\mathbf{X}(\Omega_s) = (x, y)$.



(d) $\mathrm{Drag}(\Gamma, \boldsymbol{v}(\Gamma), p(\Gamma))$.

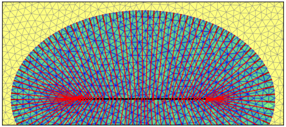
Plan et contributions

I. Calcul des dérivées de forme



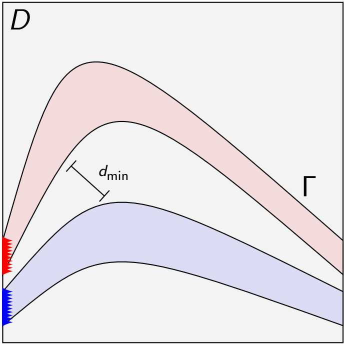
II. Algorithme d'optimisation "null space"

III. Implémentation des contraintes géométriques



IV. Application : échangeurs de chaleur 2-d

Objectif : contrainte de non mélange pour l'optimisation d'échangeurs bi-tubes.



En pratique, les contraintes géométriques sont formulées par des fonctionnelles $P(\Omega)$ moyennées:

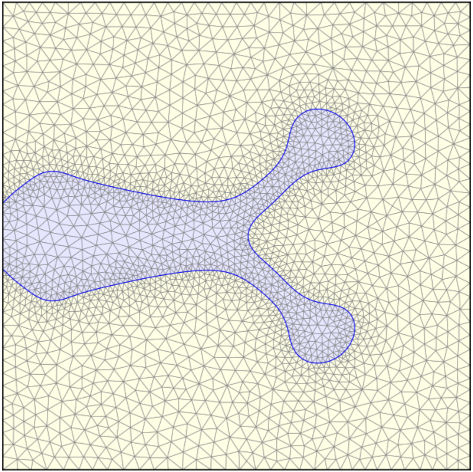
$$\min_{\Omega \subset D} J(\Omega), \text{ s.c. } P(\Omega) \leq 0, \text{ avec } P(\Omega) := \int_D j(d_\Omega(x)) \mathrm{d}x.$$

En pratique, les contraintes géométriques sont formulées par des fonctionnelles $P(\Omega)$ moyennées:

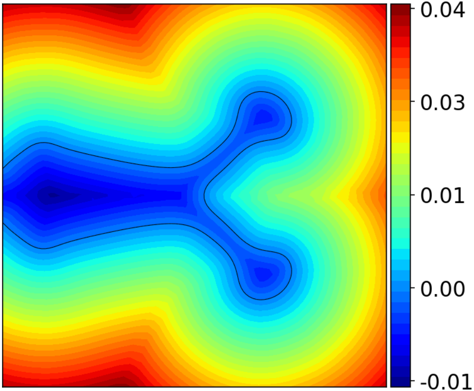
$$\min_{\Omega \subset D} J(\Omega), \text{ s.c. } P(\Omega) \leq 0, \text{ avec } P(\Omega) := \int_D j(d_\Omega(x))\mathrm{d}x.$$

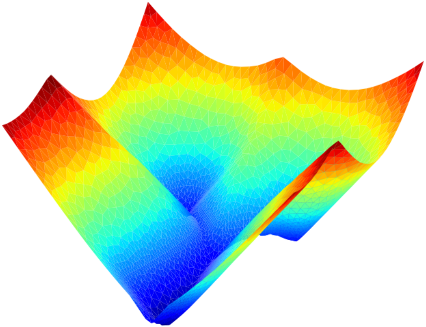
d_Ω est la fonction de distance signée.

Un domaine maillé Ω:



...et sa fonction de distance signée d_Ω:





$$d_\Omega(x) = \begin{cases} -d(x, \partial\Omega) \text{ si } x \in \Omega \\ +d(x, \partial\Omega) \text{ si } x \in D \backslash \Omega \end{cases}$$

La dérivée de forme est donnée par (Allaire, Jouve, Michailidis 2016)

$$P'(\Omega)(\boldsymbol{\theta}) = \int_{\partial\Omega} u\, \boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{n} \,\mathrm{d}y$$

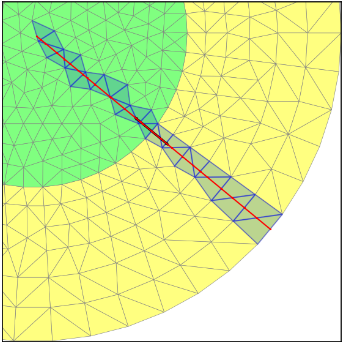
$$\text{avec } u(y) = -\int_{z \in \mathrm{ray}(y)} j'(d_\Omega(z)) \prod_{1 \le i \le n-1} (1 + \kappa_i(y) d_\Omega(z)) \mathrm{d}z, \qquad \forall y \in \partial\Omega.$$

La dérivée de forme est donnée par (Allaire, Jouve, Michailidis 2016)

$$P'(\Omega)(\boldsymbol{\theta}) = \int_{\partial\Omega} u\, \boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{n} \,\mathrm{d}y$$

$$\text{avec } u(y) = -\int_{z \in \mathrm{ray}(y)} j'(d_\Omega(z)) \prod_{1 \le i \le n-1} (1 + \kappa_i(y) d_\Omega(z)) \mathrm{d}z, \qquad \forall y \in \partial\Omega.$$

Le calcul de u requiert l'intégration le long des rayons normaux à la forme :

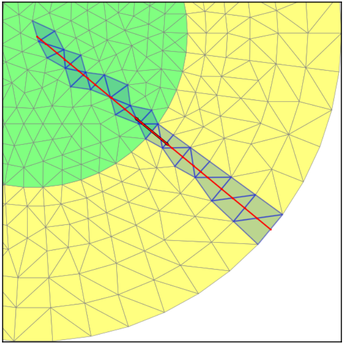


La dérivée de forme est donnée par (Allaire, Jouve, Michailidis 2016)

$$P'(\Omega)(\boldsymbol{\theta}) = \int_{\partial\Omega} u \, \boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{n} \, \mathrm{d}y$$

$$\text{avec } u(y) = -\int_{z \in \mathrm{ray}(y)} j'(d_\Omega(z)) \prod_{1 \leq i \leq n-1} (1 + \kappa_i(y) d_\Omega(z)) \mathrm{d}z, \qquad \forall y \in \partial\Omega.$$

Le calcul de u requiert l'intégration le long des rayons normaux à la forme :



…ainsi que le calcul des courbures $\kappa_i(y)$.

III. Implémentation des contraintes géométriques

Il est possible de calculer u sans intégrer le long des rayons :

Il est possible de calculer u sans intégrer le long des rayons :

Proposition

Soit $\hat{u} \in V_\omega$ la solution du problème variationnel

$$\forall v \in V_\omega,\ \int_{\partial\Omega} \hat{u} v \mathrm{d}s + \int_D \omega(\nabla d_\Omega \cdot \nabla \hat{u})(\nabla d_\Omega \cdot \nabla v)\mathrm{d}x = -\int_D j'(d_\Omega) v \mathrm{d}x.$$

avec $\omega > 0$ un poids arbitraire.
Alors $u(y) = \hat{u}(y)$ pour tout $y \in \partial\Omega$.

