Analysis II - Lösung Serie 2

1. Kurvenschar $y(x, C)$ implizit gegeben durch

$$f(x, y) = \left(x^2 + y\right) e^{-x+y} = C$$

Da f konstant ist, ist die totale Ableitung null:

$$\frac{df}{dx} = 0 \;\Rightarrow\; f_x + f_y \, y'(x) = 0$$

Also

$$y' = -\frac{f_x(x, y)}{f_y(x, y)}$$

Hier:

$$f_x(x, y) = \left(2x - x^2 - y\right) e^{-x+y}$$
$$f_y(x, y) = \left(1 + x^2 + y\right) e^{-x+y}$$

$$y'(x) = -\frac{2x - x^2 - y}{1 + x^2 + y}$$

An der Stelle $x = 1$

$$y'(1) = \frac{y(1) - 1}{y(1) + 2}$$

Es bleibt $y(1)$ für $C = 1/10$ zu berechnen. $y(1)$ erfüllt die Gleichung

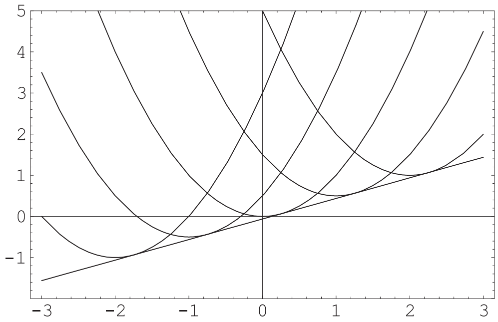
$$(1 + y) e^{y-1} = \frac{1}{10}$$

Die Lösung erfolgt numerisch durch (z.B.) Fixpunktiteration

$$y = F(y) = \frac{1}{10} e^{1-y} - 1 \quad \text{mit Startwert } y_0 = 1$$

$$y_1 = -0.9,\; y_2 = ...,\quad y_{10} \approx -0.535$$
$$y'(1) = \frac{-0.535 - 1}{-0.535 + 2} \approx -1,049$$

2. Plot:



Parabelschar

$$y(x, p) = (x - p)^2 + \frac{p}{2}$$

Enveloppe

$$\frac{\partial y}{\partial p} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -2\,(x-p) + \frac{1}{2} = 0$$

$$\Rightarrow \quad p = x - \frac{1}{4}$$

Einsetzen

$$y_E\,(x, p\,(x)) = \left(x - x + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{16}$$

3. Kugelkoordinaten sind gegeben durch die Transfomation $(x, y, z) \leftrightarrow (r, \vartheta, \varphi)$ mit

$$\begin{aligned} x\,(r,\vartheta,\varphi) &= r\,\sin(\vartheta)\,\cos(\varphi) \\ y\,(r,\vartheta,\varphi) &= r\,\sin(\vartheta)\,\sin(\varphi) \\ z\,(r,\vartheta,\varphi) &= r\,\cos(\vartheta) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} r\,(x,y,z) &= \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \vartheta\,(x,y,z) &= \arccos\left(\tfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) \\ \varphi\,(x,y,z) &= \arctan\left(\tfrac{y}{x}\right) \end{aligned}$$

Mit der Kettenregel folgt

$$\begin{aligned} \frac{\partial f\,(r,\vartheta,\varphi)}{\partial x} &= f_r\,r_x + f_\vartheta\,\vartheta_x + f_\varphi\,\varphi_x \\ \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(f_r\,r_x + f_\vartheta\,\vartheta_x + f_\varphi\,\varphi_x\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = {} & f_{rr}\,r_x^2 + f_{\vartheta\vartheta}\,\vartheta_x^2 + f_{\varphi\varphi}\,\varphi_x^2 + \\ & 2\,f_{r\vartheta}\,r_x\,\vartheta_x + 2\,f_{r\varphi}\,r_x\,\varphi_x + 2\,f_{\vartheta\varphi}\,\vartheta_x\,\varphi_x + \\ & f_r\,r_{xx} + f_\vartheta\,\vartheta_{xx} + f_\varphi\,\varphi_{xx} \end{aligned}$$

Für die Ableitungen der Transformation gilt

$$\begin{aligned} r_x &= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{x}{r} = \sin(\vartheta)\cos(\varphi) \\ \vartheta_x &= \frac{-1}{\sqrt{1-\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)^2}}\left(-\frac{z\,x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3}\right) = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{z}{r}\right)^2}}\frac{z\,x}{r^3} = \frac{\cos(\vartheta)\cos(\varphi)}{r} \\ \varphi_x &= \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\left(-\frac{y}{x^2}\right) = \frac{-y}{x^2+y^2} = -\frac{\sin(\varphi)}{r\,\sin(\vartheta)} \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} r_{xx} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r}\right) = \frac{1}{r} - \frac{x}{r^2}r_x = \frac{1-\sin^2(\vartheta)\cos^2(\varphi)}{r} \\ \vartheta_{xx} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{z}{r}\right)^2}}\frac{z\,x}{r^3}\right) = \frac{-1}{\sqrt{1-\left(\frac{z}{r}\right)^2}^3}\frac{z\,x}{r^3}\frac{z^2}{r^3}\,r_x - \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{z}{r}\right)^2}}\frac{3\,z\,x}{r^4}\,r_x + \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{z}{r}\right)^2}}\frac{z}{r^3} \\ &= \frac{1}{r^2\sqrt{1-\left(\frac{z}{r}\right)^2}}\frac{z}{r}\left(\frac{-1}{1-\left(\frac{z}{r}\right)^2}\frac{x^2\,z^2}{r^4} - 3\frac{x^2}{r^2} + 1\right) \\ &= \frac{1}{r^2\tan(\vartheta)}\left(1-\cos^2(\varphi)\cos^2(\vartheta) - 3\sin^2(\vartheta)\cos^2(\varphi)\right) \\ \varphi_{xx} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right) = \frac{2\,y\,x}{\left(x^2+y^2\right)^2} = 2\frac{y\,x}{r^4\sin^4(\vartheta)} = 2\frac{\cos(\varphi)\sin(\varphi)}{r^2\sin^2(\vartheta)} \end{aligned}$$

Einsetzen ergibt

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{rr}\,\sin^2(\vartheta)\cos^2(\varphi) + f_{\vartheta\vartheta}\,\frac{\cos^2(\vartheta)\cos^2(\varphi)}{r^2} + f_{\varphi\varphi}\,\frac{\sin^2(\varphi)}{r^2\,\sin^2(\vartheta)} +$$

$$2\,f_{r\vartheta}\,\frac{\sin(\vartheta)\cos^2(\varphi)\cos(\vartheta)}{r} - 2\,f_{r\varphi}\,\frac{\sin(\varphi)\cos(\varphi)}{r} - 2\,f_{\vartheta\varphi}\,\frac{\sin(\varphi)\cos(\varphi)}{r\,\tan(\vartheta)} +$$

$$f_r\,\frac{1-\sin^2(\vartheta)\cos^2(\varphi)}{r} + f_\vartheta\,\frac{1-\cos^2(\varphi)\cos^2(\vartheta) - 3\sin^2(\vartheta)\cos^2(\varphi)}{r^2\tan(\vartheta)} + 2\,f_\varphi\,\frac{\cos(\varphi)\sin(\varphi)}{r^2\sin^2(\vartheta)}$$

4. Krümmung ist definiert durch

$$K = \frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}$$

Bei einer implizit durch $f(x, y(x)) = const$ gegebenen Kurve $y(x)$ gilt für die Ableitungen

$$y' = -\frac{f_x}{f_y} \qquad y'' = -\frac{f_{xx}\,f_y^2 - 2f_{xy}\,f_x\,f_y + f_{yy}\,f_x^2}{f_y^3}$$

Also

$$K = -\frac{f_{xx}\,f_y^2 - 2f_{xy}\,f_x\,f_y + f_{yy}\,f_x^2}{\left(f_x^2+f_y^2\right)^{3/2}}$$

Gegeben ist die Hyperbel

$$f(x,y) = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$f_x = \frac{2x}{a^2} \qquad f_y = -\frac{2y}{b^2} \qquad f_{xx} = \frac{2}{a^2} \qquad f_{yy} = -\frac{2}{b^2} \qquad f_{xy} = 0$$

$$K = -\frac{\frac{2}{a^2}\left(-\frac{2y}{b^2}\right)^2 - \frac{2}{b^2}\left(\frac{2x}{a^2}\right)^2}{\left(\frac{4x^2}{a^4}+\frac{4y^2}{b^4}\right)^{3/2}} = \frac{1}{a^2b^2}\frac{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}{\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}\right)^{3/2}}$$

Mit

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = a^2\left(\frac{y^2}{b^2}+1\right)$$

ergibt sich

$$K = \frac{1}{a^2b^2}\frac{1}{\left(\left(\frac{1}{b^4}+\frac{1}{a^2b^2}\right)y^2 + \frac{1}{a^2}\right)^{3/2}}$$

Das Maximum wird angenommen, falls der Nenner minimal wird:

$$K \to \max \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{1}{b^4}+\frac{1}{a^2b^2}\right)y^2 + \frac{1}{a^2} \to \min$$

$$\frac{d}{dx}\left(\left(\frac{1}{b^4}+\frac{1}{a^2b^2}\right)y^2+\frac{1}{a^2}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = 0$$

$$K_{\max} = K(y=0) = \frac{a}{b^2}$$