Analysis II - Lösung Serie 11

1. Zu lösen ist

$$\partial_t u = \Delta u + q \quad \text{in} \quad [0, L]$$

$$\begin{aligned} u(0,t) = u(L,t) &= 0 \\ u(x,0) &= 0 \end{aligned}$$

Zuerst werden die Eigenfunktionen $\varphi(x)$ ausgerechnet:

$$\Delta\varphi + \lambda\varphi = \varphi'' + \lambda\varphi = 0 \quad \text{in} \ [0, L] \qquad\qquad \varphi(0) = \varphi(L) = 0$$

$$\begin{aligned} &\varphi(x) = C_1 \sin\left(\sqrt{\lambda}x\right) + C_2 \cos\left(\sqrt{\lambda}x\right) \\ &\varphi(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0 \\ &\varphi(L) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 \sin\left(\sqrt{\lambda}x\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_k = \left(\frac{k\,\pi}{L}\right)^2 \quad k = 1, 2, .. \\ &\qquad \Rightarrow \quad \varphi_k(x) = C \sin\left(\frac{k\,\pi}{L}x\right) \end{aligned}$$

Normieren:

$$\|\varphi\|^2 = \int\limits_0^L C^2 \sin^2\left(\frac{k\,\pi}{L}x\right) dx = C^2 \frac{L}{2} \stackrel{!}{=} 1 \quad \Rightarrow \quad C = \sqrt{\frac{2}{L}}$$

$$\varphi_k(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{k\,\pi}{L}x\right)$$

Darstellen der Quelle $q = const$ in Eigenfunktionen

$$q = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \, \varphi_k(x) \qquad \text{mit} \quad \beta_k = \int\limits_0^L q\sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{k\,\pi}{L}x\right) dx = q\sqrt{\frac{2}{L}} \frac{L}{k\pi} \left(1 - \cos(k\pi)\right)$$

$$\beta_k = \begin{cases} 2q\frac{\sqrt{2L}}{k\,\pi} & k \text{ ungerade} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Für die Lösung wird der Ansatz

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(t) \; \varphi_k(x)$$

in die Gleichung eingesetzt.

$$\begin{aligned} \partial_t \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(t) \; \varphi_k(x) - D\,\Delta \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(t) \; \varphi_k(x) - \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \, \varphi_k(x) &= 0 \\ \sum_{k=1}^{\infty} \left(\partial_t \alpha_k(t) \; \varphi_k(x) - D\,\alpha_k(t)\,\Delta\,\varphi_k(x) - \beta_k\,\varphi_k(x)\right) &= 0 \\ \sum_{k=1}^{\infty} \left(\alpha_k'(t) + D\,\lambda_k\,\alpha_k(t) - \beta_k\right) \; \varphi_k(x) &= 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \alpha'_k(t) = -D\,\lambda_k\,\alpha_k(t) + \beta_k$$

Das ist eine Differentialgleichung für $\alpha_k(t)$ mit der Lösung

$$\alpha_k(t) = \frac{\beta_k}{D\,\lambda_k} + C_k\,e^{-D\,\lambda_k t}$$

Die Konstanten C_k wird durch die Anfangsbedingung bestimmt. Es gilt

$$u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(0)\;\varphi_k(x) \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_k(0) = 0$$

Also

$$\alpha_k(0) = \frac{\beta_k}{D\,\lambda_k} + C_k \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad C_k = -\frac{\beta_k}{D\,\lambda_k}$$

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_k}{D\,\lambda_k}\left(1 - e^{-D\,\lambda_k t}\right)\sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{k\,\pi}{L}x\right)$$

2. Als erstes wird die Randbedingung homogenisiert durch die Transformation $v := u - 1 \Leftrightarrow u = v + 1$. Dann gilt es zu lösen

$$\begin{aligned} \partial_t v = D\,\Delta v - c^2 v - c^2 &\quad \text{in} \quad G \\ v = 0 &\quad \text{auf} \quad \partial G \\ v(x,y,0) = u(x,y,0) - 1 = -1 & \end{aligned}$$

Zunächst werden die Eigenfunktionen $\varphi(x,y)$ ausgerechnet

$$\Delta\varphi + \lambda\varphi = 0 \quad \text{in } G \qquad\qquad \varphi = 0 \quad \text{auf } \partial G$$

Die Lösung ist z.B. aus der Serie 10 Aufgabe 2 (mit $a = b$) bekannt:

$$\varphi_{k,l}(x,y) = \frac{2}{a}\sin\left(\frac{k\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{l\pi}{a}y\right) \qquad \lambda_{k,l} = \frac{\pi^2}{a^2}\left(k^2 + l^2\right)$$

Entwicklung der "Quelle" c^2:

$$c^2 = \sum_{k,l=1}^{\infty} \beta_{k,l}\,\varphi_{k,l}(x,y) \qquad \text{mit} \quad \beta_{k,l} = \int_0^a\int_0^a c^2\frac{2}{a}\sin\left(\frac{k\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{l\pi}{a}y\right)dx\,dy$$