Il est possible de calculer u sans intégrer le long des rayons :

Proposition

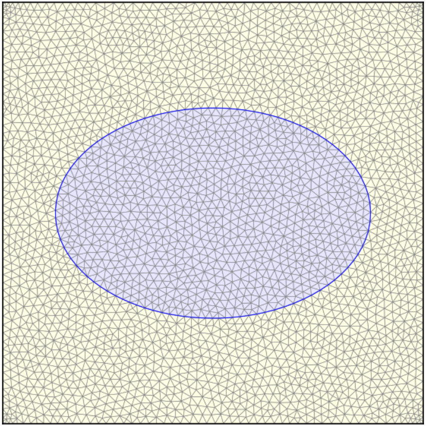
Soit $\hat{u} \in V_\omega$ la solution du problème variationnel

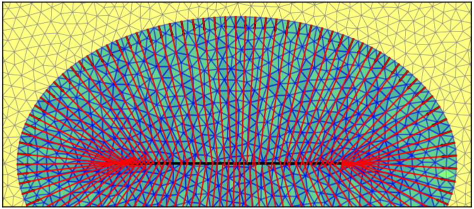
$$\forall v \in V_\omega, \int_{\partial\Omega} \hat{u} v \mathrm{d}s + \int_D \omega (\nabla d_\Omega \cdot \nabla \hat{u})(\nabla d_\Omega \cdot \nabla v) \mathrm{d}x = - \int_D j'(d_\Omega) v \mathrm{d}x.$$

avec $\omega > 0$ un poids arbitraire.
Alors $u(y) = \hat{u}(y)$ pour tout $y \in \partial\Omega$.

L'implémentation requiert uniquement le calcul de ∇d_Ω et celui d'un poids ω adapté.

Une comparaison avec un cas analytique :





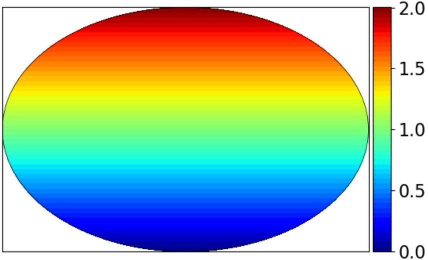
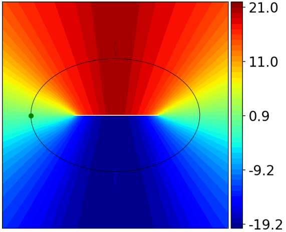
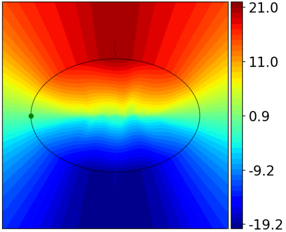


Figure: Un $-j'(d_\Omega(x))$ prescrit.

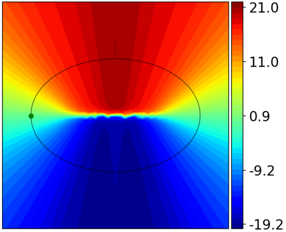
Il faut que le poids ω s'annule près du squelette (axe médian).



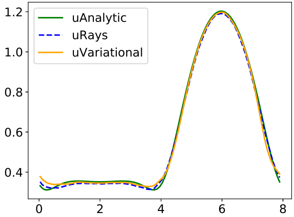
(a) Maillage $\mathcal{T}'$ (squelette manuellement enlevé), $\omega = 1$



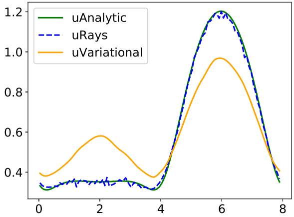
(b) Maillage $\mathcal{T}$, $\omega = 1$.



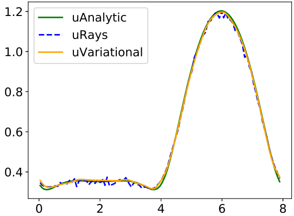
(c) Maillage $\mathcal{T}$, $\omega = 2/(1 + |\Delta d_\Omega|^{3.5})$



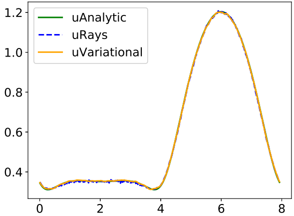
(a) Maillage $\mathcal{T}'$, $\omega = 1$



(b) Maillage $\mathcal{T}$, $\omega = 1$



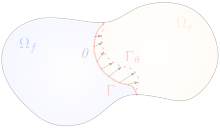
(c) Maillage $\mathcal{T}$, $\omega = 2/(1 + |\Delta d_\Omega|^{3.5})$



(d) Maillage fin $\mathcal{T}$, $\omega = 2/(1 + |\Delta d_\Omega|^{3.5})$

Plan et contributions

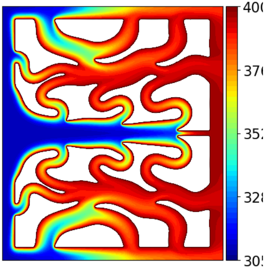
I. Calcul des dérivées de forme

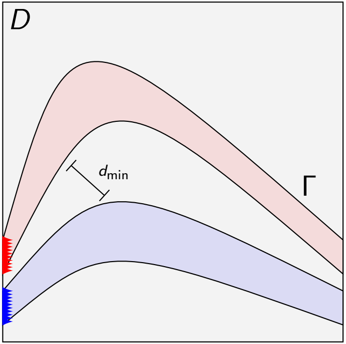


II. Algorithme d'optimisation "null space"

III. Implémentation des contraintes géométriques

IV. Application : échangeurs de chaleur 2-d

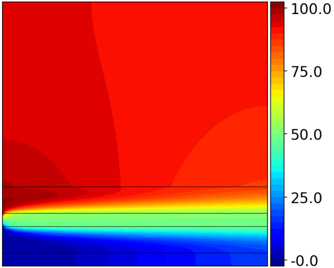




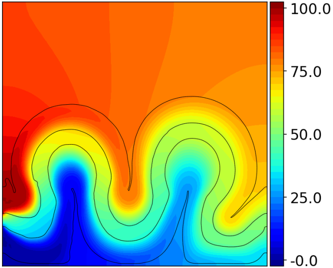
$$\min_{\Gamma} \quad J(\Omega_f) = -\left(\int_{\Omega_{f,cold}} \rho c_p \boldsymbol{v} \cdot \nabla T \mathrm{d}x - \int_{\Omega_{f,hot}} \rho c_p \boldsymbol{v} \cdot \nabla T \mathrm{d}x \right)$$

$$s.c. \begin{cases} \mathtt{DP}(\Omega_f) = \displaystyle\int_{\partial\Omega_f^D} p \mathrm{d}s - \int_{\partial\Omega_f^N} p \mathrm{d}s \leq \mathtt{DP}_0 \\ Q_{hot\leftrightarrow cold}(\Omega_f) \geqslant d_{\min}. \end{cases}$$

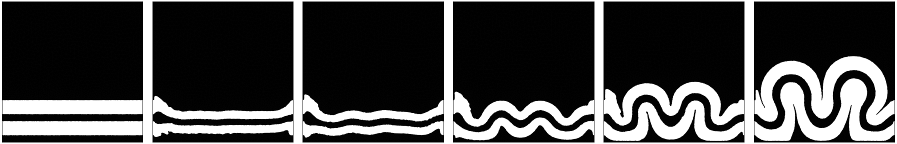
Échangeur de chaleur bi-tube avec contrainte de non mélange



(a) Température initiale



(b) Température finale.



(c) Itérations intermédiaires 0, 8, 20, 50, 88 et 200.

