Analysis II - Lösung Serie 13

1. Für die Lösung der Diffusionsgleichung im unendlichen Intervall gilt

$$u\left(x,t\right)=\frac{1}{\sqrt{4\pi D\,t}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}u\left(\xi,0\right)\,e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4D\,t}}d\xi$$

   Für die Aufgabe gilt also

$$u\left(x,t\right)=\frac{1}{\sqrt{4\pi D\,t}}\int\limits_{-2}^{3}u_0\left(\xi\right)\,e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4D\,t}}d\xi$$

   Plot ($D=1$):

2. Für die Lösung der Wellengleichung im unendlichen Intervall gilt

$$\begin{aligned}u\left(x,t\right)&=\frac{1}{2}\left(u_0\left(x+ct\right)+u_0\left(x-ct\right)\right)+\frac{1}{2c}\left(v\left(x+ct\right)-v\left(x-ct\right)\right)\\ \text{mit}\quad v\left(s\right)&:=\int\limits_0^s\frac{\partial u}{\partial t}\left(x,0\right)\,dx\end{aligned}$$

   Für die Aufgabe gilt dann

$$u\left(x,t\right)=\frac{1}{2}\left(u_0\left(x+t\right)+u_0\left(x-t\right)\right)$$

   Plot:

3. Zu lösen ist

$$\begin{aligned}\partial_{tt}u&=4\Delta u\quad\text{in }\left(0,\pi\right)\\ u\left(0,t\right)=u\left(\pi,t\right)&=0\quad\text{und}\quad u\left(x,0\right)=u_0\left(x\right),\quad u_t\left(x,0\right)=0\end{aligned}$$

   wobei

$$u_0\left(x\right)=\begin{cases}\frac{4}{\pi}x & 0\leq x<\frac{\pi}{4}\\ 1 & \frac{\pi}{4}\leq x<\frac{\pi}{2}\\ \frac{2}{\pi}\left(\pi-x\right) & \frac{\pi}{2}\leq x\leq\pi\end{cases}$$

Es werden die Eigenfunktionen des Δ-Operators benutzt.

$$\varphi_k(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(k\,x) \qquad \lambda_k = k^2 \qquad k = 1, 2, ...$$

Mit dem Ansatz

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(t)\,\varphi_k(x)$$

folgt aus der Gleichung

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\alpha_k'' + 4\lambda_k \alpha_k\right)\varphi_k = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \alpha_k'' = -4\lambda_k\,\alpha_k$$

$$\alpha_k(t) = a_k \sin\left(2\sqrt{\lambda_k} t\right) + b_k \cos\left(2\sqrt{\lambda_k} t\right)$$

Die Konstanten a_k, b_k folgen aus den Anfangsbedingungen.

$$u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(0)\,\varphi_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k\,\varphi_k(x) = u_0(x)$$
$$\Rightarrow \qquad b_k = \int_0^{\pi} u_0(x)\,\varphi_k(x)\,dx$$

$$\begin{aligned} b_k &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{4}{\pi} x \sin(k\,x)\,dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(k\,x)\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{2}{\pi}(\pi - x)\sin(k\,x)\,dx \right) \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(2 \frac{\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) + 2\sin\left(\frac{k\pi}{4}\right)}{k^2 \pi} \right) = \frac{2}{k^2\pi}\sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) + 2\sin\left(\frac{k\pi}{4}\right) \right) \end{aligned}$$

und

$$u_t(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k'(0)\,\varphi_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k 2\sqrt{\lambda_k}\,\varphi_k(x) = 0$$
$$\Rightarrow \qquad a_k = 0$$

Also, mit $\lambda_k = k^2$,

$$u(x,t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cos(2k\,t)\sin(k\,x)$$

Plot: