Analysis II - Lösung Serie 10

1. Betrachte also das Quadrat

$$G = \{(x, y) \mid -L \leq x \leq L,\ -L \leq y \leq L\}$$

Das Problem lautet dann

$$u_{xx} + u_{yy} + \lambda\, u = 0 \quad \text{in } G$$

$$\begin{aligned} u\,(x, -L) &= 0 \qquad & u\,(x, L) &= 0 \\ u\,(-L, y) &= 0 \qquad & u\,(L, y) &= 0 \end{aligned}$$

Der Separationsansatz $u\,(x, y) = X\,(x)\, Y\,(y)$ führt wie in Aufgabe 1 von Serie 9 mit $\lambda = \nu^2 + \mu^2$ auf

$$\frac{X''}{X} = -\nu^2 \qquad \frac{Y''}{Y} = -\mu^2$$

Für $X\,(x)$ ergibt sich

$$X'' + \nu^2 X = 0$$

$$X\,(x) = C_1^x\, \sin\,(\nu x) + C_2^x\, \cos\,(\nu x)$$

Aus den Randbedinungen folgt

$$X\,(L) = 0 \quad X\,(-L) = 0$$

und damit

$$\begin{aligned} C_1^x\, \sin\,(\nu L) + C_2^x\, \cos\,(\nu L) &= 0 \\ C_1^x\, \sin\,(-\nu L) + C_2^x\, \cos\,(-\nu L) &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} \sin\,(\nu L) & \cos\,(\nu L) \\ -\sin\,(\nu L) & \cos\,(\nu L) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1^x \\ C_2^x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

also für eine nichttriviale Lösung

$$\det \begin{pmatrix} \sin\,(\nu L) & \cos\,(\nu L) \\ -\sin\,(\nu L) & \cos\,(\nu L) \end{pmatrix} = 0 \qquad 2 \sin\,(\nu L) \cos\,(\nu L) = \sin\,(\nu 2L) = 0$$

$$\nu_k = \frac{k\pi}{2L} \quad k = 1, 2, ..$$

Für die Konstanten ergibt sich

$$C_1^x\, \sin\,(\nu L) = C_2^x\, \cos\,(\nu L) \qquad \text{z.B.:} \quad C_1^x = C^x\, \cos\,(\nu L) \quad \text{und} \quad C_2^x = C^x \sin\,(\nu L)$$

$$X\,(x) = C^x\, (\cos\,(\nu_k\, L) \sin\,(\nu_k\, x) + \sin\,(\nu_k\, L) \cos\,(\nu_k\, x)) = C^x \sin\left(\frac{k\pi}{2L}\,(x + L)\right) \qquad k = 1, 2, ..$$

und analog für $Y\,(y)$

$$\mu_l = \frac{l\pi}{2L} \qquad Y\,(y) = C^y \sin\left(\frac{l\pi}{2L}\,(y + L)\right)$$

$$\Rightarrow \quad \text{Eigenfunktionen} \quad u_{k,l}\,(x, y) = C \sin\left(\frac{k\pi}{2L}\,(x + L)\right) \sin\left(\frac{l\pi}{2L}\,(y + L)\right)$$

Normierung der Eigenfunktionen $u_{k,l}$

$$1 \stackrel{!}{=} \|u_{k,l}\|^2 = \int\limits_G u_{k,l}^2\, dA = \int\limits_{-L}^{L} \int\limits_{-L}^{L} C^2 \sin^2\left(\frac{k\pi}{2L}\,(x + L)\right) \sin^2\left(\frac{l\pi}{2L}\,(y + L)\right)\, dx\, dy$$

$$= C^2 \int\limits_{-L}^{L} \sin^2\left(\frac{k\pi}{2L}\,(x + L)\right)\, dx \int\limits_{-L}^{L} \sin^2\left(\frac{l\pi}{2L}\,(y + L)\right)\, dy = C^2 L^2 \qquad \Rightarrow \quad C = \frac{1}{L}$$