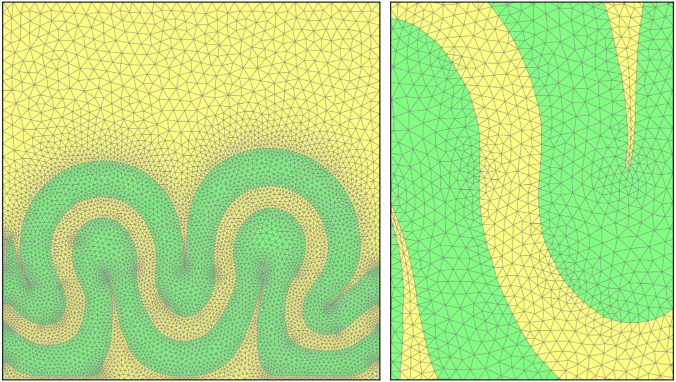
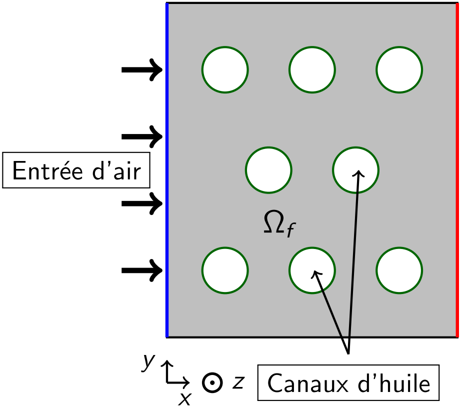


Figure: Zoom sur un maillage optimisé.

Cas test proposé par Safran Aeroboosters :

$T = T_{oil}$ sur Γ.
$T_{air} < T_{oil}$.



- Objectif : maximiser la chaleur récupérée par la phase air sous contrainte de perte de charge.

$$\begin{aligned} \min_{\Omega_f \subset D} \quad & J(\Omega_f) := -\int_{\Omega_f} \rho c_p \boldsymbol{v} \cdot \nabla T \mathrm{d}x \\ s.c. \quad & \mathtt{DP}(\Omega_f) := \int_{\partial\Omega_{f,in}} p \mathrm{d}s - \int_{\partial\Omega_{f,out}} p \mathrm{d}s \le \mathtt{DP}_0. \end{aligned}$$

- Objectif : maximiser la chaleur récupérée par la phase air sous contrainte de perte de charge.

$$\begin{aligned} \min_{\Omega_f \subset D} \quad & J(\Omega_f) := -\int_{\Omega_f} \rho c_p \boldsymbol{v} \cdot \nabla T \mathrm{d}x \\ s.c. \quad & \mathtt{DP}(\Omega_f) := \int_{\partial\Omega_{f,in}} p \mathrm{d}s - \int_{\partial\Omega_{f,out}} p \mathrm{d}s \leq \mathtt{DP}_0. \end{aligned}$$

- Nous considérons aussi une formulation alternative pour prendre en compte une contrainte d'épaisseur minimale sur les canaux d'huile :

$$\begin{aligned} \min_{\Omega_f \subset D} \quad & E(\Omega_f) := -\int_{D \setminus \Omega_f} d_{\Omega_f}^2 \max(-d_{\Omega_f} + d_{\min}/2, 0)^2 \mathrm{d}x \\ s.c. \quad & \begin{cases} \mathtt{DP}(\Omega_f) \leq \mathtt{DP}_0 \\ J(\Omega_f) \leq \mathtt{J}_0. \end{cases} \end{aligned}$$

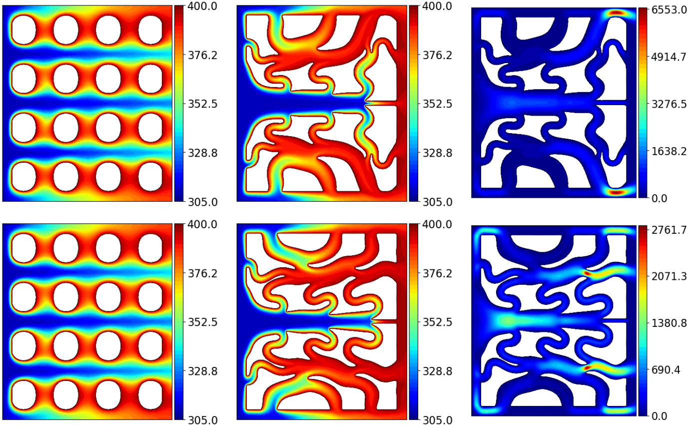
IV. Applications aux échangeurs de chaleur 2-d

Échangeur de chaleur air-huile

Résultats :

Cas test 7
$||\boldsymbol{v}_0||_\infty=10$
$\mathrm{DP}_0=1300$
$J_{final}=4086$
$\mathrm{DP}_{final}=1308$
Sans épaisseur min.

Cas test 8
$||\boldsymbol{v}_0||_\infty=10$
$\mathrm{DP}_0=1300$
$J_{final}=4168$
$\mathrm{DP}_{final}=1188$
Avec épaisseur min.

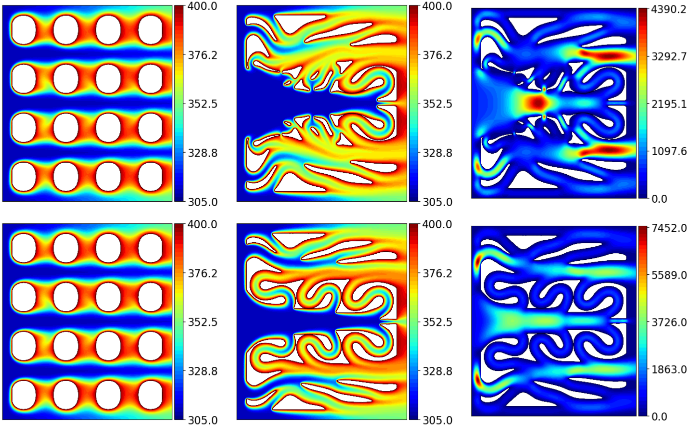


(a) T initial (b) T optimisé (c) $||\boldsymbol{v}||$ optimisé

Résultats :

Cas test 9
$||\boldsymbol{v}_0||_\infty=25$
$\mathrm{DP}_0=1030$
$J_{final}=7667$
$\mathrm{DP}_{final}=968$
Sans épaisseur min.

Cas test 10
$||\boldsymbol{v}_0||_\infty=25$
$\mathrm{DP}_0=1030$
$J_{final}=7508$
$\mathrm{DP}_{final}=1112$
Avec épaisseur min.

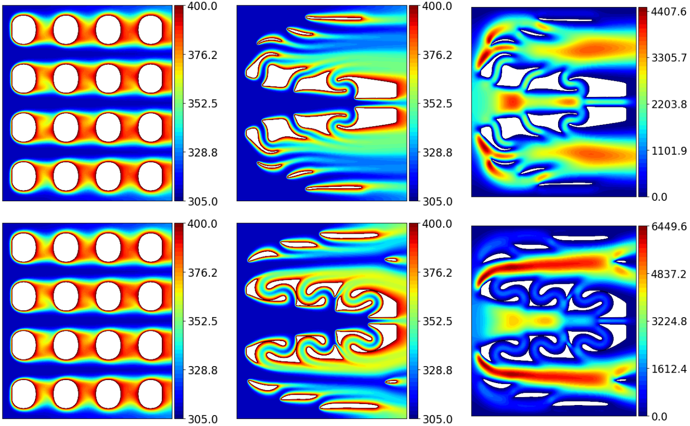


(a) T initial (b) T optimisé (c) $||\boldsymbol{v}||$ optimisé

Résultats :

Cas test 11
$||\boldsymbol{v}_0||_\infty = 40$
$\mathrm{DP}_0 = 475$
$J_{final} = 5731$
$\mathrm{DP}_{final} = 479$
Sans épaisseur min.

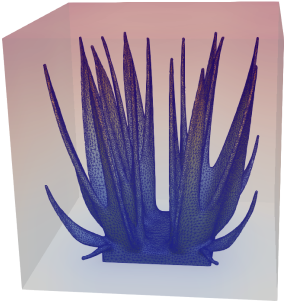
Cas test 12
$||\boldsymbol{v}_0||_\infty = 40$
$\mathrm{DP}_0 = 475$
$J_{final} = 6847$
$\mathrm{DP}_{final} = 524$
Avec épaisseur min.



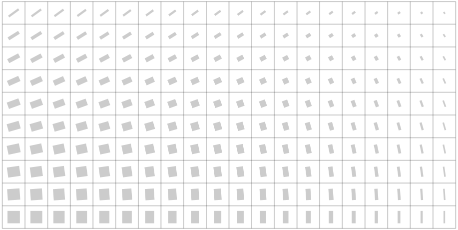
(a) T initial (b) T optimisé (c) $||\boldsymbol{v}||$ optimisé

Plan et contributions

V. Implémentation de cas tests 3-d



Conclusion : vers l'optimisation des systèmes poreux par la méthode d'homogenéisation



V. Implémentation de cas tests 3-d

- En théorie, pas de changement du point de vue de la méthodologie : même dérivées de forme, même algorithme d'optimisation

V. Implémentation de cas tests 3-d

- En théorie, pas de changement du point de vue de la méthodologie : même dérivées de forme, même algorithme d'optimisation
- En pratique, l'implémentation doit être complètement révisée :

V. Implémentation de cas tests 3-d

- En théorie, pas de changement du point de vue de la méthodologie : même dérivées de forme, même algorithme d'optimisation
- En pratique, l'implémentation doit être complètement révisée :
  - taille des problèmes éléments finis $\longrightarrow$ préconditionnement et décomposition de domaine ;

V. Implémentation de cas tests 3-d

- En théorie, pas de changement du point de vue de la méthodologie : même dérivées de forme, même algorithme d'optimisation
- En pratique, l'implémentation doit être complètement révisée :
  - taille des problèmes éléments finis $\longrightarrow$ préconditionnement et décomposition de domaine ;
  - remaillage 3-d.

V. Implémentation de cas tests 3-d

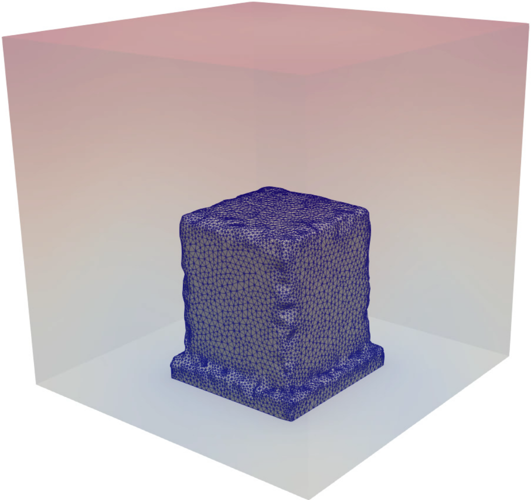
L'interface en FreeFEM proposée par Pierre Jolivet nous a permis d'utiliser la librairie PETSc et la décomposition de domaine :

- Élasticité linéaire : Geometric Algebraic Multigrid (GAMG) + CG
- Conduction thermique : hypre
- Équations de Navier-Stokes : Lagrangien augmenté pour le problème Oseen (Moulin, Jolivet, Marquet 2019)

Maximisation de la conduction thermique :

$$\min_{\Omega_f \subset D} \quad \int_D T \, \mathrm{d}x$$

$$s.c. \quad \int_{\Omega_f} \mathrm{d}x \leq V_0$$

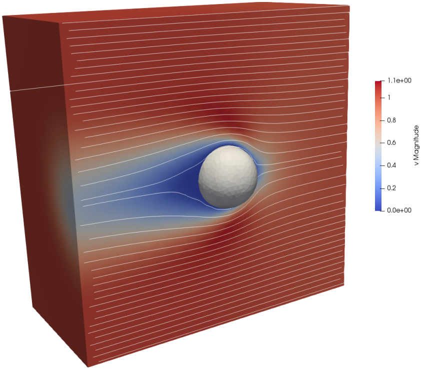


$$\min \quad -\mathrm{Lift}(\Gamma, \boldsymbol{v}(\Gamma), p(\Gamma))$$

$$\text{s.c.} \begin{cases} \mathrm{Drag}(\Gamma, \boldsymbol{v}(\Gamma), p(\Gamma)) \leq \mathtt{DRAG}_0 \\ \mathrm{Vol}(\Omega_f) = V_0 \\ \boldsymbol{X}(\Omega_s) := \dfrac{1}{|\Omega_s|} \displaystyle\int_{\Omega_s} \boldsymbol{x} \mathrm{d}x = \boldsymbol{x}_0, \end{cases}$$

$$\mathrm{Lift}(\Gamma, \boldsymbol{v}(\Gamma), p(\Gamma)) := -\int_\Gamma \boldsymbol{e}_y \cdot \sigma_f(\boldsymbol{v}, p) \boldsymbol{n} \mathrm{d}s,$$

$$\mathrm{Drag}(\Gamma, \boldsymbol{v}(\Gamma), p(\Gamma)) := \int_{\Omega_f} \sigma_f(\boldsymbol{v}, p) : \nabla \boldsymbol{v} \mathrm{d}x.$$



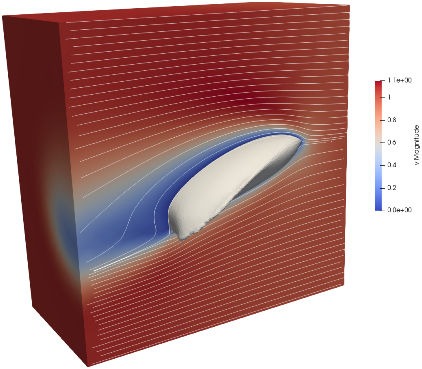
Maximisation de la portance sous contrainte de traînée

$$\min \quad -\mathrm{Lift}(\Gamma, \boldsymbol{v}(\Gamma), p(\Gamma))$$

$$s.c. \begin{cases} \mathrm{Drag}(\Gamma, \boldsymbol{v}(\Gamma), p(\Gamma)) \leq \mathtt{DRAG}_0 \\ \mathrm{Vol}(\Omega_f) = V_0 \\ \boldsymbol{X}(\Omega_s) := \dfrac{1}{|\Omega_s|} \displaystyle\int_{\Omega_s} \boldsymbol{x} \mathrm{d}x = \boldsymbol{x}_0, \end{cases}$$

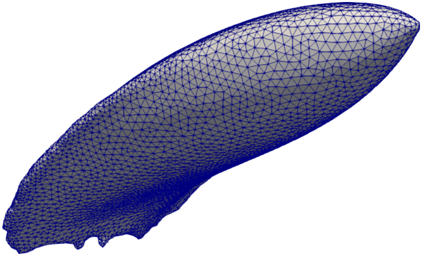
$$\mathrm{Lift}(\Gamma, \boldsymbol{v}(\Gamma), p(\Gamma)) := -\int_{\Gamma} \boldsymbol{e}_y \cdot \sigma_f(\boldsymbol{v}, p) \boldsymbol{n} \mathrm{d}s,$$

$$\mathrm{Drag}(\Gamma, \boldsymbol{v}(\Gamma), p(\Gamma)) := \int_{\Omega_f} \sigma_f(\boldsymbol{v}, p) : \nabla \boldsymbol{v} \mathrm{d}x.$$



$$\min \quad -\,\mathrm{Lift}(\Gamma, \boldsymbol{v}(\Gamma), p(\Gamma))$$

$$s.c. \begin{cases} \mathrm{Drag}(\Gamma, \boldsymbol{v}(\Gamma), p(\Gamma)) \leq \mathtt{DRAG}_0 \\ \mathrm{Vol}(\Omega_f) = V_0 \\ \boldsymbol{X}(\Omega_s) := \dfrac{1}{|\Omega_s|} \displaystyle\int_{\Omega_s} \boldsymbol{x}\,\mathrm{d}x = \boldsymbol{x}_0, \end{cases}$$



$$\mathrm{Lift}(\Gamma, \boldsymbol{v}(\Gamma), p(\Gamma)) := -\int_{\Gamma} \boldsymbol{e}_y \cdot \sigma_f(\boldsymbol{v}, p)\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}s,$$