Auch dieses Integral wurde bereits in Serie 10 Aufgabe 2 berechnet.

$$\Rightarrow \beta_{k,l} = \begin{cases} c^2\frac{8a}{k\,l\,\pi^2} & k,l \text{ ungerade} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Der Ansatz für $v(x,y)$

$$v(x,y,t) = \sum_{k,l=1}^{\infty} \alpha_{k,l}(t)\;\varphi_{k,l}(x,y)$$

wird jetzt in die Gleichung eingesetzt:

$$\partial_t \sum_{k,l=1}^{\infty} \alpha_{k,l}(t)\;\varphi_{k,l}(x,y) - D\,\Delta\sum_{k,l=1}^{\infty} \alpha_{k,l}(t)\;\varphi_{k,l}(x,y) + c^2\sum_{k,l=1}^{\infty} \alpha_{k,l}(t)\;\varphi_{k,l}(x,y) + \sum_{k,l=1}^{\infty} \beta_{k,l}\,\varphi_{k,l}(x,y) = 0$$

$$\sum_{k,l=1}^{\infty}\left(\partial_t\alpha_{k,l}(t)\;\varphi_{k,l}(x,y) - D\,\alpha_{k,l}(t)\;\Delta\varphi_{k,l}(x,y) + c^2\alpha_{k,l}(t)\;\varphi_{k,l}(x,y) + \beta_{k,l}\,\varphi_{k,l}(x,y)\right) = 0$$

$$\sum_{k,l=1}^{\infty}\left(\alpha'_{k,l}(t) + D\,\lambda_{k,l}\,\alpha_{k,l}(t) + c^2\alpha_{k,l}(t) + \beta_{k,l}\right)\varphi_{k,l}(x,y) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \alpha'_{k,l}(t) = -\left(D\,\lambda_{k,l} + c^2\right)\,\alpha_{k,l}(t) - \beta_{k,l}$$

$$\text{also} \quad \alpha_{k,l}(t) = -\frac{\beta_{k,l}}{D\,\lambda_{k,l}+c^2} + C_{k,l}\, e^{-\left(D\,\lambda_{k,l}+c^2\right)t}$$

Die Konstanten $C_{k,l}$ ergeben sich aus der Anfangsbedingung für v

$$v(x,y,0) = \sum_{k,l=1}^{\infty} \alpha_{k,l}(0)\;\varphi_{k,l}(x,y) \stackrel{!}{=} -1$$

D.h. die Funktion -1 muss in Eigenfunktionen entwickelt werden:

$$-1 = \sum_{k,l=1}^{\infty} \alpha_{k,l}(0)\;\varphi_{k,l}(x,y) \qquad \text{mit} \quad \alpha_{k,l}(0) = \int_0^a \int_0^a (-1)\,\frac{2}{a}\sin\left(\frac{k\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{k\pi}{a}y\right)dx\,dy$$

Es folgt mit dem Ergebnis von oben

$$\alpha_{k,l}(0) = -\frac{\beta_{k,l}}{c^2} = \begin{cases} -\frac{8a}{k\,l\,\pi^2} & k,l \text{ ungerade} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und damit

$$\alpha_{k,l}(0) = -\frac{\beta_{k,l}}{D\,\lambda_{k,l}+c^2} + C_{k,l} \stackrel{!}{=} -\frac{\beta_{k,l}}{c^2} \quad \Rightarrow \quad C_{k,l} = \frac{\beta_{k,l}}{D\,\lambda_{k,l}+c^2} - \frac{\beta_{k,l}}{c^2}$$

$$\alpha_{k,l}(t) = -\frac{\beta_{k,l}}{D\,\lambda_{k,l}+c^2}\left(1 - e^{-\left(D\,\lambda_{k,l}+c^2\right)t}\right) - \frac{\beta_{k,l}}{c^2}\, e^{-\left(D\,\lambda_{k,l}+c^2\right)t}$$

$$\Rightarrow \quad u(x,y,t) = 1+v(x,y,t) = 1-\sum_{k,l=1}^{\infty}\left(\frac{\beta_{k,l}}{D\,\lambda_{k,l}+c^2}\left(1 - e^{-\left(D\,\lambda_{k,l}+c^2\right)t}\right) + \frac{\beta_{k,l}}{c^2}\, e^{-\left(D\,\lambda_{k,l}+c^2\right)t}\right)\varphi_{k,l}(x,y)$$

Für $t \to \infty$ gilt $e^{-\left(D\,\lambda_{k,l}+c^2\right)t} \to 0$, also

$$\lim_{t\to\infty} u(x,y,t) = 1 - \sum_{k,l=1}^{\infty} \frac{\beta_{k,l}\,\varphi_{k,l}(x,y)}{D\,\lambda_{k,l}+c^2}$$

3. Zunächst die Eigenfunktionen $\varphi(r)$ (Kugelkoordinaten)

$$\frac{1}{r^2}\left(r^2\varphi_r\right)_r + \lambda\varphi = 0 \quad \text{in } G \qquad\qquad \varphi(R) = 0$$