Entwicklung von $\varphi(x,y)$

$$\varphi(x,y) = \sum_{k,l=1}^{\infty} \alpha_{k,l}\, u_{k,l}(x,y)$$

mit den Entwicklungskoeffizienten

$$\begin{aligned}
\alpha_{k,l} &= \int_G \varphi\, u_{k,l}\, dA = \int_{-L}^{L}\int_{-L}^{L} (x+y)\, u_{k,l}(x,y)\; dx\, dy = \int_{-L}^{L}\int_{-L}^{L} x\, u_{k,l}(x,y)\; dx\, dy + \int_{-L}^{L}\int_{-L}^{L} y\, u_{k,l}(x,y)\; dx\, dy \\
&= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} x \sin\left(\frac{k\pi}{2L}(x+L)\right) dx \int_{-L}^{L} \sin\left(\frac{l\pi}{2L}(y+L)\right) dy \\
&+ \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} \sin\left(\frac{k\pi}{2L}(x+L)\right) dx \int_{-L}^{L} y\sin\left(\frac{l\pi}{2L}(y+L)\right) dy \\
&= \frac{1}{L}\left(-\frac{2L^2}{k\pi} - \frac{2L^2}{k\pi}\cos(k\pi)\right)\left(\frac{2L}{l\pi} - \frac{2L}{l\pi}\cos(l\pi)\right) \\
&+ \frac{1}{L}\left(\frac{2L}{k\pi} - \frac{2L}{k\pi}\cos(k\pi)\right)\left(-\frac{2L^2}{l\pi} - \frac{2L^2}{l\pi}\cos(l\pi)\right) \\
&= \frac{4L^2}{k\,l\,\pi^2}\left(\left((-1)^k+1\right)\left((-1)^l-1\right) + \left((-1)^l+1\right)\left((-1)^k-1\right)\right) = \frac{4L^2}{k\,l\,\pi^2}\left(2\,(-1)^{k+l}-2\right) \\
&= \begin{cases} -\frac{16L^2}{k\,l\,\pi^2} & \text{für } k+l \text{ ungerade} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}
\end{aligned}$$

Insgesamt

$$\varphi(x,y) = \sum_{\substack{k,l=1 \\ k+l \text{ ungerade}}}^{\infty} \left(-\frac{16L^2}{k\,l\,\pi^2}\right)\frac{1}{L}\sin\left(\frac{k\pi}{2L}(x+L)\right)\sin\left(\frac{l\pi}{2L}(y+L)\right)$$

2. Rechteck

$$G = \{(x,y)\;|\; 0 \le x \le a,\; 0 \le y \le b\}$$

und

$$\Delta u - c^2\, u = 0 \quad \text{in } G \qquad u = 1 \quad \text{auf } \partial G$$

Zuerst werden die Randbedingungen durch die Transformation $v := 1-u$ und $u = 1-v$ "homogenisiert". Für v gilt dann

$$-\Delta v + c^2\, v - c^2 = 0 \quad \text{in } G \qquad v = 0 \quad \text{auf } \partial G$$

Als nächstes werden die Eigenfunktionen und Eigenwerte des Problems

$$\Delta\varphi + \lambda\varphi = 0 \quad \text{in } G \qquad \varphi = 0 \quad \text{auf } \partial G$$

berechnet: Der Ansatz $\varphi(x,y) = X(x)\,Y(y)$ ergibt

$$\varphi_{k,l}(x,y) = C\sin\left(\frac{k\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{l\pi}{b}y\right) \qquad \lambda_{k,l} = \pi^2\left(\frac{k^2}{a^2}+\frac{l^2}{b^2}\right) \quad k = 1,2,..$$

und die Konstante C wird durch Normierung bestimmt:

$$\begin{aligned}
1 \stackrel{!}{=} \|\varphi_{k,l}\|^2 &= \int_0^b\int_0^a C^2\sin^2\left(\frac{k\pi}{a}x\right)\sin^2\left(\frac{l\pi}{b}y\right)\, dx\, dy \\
&= C^2\int_0^a \sin^2\left(\frac{k\pi}{a}x\right) dx \int_0^b \sin^2\left(\frac{l\pi}{b}y\right) dy = C^2\frac{ab}{4} \qquad \Rightarrow \quad C = \frac{2}{\sqrt{ab}}
\end{aligned}$$