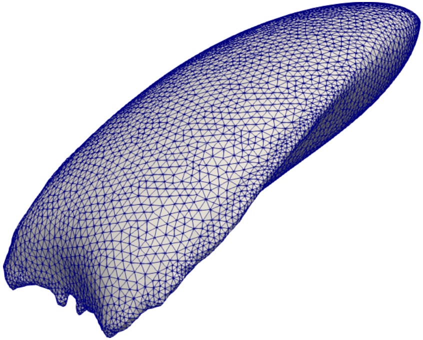
$$\mathrm{Drag}(\Gamma, \boldsymbol{v}(\Gamma), p(\Gamma)) := \int_{\Omega_f} \sigma_f(\boldsymbol{v}, p) : \nabla \boldsymbol{v}\,\mathrm{d}x.$$

$$\min \quad -\,\mathrm{Lift}(\Gamma, \boldsymbol{v}(\Gamma), p(\Gamma))$$

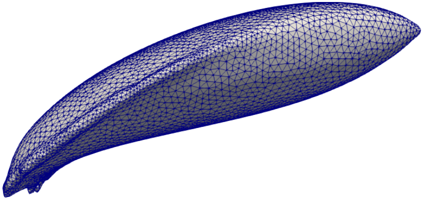
$$s.c. \begin{cases} \mathrm{Drag}(\Gamma, \boldsymbol{v}(\Gamma), p(\Gamma)) \leq \mathtt{DRAG}_0 \\ \mathrm{Vol}(\Omega_f) = V_0 \\ \boldsymbol{X}(\Omega_s) := \dfrac{1}{|\Omega_s|} \displaystyle\int_{\Omega_s} \boldsymbol{x} \mathrm{d}x = \boldsymbol{x}_0, \end{cases}$$

$$\mathrm{Lift}(\Gamma, \boldsymbol{v}(\Gamma), p(\Gamma)) := -\int_{\Gamma} \boldsymbol{e}_y \cdot \sigma_f(\boldsymbol{v}, p) \boldsymbol{n} \mathrm{d}s,$$

$$\mathrm{Drag}(\Gamma, \boldsymbol{v}(\Gamma), p(\Gamma)) := \int_{\Omega_f} \sigma_f(\boldsymbol{v}, p) : \nabla \boldsymbol{v} \mathrm{d}x.$$



$$
\begin{aligned}
\min \quad & -\mathrm{Lift}(\Gamma, \boldsymbol{v}(\Gamma), p(\Gamma)) \\
s.c. \quad & \begin{cases} \mathrm{Drag}(\Gamma, \boldsymbol{v}(\Gamma), p(\Gamma)) \leq \mathtt{DRAG}_0 \\ \mathrm{Vol}(\Omega_f) = V_0 \\ \boldsymbol{X}(\Omega_s) := \dfrac{1}{|\Omega_s|} \displaystyle\int_{\Omega_s} \boldsymbol{x} \mathrm{d}x = \boldsymbol{x}_0, \end{cases}
\end{aligned}
$$



$$
\mathrm{Lift}(\Gamma, \boldsymbol{v}(\Gamma), p(\Gamma)) := -\int_{\Gamma} \boldsymbol{e}_y \cdot \sigma_f(\boldsymbol{v}, p) \boldsymbol{n} \mathrm{d}s,
$$

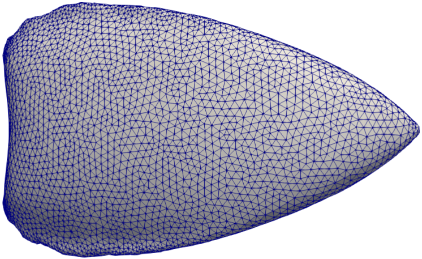
$$
\mathrm{Drag}(\Gamma, \boldsymbol{v}(\Gamma), p(\Gamma)) := \int_{\Omega_f} \sigma_f(\boldsymbol{v}, p) : \nabla \boldsymbol{v} \mathrm{d}x.
$$

$$\min \quad -\,\mathrm{Lift}(\Gamma, \boldsymbol{v}(\Gamma), p(\Gamma))$$

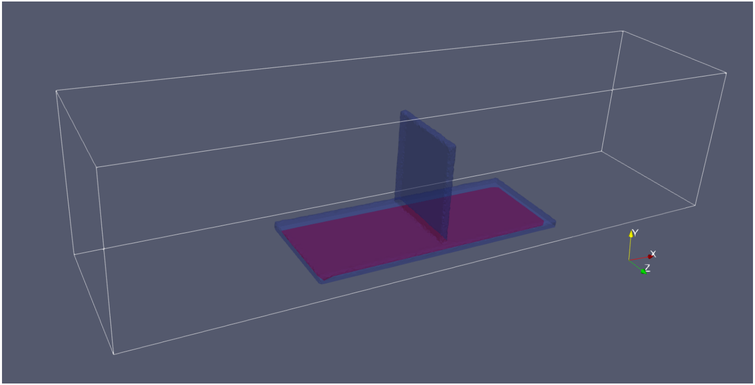
$$s.c. \begin{cases} \mathrm{Drag}(\Gamma, \boldsymbol{v}(\Gamma), p(\Gamma)) \leq \mathtt{DRAG}_0 \\ \mathrm{Vol}(\Omega_f) = V_0 \\ \boldsymbol{X}(\Omega_s) := \dfrac{1}{|\Omega_s|} \displaystyle\int_{\Omega_s} \boldsymbol{x}\,\mathrm{d}x = \boldsymbol{x}_0, \end{cases}$$

$$\mathrm{Lift}(\Gamma, \boldsymbol{v}(\Gamma), p(\Gamma)) := -\int_{\Gamma} \boldsymbol{e}_y \cdot \sigma_f(\boldsymbol{v}, p)\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}s,$$

$$\mathrm{Drag}(\Gamma, \boldsymbol{v}(\Gamma), p(\Gamma)) := \int_{\Omega_f} \sigma_f(\boldsymbol{v}, p) : \nabla \boldsymbol{v}\,\mathrm{d}x.$$

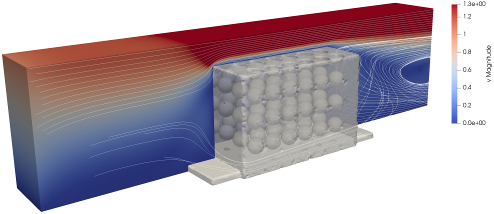


Minimisation de la compliance avec interaction fluide-structure :

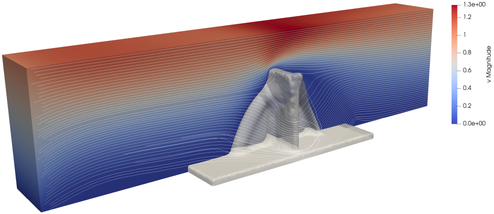


$$\min \quad \int_{\Omega_s} Ae(\boldsymbol{u}) : e(\boldsymbol{u}) \mathrm{d}x$$
$$s.c. \quad \mathrm{Vol}(\Omega_s) = \mathrm{Vol}_{target}.$$

Minimisation de la compliance avec interaction fluide-structure :

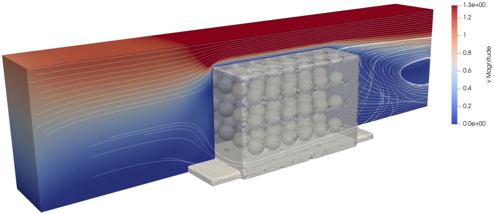


(a) Forme initiale

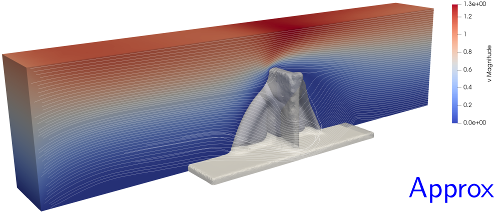


(b) Forme optimisée

Minimisation de la compliance avec interaction fluide-structure :



(a) Forme initiale



(b) Forme optimisée

Approx. 2 millions d'éléments.