Zur Lösung wird der übliche Ansatz benutzt:

$$\varphi(r) = \frac{f(r)}{r} \quad \text{mit} \quad \varphi_r = \frac{f'}{r} - \frac{f}{r^2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{r^2}\left(r^2\left(\frac{f'}{r} - \frac{f}{r^2}\right)\right)_r + \lambda\frac{f}{r} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f'' - \lambda\, f = 0$$

Also

$$f(r) = C_1 \sin\left(\sqrt{\lambda}r\right) + C_2\cos\left(\sqrt{\lambda}r\right) \quad \Leftrightarrow \quad \varphi(r) = C_1\frac{\sin\left(\sqrt{\lambda}r\right)}{r} + C_2\frac{\cos\left(\sqrt{\lambda}r\right)}{r}$$

Es muss $|\varphi(0)| < \infty$ und daher $C_2 = 0$ gelten. Aus der Randbedingung folgt

$$\varphi(R) = C_1\frac{\sin\left(\sqrt{\lambda}R\right)}{R} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_k = \left(\frac{k\,\pi}{R}\right)^2 \qquad k = 1,2,...$$

$$\varphi_k(r) = C\frac{\sin\left(\frac{k\,\pi}{R}r\right)}{r}$$

Normieren mit Kugelkoordinaten $dV = r^2 \sin\vartheta \, dr \, d\vartheta \, d\varphi$

$$\|\varphi\|^2 = \int_G \varphi_k^2 \, dV = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R} C^2 \frac{\sin^2\left(\frac{k\,\pi}{R}r\right)}{r^2} r^2 \sin\vartheta \, dr \, d\vartheta \, d\varphi$$

$$= 4\pi \int_0^R C^2 \sin^2\left(\frac{k\,\pi}{R}r\right) \, dr = C^2 2\pi R \qquad \Rightarrow C = \frac{1}{\sqrt{2\pi R}}$$

$$\varphi_k(r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi R}} \frac{\sin\left(\frac{k\,\pi}{R}r\right)}{r}$$

Entwicklung der Quelle

$$r = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \, \varphi_k(r)$$

$$\text{mit } \beta_k = \int_G r\,\varphi_k \, dV = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R} r \frac{1}{\sqrt{2\pi R}} \frac{\sin\left(\frac{k\,\pi}{R}r\right)}{r} r^2 \sin\vartheta \, dr \, d\vartheta \, d\varphi = 4\pi \frac{1}{\sqrt{2\pi R}} \int_0^R r^2 \sin\left(\frac{k\,\pi}{R}r\right) \, dr$$

$$= 4\pi \frac{1}{\sqrt{2\pi R}} \left(-\frac{2R^3\,(1+\cos(k\pi))}{(k\pi)^3} - \frac{R^3 \cos(k\pi)}{k\pi} \right) = -2R^3 \sqrt{\frac{2\pi}{R}} \left(\frac{2\left(1+(-1)^k\right)}{(k\pi)^3} + \frac{(-1)^k}{k\pi} \right)$$

Jetzt den Ansatz

$$u(r,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(t) \, \varphi_k(r)$$

einsetzen

$$\partial_t \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(t) \, \varphi_k(r) - D\,\Delta \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(t) \, \varphi_k(r) + \gamma \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \, \varphi_k(r) = 0$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\partial_t \alpha_k(t) \, \varphi_k(r) - D\,\alpha_k(t) \, \Delta\varphi_k(r) + \gamma\beta_k \, \varphi_k(r) \right) = 0$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\alpha_k'(t) + D\,\lambda_k \, \alpha_k(t) + \gamma\beta_k \right) \varphi_k(r) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \alpha_k'(t) = -D\,\lambda_k \, \alpha_k(t) - \gamma\beta_k$$

$$\alpha_k(t) = -\frac{\gamma\beta_k}{D\,\lambda_k} + C_k \, e^{-D\,\lambda_k\,t}$$

Mit der Anfangsbedingung für u

$$u(r,0) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(0) \, \varphi_k(r) \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_k(0) = 0$$

$$\text{also} \qquad \alpha_k(0) = -\frac{\gamma\beta_k}{D\,\lambda_k} + C_k \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad C_k = \frac{\gamma\beta_k}{D\,\lambda_k}$$

$$\alpha_k(t) = -\frac{\gamma\beta_k}{D\,\lambda_k} \left(1 - e^{-D\,\lambda_k\,t}\right)$$

$$\Rightarrow \quad u(r,t) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\gamma\beta_k}{D\,\lambda_k} \frac{\left(1 - e^{-D\,\lambda_k\,t}\right)}{\sqrt{2\pi R}} \frac{\sin\left(\frac{k\,\pi}{R}r\right)}{r}$$

Mit $\lim_{t\to\infty} e^{-D\,\lambda_k\,t} = 0$

$$\lim_{t\to\infty} u(r,t) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\gamma\beta_k}{D\,\lambda_k} \frac{1}{\sqrt{2\pi R}} \frac{\sin\left(\frac{k\,\pi}{R}r\right)}{r}$$