Für die Lösung $v(x,y)$ wird jetzt die Entwicklung

$$v(x,y) = \sum_{k,l=1}^{\infty} \widehat{v}_{k,l}\, \varphi_{k,l}(x,y)$$

womit gilt

$$\Delta v = \sum_{k,l=1}^{\infty} \widehat{v}_{k,l}\, \Delta\left(\varphi_{k,l}(x,y)\right) = -\sum_{k,l=1}^{\infty} \widehat{v}_{k,l}\, \lambda_{k,l}\, \varphi_{k,l}(x,y) \quad \text{und} \quad c^2 v = \sum_{k,l=1}^{\infty} \widehat{v}_{k,l}\, c^2\, \varphi_{k,l}(x,y)$$

$$\Rightarrow \quad -\Delta v + c^2\, v - c^2 = \sum_{k,l=1}^{\infty} \widehat{v}_{k,l}\, \left(\lambda_{k,l} + c^2\right)\, \varphi_{k,l}(x,y) - c^2 = 0$$

Es muss jetzt nur noch der Term c^2 als $\varphi_{k,l}$-Summe, also als Entwicklung in den Eigenfunktionen dargestellt werden:

$$c^2 = \sum_{k,l=1}^{\infty} \alpha_{k,l}\, \varphi_{k,l}(x,y)$$

$$\begin{aligned}
\text{mit } a_{k,l} &= \int_G c^2\, \varphi_{k,l}\, dA = c^2 \int_0^b \int_0^a \frac{2}{\sqrt{ab}} \sin\left(\frac{k\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{l\pi}{b}y\right)\, dx\, dy \\
&= \frac{2c^2}{\sqrt{ab}} \int_0^a \sin\left(\frac{k\pi}{a}x\right) dx \int_0^b \sin\left(\frac{l\pi}{b}y\right) dy \\
&= \frac{2c^2}{\sqrt{ab}} \frac{a}{k\pi} \left(1 - \cos(k\pi)\right) \frac{b}{l\pi} \left(1 - \cos(l\pi)\right) = \begin{cases} \frac{8c^2\sqrt{ab}}{k\, l\, \pi^2} & k,l \text{ ungerade} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \quad -\Delta v + c^2\, v - c^2 = \sum_{k,l=1}^{\infty} \left(\lambda_{k,l}\widehat{v}_{k,l} + c^2\widehat{v}_{k,l} - \alpha_{k,l}\right)\, \varphi_{k,l}(x,y) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \lambda_{k,l}\widehat{v}_{k,l} + c^2\widehat{v}_{k,l} - \alpha_{k,l} = 0 \quad \text{also} \quad \widehat{v}_{k,l} = \frac{\alpha_{k,l}}{\lambda_{k,l} + c^2}
\end{aligned}$$

Es gilt damit für die Lösung

$$v(x,y) = \sum_{k,l=1}^{\infty} \frac{\alpha_{k,l}}{\lambda_{k,l} + c^2}\, \varphi_{k,l}(x,y)$$

$$\text{bzw.} \quad u(x,y) = 1 - \sum_{k,l=1}^{\infty} \frac{\alpha_{k,l}}{\lambda_{k,l} + c^2}\, \varphi_{k,l}(x,y) = 1 - \frac{16c^2}{\pi^2} \sum_{\substack{k,l=1 \\ k,l \text{ ungerade}}}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{k\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{l\pi}{b}y\right)}{k\, l\, \left(\pi^2\left(\frac{k^2}{a^2} + \frac{l^2}{b^2}\right) + c^2\right)}$$

Wirkungsgrad

$$\begin{aligned}
\eta &= \frac{1}{ab} \int_0^b \int_0^a u(x,y)\; dx\, dy = \frac{1}{ab} \int_0^b \int_0^a \left(1 - \sum_{k,l=1}^{\infty} \frac{\alpha_{k,l}}{\lambda_{k,l} + c^2}\, \varphi_{k,l}(x,y)\right) dx\, dy \\
&= \frac{1}{ab} \left(ab - \sum_{k,l=1}^{\infty} \frac{\alpha_{k,l}}{\lambda_{k,l} + c^2} \int_0^b \int_0^a \varphi_{k,l}(x,y)\, dxdy\right) = \frac{1}{ab} \left(ab - \sum_{k,l=1}^{\infty} \frac{\alpha_{k,l}}{\lambda_{k,l} + c^2} \frac{\alpha_{k,l}}{c^2}\right) \\
&= 1 - \sum_{k,l=1}^{\infty} \frac{\alpha_{k,l}^2}{c^2\left(\lambda_{k,l} + c^2\right)} = 1 - \frac{64c^4 ab}{\pi^4} \sum_{\substack{k,l=1 \\ k,l \text{ ungerade}}}^{\infty} \frac{1}{k^2 l^2 c^2 \left(\pi^2\left(\frac{k^2}{a^2} + \frac{l^2}{b^2}\right) + c^2\right)}
\end{aligned}$$