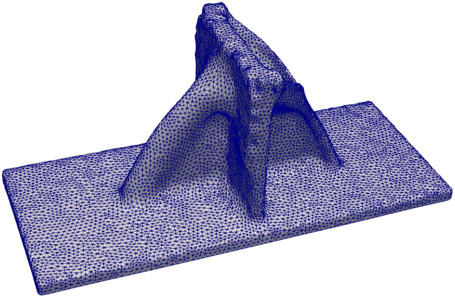


Figure: Forme optimisée.

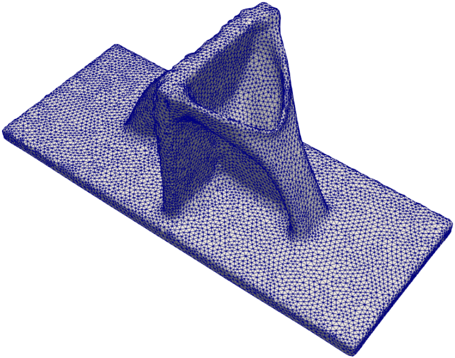


Figure: Forme optimisée.

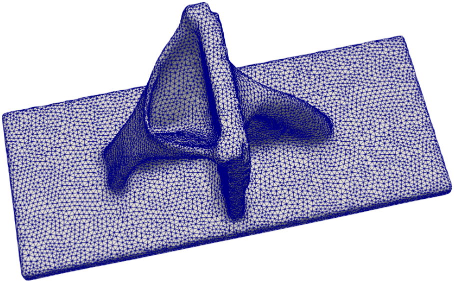


Figure: Forme optimisée.

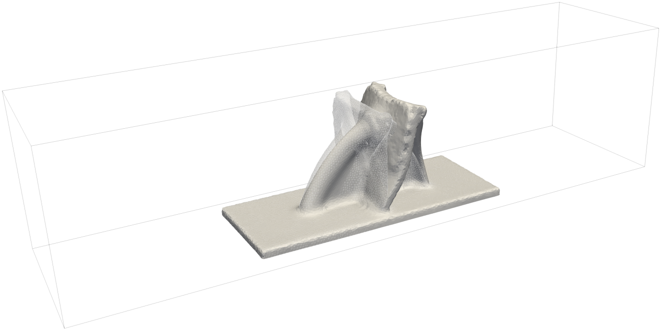
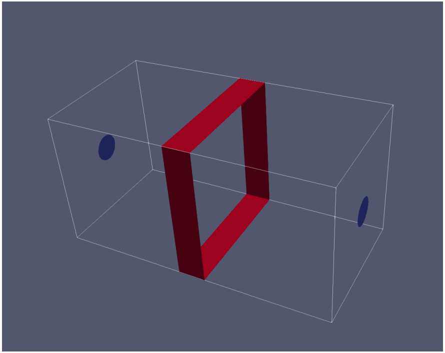


Figure: Déformation élastique.



$$\min_{\Gamma} \quad J(\Gamma, \boldsymbol{v}(\Gamma), T(\Gamma)) := -\int_{\Omega_f} \rho c_p \boldsymbol{v} \cdot \nabla T \mathrm{d}x$$

$$s.t. \quad \begin{cases} \mathrm{DP}(p(\Gamma)) := \displaystyle\int_{\partial\Omega_f^D} p\mathrm{d}s - \int_{\partial\Omega_f^N} p\mathrm{d}s \leq \mathrm{DP}_{static} \\ \hfill \mathrm{Vol}(\Omega_f) = V_{target}. \end{cases}$$

V. Implémentation de cas tests 3-d

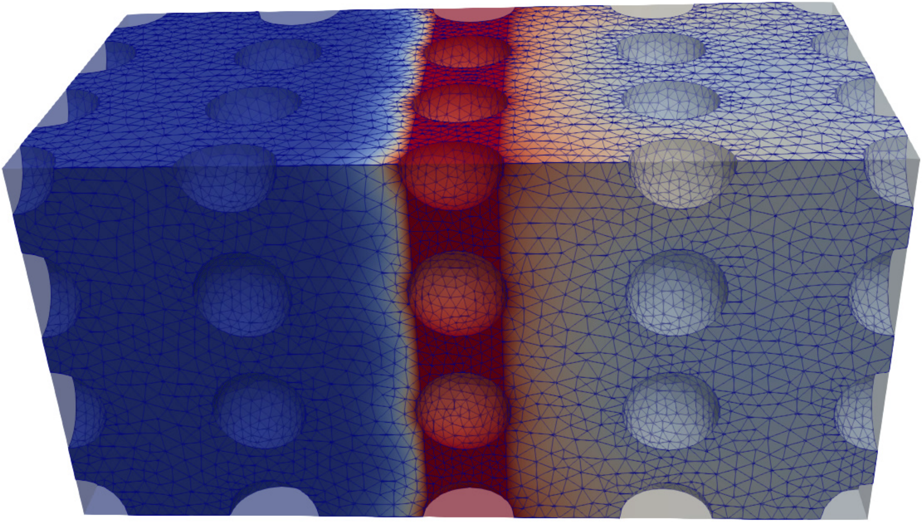
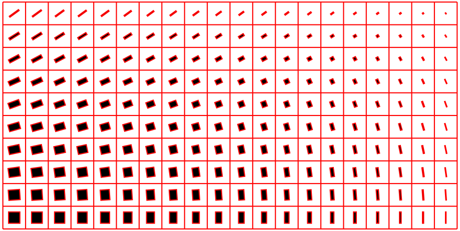


Figure: Convection diffusion 3-d

Plan et contributions

V. Implémentation de cas tests 3-d

Conclusion : vers l'optimisation des systèmes poreux par la méthode d'homogenéisation



Conclusion : optimisation topologique des milieux poreux par homogénéisation

Les designs d'échangeurs de chaleur industriels sont très complexes...

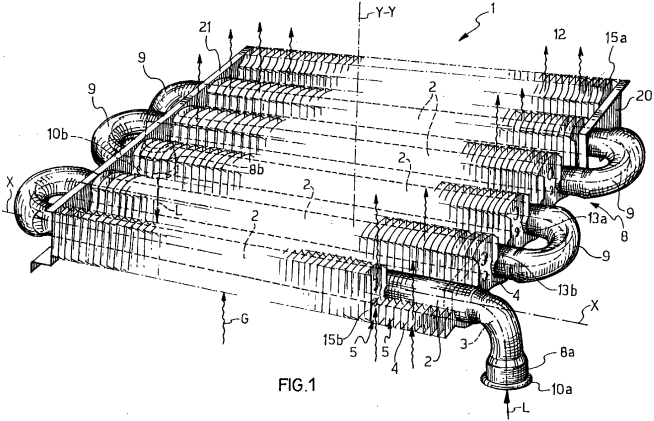
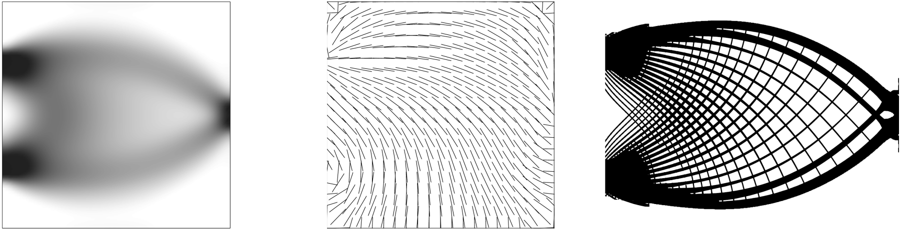


FIG.1

Conclusion : optimisation topologique des milieux poreux par homogénéisation

Les méthodes d'optimisation topologique par homogénéisation permettent de générer des formes composites complexes :



(a) Densité optimale

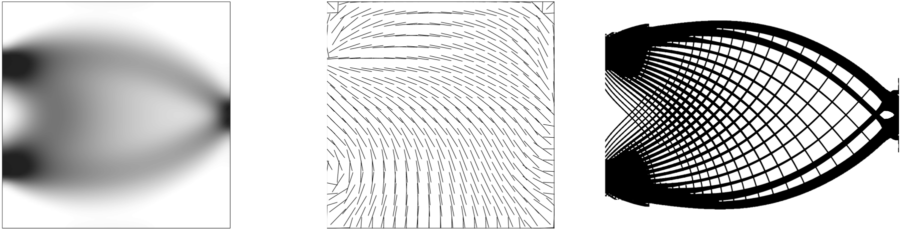
(b) Orientation optimale

(c) Forme interprétée

Figure: Optimisation topologique d'une console en flexion par homogénéisation (Geoffroy-Donders 2018).

Conclusion : optimisation topologique des milieux poreux par homogénéisation

Les méthodes d'optimisation topologique par homogénéisation permettent de générer des formes composites complexes :



(a) Densité optimale

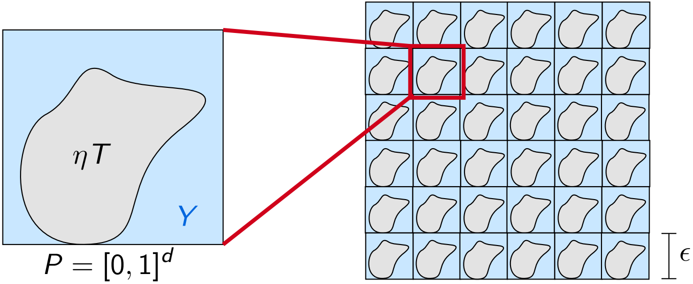
(b) Orientation optimale

(c) Forme interprétée

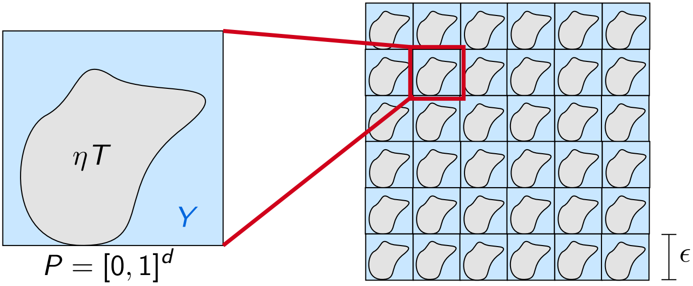
Figure: Optimisation topologique d'une console en flexion par homogénéisation (Geoffroy-Donders 2018).

Pour le moment, plutôt restreint à la mécanique des structures. . .

Conclusion : optimisation topologique des milieux poreux par homogénéisation



Conclusion : optimisation topologique des milieux poreux par homogénéisation



En fonction du rapport d'échelles entre η et ϵ, il y a trois modèles homogénéisés possibles : Stokes, Brinkman ou Darcy.

Conclusion : optimisation topologique des milieux poreux par homogénéisation

- Modèle de Stokes en milieu poreux non homogénéisé

$$\begin{cases} -\Delta \boldsymbol{u}_\epsilon + \nabla p_\epsilon = \boldsymbol{f} \text{ dans } D_\epsilon \\ \operatorname{div}(\boldsymbol{u}_\epsilon) = 0 \text{ dans } D_\epsilon \\ \boldsymbol{u}_\epsilon = 0 \text{ sur } \partial\omega_\epsilon \end{cases}$$

Conclusion : optimisation topologique des milieux poreux par homogénéisation

- Modèle de Stokes en milieu poreux non homogénéisé

$$\begin{cases} -\Delta \boldsymbol{u}_\epsilon + \nabla p_\epsilon = \boldsymbol{f} \text{ dans } D_\epsilon \\ \mathrm{div}(\boldsymbol{u}_\epsilon) = 0 \text{ dans } D_\epsilon \\ \boldsymbol{u}_\epsilon = 0 \text{ sur } \partial\omega_\epsilon \end{cases}$$

- Le modèle homogénéisé de Darcy ($\eta \propto 1$):

$$\begin{cases} \epsilon^{-2} M^0 \boldsymbol{u} + \nabla p = \boldsymbol{f} \text{ dans } D \\ \mathrm{div}(\boldsymbol{u}) = 0 \text{ dans } D \end{cases}$$

Conclusion : optimisation topologique des milieux poreux par homogénéisation

- Modèle de Stokes en milieu poreux non homogénéisé

$$\begin{cases} -\Delta \boldsymbol{u}_\epsilon + \nabla p_\epsilon = \boldsymbol{f} \text{ dans } D_\epsilon \\ \operatorname{div}(\boldsymbol{u}_\epsilon) = 0 \text{ dans } D_\epsilon \\ \boldsymbol{u}_\epsilon = 0 \text{ sur } \partial\omega_\epsilon \end{cases}$$

- Le modèle homogénéisé de Darcy ($\eta \propto 1$):

$$\begin{cases} \epsilon^{-2} M^0 \boldsymbol{u} + \nabla p = \boldsymbol{f} \text{ dans } D \\ \operatorname{div}(\boldsymbol{u}) = 0 \text{ dans } D \end{cases}$$

Ce modèle dégénère quand $\eta \to 0$.

Conclusion : optimisation topologique des milieux poreux par homogénéisation

- Modèle de Stokes en milieu poreux non homogénéisé

$$\begin{cases} -\Delta \boldsymbol{u}_\epsilon + \nabla p_\epsilon = \boldsymbol{f} \text{ dans } D_\epsilon \\ \operatorname{div}(\boldsymbol{u}_\epsilon) = 0 \text{ dans } D_\epsilon \\ \boldsymbol{u}_\epsilon = 0 \text{ sur } \partial\omega_\epsilon \end{cases}$$

- Le modèle homogénéisé de Darcy ($\eta \propto 1$):

$$\begin{cases} \epsilon^{-2} M^0 \boldsymbol{u} + \nabla p = \boldsymbol{f} \text{ dans } D \\ \operatorname{div}(\boldsymbol{u}) = 0 \text{ dans } D \end{cases}$$

  Ce modèle dégénère quand $\eta \to 0$.

- Le modèle de Brinkman ($\eta \sim \epsilon^2$):

$$\begin{cases} -\Delta \boldsymbol{u} + \Psi^* \boldsymbol{u} + \nabla p = \boldsymbol{f} \text{ dans } D \\ \operatorname{div}(\boldsymbol{u}) = 0 \text{ dans } D \end{cases}$$

  Transition continue entre obstacle ($|\Psi^*| \to +\infty$) et absence d'obstacle ($\Psi^* = 0$).

Conclusion : optimisation topologique des milieux poreux par homogénéisation

- Modèle de Stokes en milieu poreux non homogénéisé

$$\begin{cases} -\Delta \boldsymbol{u}_\epsilon + \nabla p_\epsilon = \boldsymbol{f} \text{ dans } D_\epsilon \\ \mathrm{div}(\boldsymbol{u}_\epsilon) = 0 \text{ dans } D_\epsilon \\ \boldsymbol{u}_\epsilon = 0 \text{ sur } \partial\omega_\epsilon \end{cases}$$

- Le modèle homogénéisé de Darcy ($\eta \propto 1$):

$$\begin{cases} \epsilon^{-2} M^0 \boldsymbol{u} + \nabla p = \boldsymbol{f} \text{ dans } D \\ \mathrm{div}(\boldsymbol{u}) = 0 \text{ dans } D \end{cases}$$

  Ce modèle dégénère quand $\eta \to 0$.