3. Zur Lösung von

$$\Delta u + 1 = 0 \quad \text{in} \quad [0,a]^2$$
$$u(x,0) = u(x,a) = u(0,y) = u(a,y) = 0$$

wird das Eigenwertproblem

$$\Delta\varphi + \lambda\varphi = 0 \quad \text{in} \ [0,a]^2$$
$$\varphi(x,0) = \varphi(x,a) = \varphi(0,y) = \varphi(a,y) = 0$$

gelöst. Analog zu obiger Aufgabe (mit $a = b$) gilt

$$\varphi_{k,l}(x,y) = \frac{2}{a}\sin\left(\frac{k\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{l\pi}{a}y\right) \qquad \lambda_{k,l} = \frac{\pi^2}{a^2}\left(k^2+l^2\right) \quad k = 1,2,..$$

Ansatz für u

$$u(x,y) = \sum_{k,l=1}^{\infty} \widehat{u}_{k,l}\,\varphi_{k,l}(x,y)$$

und Entwicklung von 1

$$\begin{aligned}
1 &= \sum_{k,l=1}^{\infty} \alpha_{k,l}\,\varphi_{k,l}(x,y)\\
\text{mit } a_{k,l} &= \int_G 1\,\varphi_{k,l}\,dA = \int_0^a\int_0^a \frac{2}{a}\sin\left(\frac{k\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{l\pi}{a}y\right)\,dx\,dy\\
&= \frac{2}{a}\int_0^a \sin\left(\frac{k\pi}{a}x\right)dx\int_0^a \sin\left(\frac{l\pi}{a}y\right)\,dy = \frac{2}{a}\frac{a}{k\pi}\left(1-\cos(k\pi)\right)\frac{a}{l\pi}\left(1-\cos(l\pi)\right)\\
&= \frac{2}{a}\frac{a}{k\pi}\left(1-(-1)^k\right)\frac{a}{l\pi}\left(1-(-1)^l\right) = \begin{cases} \frac{8a}{k\,l\,\pi^2} & k,l \ \text{ungerade}\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}
\end{aligned}$$

Durch Einsetzen folgt

$$\begin{aligned}
\Delta u + 1 &= \sum_{k,l=1}^{\infty}\left(\widehat{u}_{k,l}\,\Delta\varphi_{k,l}(x,y) + \alpha_{k,l}\,\varphi_{k,l}(x,y)\right)\\
&= \sum_{k,l=1}^{\infty}\left(\widehat{u}_{k,l}\,\left(-\lambda_{k,l}\right)\,\varphi_{k,l}(x,y) + \alpha_{k,l}\,\varphi_{k,l}(x,y)\right)\\
&= \sum_{k,l=1}^{\infty}\left(-\widehat{u}_{k,l}\,\lambda_{k,l} + \alpha_{k,l}\right)\,\varphi_{k,l}(x,y) = 0 \qquad \Rightarrow \quad \widehat{u}_{k,l} = \frac{\alpha_{k,l}}{\lambda_{k,l}}
\end{aligned}$$

$$u(x,y) = \sum_{k,l=1}^{\infty}\frac{2a\,\alpha_{k,l}}{\pi^2\left(k^2+l^2\right)}\sin\left(\frac{k\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{l\pi}{a}y\right)$$

Das Maximum befindet sich aus physikalischen Gründen in der Mitte, also

$$\begin{aligned}
u\left(\frac{a}{2},\frac{a}{2}\right) &= \sum_{k,l=1}^{\infty}\frac{2a\,\alpha_{k,l}}{\pi^2\left(k^2+l^2\right)}\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{l\pi}{2}\right)\\
&= \sum_{k,l=1}^{\infty}\frac{2a\,\alpha_{k,l}\,(-1)^{k+l}}{\pi^2\left(k^2+l^2\right)}
\end{aligned}$$