- Le modèle de Brinkman ($\eta \sim \epsilon^2$):

$$\begin{cases} -\Delta \boldsymbol{u} + \Psi^* \boldsymbol{u} + \nabla p = \boldsymbol{f} \text{ dans } D \\ \mathrm{div}(\boldsymbol{u}) = 0 \text{ dans } D \end{cases}$$

  Transition continue entre obstacle ($|\Psi^*| \to +\infty$) et absence d'obstacle ($\Psi^* = 0$). Taille d'obstacles $\epsilon\eta \propto \epsilon^3$ (en 3-d) peu pertinente pour les applications.

Conclusion : optimisation topologique des milieux poreux par homogénéisation

Nos résultats :

- Nous déterminons des équations homogénéisées à tous les ordres pour le problème de Stokes en milieu perforé :

$$\begin{cases} -\Delta \boldsymbol{u}_\epsilon + \nabla p_\epsilon = \boldsymbol{f} \text{ dans } D_\epsilon \\ \operatorname{div}(\boldsymbol{u}_\epsilon) = 0 \text{ dans } D_\epsilon \\ \boldsymbol{u}_\epsilon = 0 \text{ sur } \partial\omega_\epsilon \\ \boldsymbol{u}_\epsilon = \text{ est } D\text{–périodique.} \end{cases}$$

Conclusion : optimisation topologique des milieux poreux par homogénéisation

Nos résultats :

- Nous déterminons des équations homogénéisées à tous les ordres pour le problème de Stokes en milieu perforé :

$$\begin{cases} -\Delta \boldsymbol{u}_\epsilon + \nabla p_\epsilon = \boldsymbol{f} \text{ dans } D_\epsilon \\ \operatorname{div}(\boldsymbol{u}_\epsilon) = 0 \text{ dans } D_\epsilon \\ \boldsymbol{u}_\epsilon = 0 \text{ sur } \partial\omega_\epsilon \\ \boldsymbol{u}_\epsilon = \text{ est } D\text{–périodique.} \end{cases}$$

- Ces équations s'écrivent pour un ordre K donné :

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{q=0}^{2K+2} \epsilon^{q-2} \mathbb{D}_K^q \cdot \nabla^q \boldsymbol{v}_K^* + \nabla p_K^* = \boldsymbol{f}, \\ \operatorname{div}(\boldsymbol{v}_K^*) = 0, \\ \boldsymbol{v}_K^* \text{ est } D\text{–périodique.} \end{cases}$$

Conclusion : optimisation topologique des milieux poreux par homogénéisation

- ces équations englobent le modèle de Brinkman, Darcy et Stokes.

Conclusion : optimisation topologique des milieux poreux par homogénéisation

- ces équations englobent le modèle de Brinkman, Darcy et Stokes. Pour $K = 0$:

$$\mathbb{D}_0^2 \cdot \nabla^2 \boldsymbol{v}_0^* + \epsilon^{-1}\mathbb{D}_0^1 \cdot \nabla \boldsymbol{v}_0^* + \epsilon^{-2}\mathbb{D}_0^0 \boldsymbol{v}_0^* + \nabla q_0^* = \boldsymbol{f}$$

avec les asymptotiques suivantes quand $\eta \to 0$:

Conclusion : optimisation topologique des milieux poreux par homogénéisation

- ces équations englobent le modèle de Brinkman, Darcy et Stokes. Pour $K = 0$:

$$\mathbb{D}_0^2 \cdot \nabla^2 \boldsymbol{v}_0^* + \epsilon^{-1} \mathbb{D}_0^1 \cdot \nabla \boldsymbol{v}_0^* + \epsilon^{-2} \mathbb{D}_0^0 \boldsymbol{v}_0^* + \nabla q_0^* = \boldsymbol{f}$$

avec les asymptotiques suivantes quand $\eta \to 0$:

$$\epsilon^{-2} \mathbb{D}_0^0 \sim \eta^{d-2} / \epsilon^2 \Psi^*$$

Conclusion : optimisation topologique des milieux poreux par homogénéisation

- ces équations englobent le modèle de Brinkman, Darcy et Stokes. Pour $K = 0$:

$$\mathbb{D}_0^2 \cdot \nabla^2 \boldsymbol{v}_0^* + \epsilon^{-1} \mathbb{D}_0^1 \cdot \nabla \boldsymbol{v}_0^* + \epsilon^{-2} \mathbb{D}_0^0 \boldsymbol{v}_0^* + \nabla q_0^* = \boldsymbol{f}$$

avec les asymptotiques suivantes quand $\eta \to 0$:

$$\epsilon^{-2} \mathbb{D}_0^0 \sim \eta^{d-2}/\epsilon^2 \Psi^*$$
$$\epsilon^{-1} \mathbb{D}_0^1 = o\left(\epsilon(\eta^{d-2}/\epsilon^2)\right)$$

Conclusion : optimisation topologique des milieux poreux par homogénéisation

- ces équations englobent le modèle de Brinkman, Darcy et Stokes. Pour $K = 0$:

$$\mathbb{D}_0^2 \cdot \nabla^2 \boldsymbol{v}_0^* + \epsilon^{-1}\mathbb{D}_0^1 \cdot \nabla \boldsymbol{v}_0^* + \epsilon^{-2}\mathbb{D}_0^0 \boldsymbol{v}_0^* + \nabla q_0^* = \boldsymbol{f}$$

avec les asymptotiques suivantes quand $\eta \to 0$:

$$\epsilon^{-2}\mathbb{D}_0^0 \sim \eta^{d-2}/\epsilon^2 \Psi^*$$

$$\epsilon^{-1}\mathbb{D}_0^1 = o\left(\epsilon(\eta^{d-2}/\epsilon^2)\right)$$

$$\mathbb{D}_0^2 \to -\boldsymbol{I}$$

Conclusion : optimisation topologique des milieux poreux par homogénéisation

- ces équations englobent le modèle de Brinkman, Darcy et Stokes. Pour $K = 0$:

$$\mathbb{D}_0^2 \cdot \nabla^2 \boldsymbol{v}_0^* + \epsilon^{-1}\mathbb{D}_0^1 \cdot \nabla \boldsymbol{v}_0^* + \epsilon^{-2}\mathbb{D}_0^0 \boldsymbol{v}_0^* + \nabla q_0^* = \boldsymbol{f}$$

  avec les asymptotiques suivantes quand $\eta \to 0$:

$$\epsilon^{-2}\mathbb{D}_0^0 \sim \eta^{d-2}/\epsilon^2 \Psi^*$$
$$\epsilon^{-1}\mathbb{D}_0^1 = o\left(\epsilon(\eta^{d-2}/\epsilon^2)\right)$$
$$\mathbb{D}_0^2 \to -\boldsymbol{I}$$

- couplées à un modèle thermique, elles pourraient permettre l'optimisation d'échangeurs thermiques par homogénéisation.

References

FEPPON, F., ALLAIRE, G., BORDEU, F., CORTIAL, J., AND DAPOGNY, C. Shape optimization of a coupled thermal fluid-structure problem in a level set mesh evolution framework.
SeMA Journal (2019).

FEPPON, F., ALLAIRE, G., AND DAPOGNY, C. Null space gradient flows for constrained optimization with applications to shape optimization.
HAL preprint hal-01972915 (2019).

FEPPON, F., ALLAIRE, G., AND DAPOGNY, C. A variational formulation for computing shape derivatives of geometric constraints along rays.
HAL preprint hal-01879571 (2019).

Merci pour votre attention. Questions ?

Figure: Forme optimale d'un paon suspendu en trois dimensions.