Analysis II - Lösung Serie 3

1. Koordinaten auf der Ellipse x_1, y_1, auf der Geraden x_2, y_2. Abstand ist gegeben durch

$$f(x_1, x_2, y_1, y_2) = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 \quad \rightarrow \quad \min$$

Nebenbedingungen

$$g_1(x_1, y_1) = \left(\frac{x_1}{a}\right)^2 + \left(\frac{y_1}{b}\right)^2 = 1 \qquad g_2(x_2, y_2) = \frac{x_2}{p} + \frac{y_2}{q} = 1$$

Lagrangefunktion

$$F(x_1, x_2, y_1, y_2, \lambda, \mu) = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 - \lambda\left(\left(\frac{x_1}{a}\right)^2 + \left(\frac{y_1}{b}\right)^2 - 1\right) - \mu\left(\frac{x_2}{p} + \frac{y_2}{q} - 1\right)$$

Ableiten

$$\begin{aligned} F_{x_1} &= 2(x_1 - x_2) - 2\frac{\lambda x_1}{a^2} = 0 \qquad & F_\lambda &= \left(\frac{x_1}{a}\right)^2 + \left(\frac{y_1}{b}\right)^2 - 1 = 0 \\ F_{x_2} &= -2(x_1 - x_2) - \frac{\mu}{p} = 0 & F_\mu &= \frac{x_2}{p} + \frac{y_2}{q} - 1 = 0 \\ F_{y_1} &= 2(y_1 - y_2) - 2\frac{\lambda y_1}{b^2} = 0 \\ F_{y_2} &= -2(y_1 - y_2) - \frac{\mu}{q} = 0 \end{aligned}$$

Addition der ersten beiden und der dritten und vierten gibt

$$\begin{aligned} \frac{2x_1}{a^2}\lambda + \frac{1}{p}\mu &= 0 \\ \frac{2y_1}{b^2}\lambda + \frac{1}{q}\mu &= 0 \end{aligned}$$

Da $\lambda, \mu \neq 0$ muss

$$\frac{2x_1}{a^2 q} - \frac{2y_1}{b^2 p} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{x_1}{a} = \frac{q}{p}\frac{a}{b}\frac{y_1}{b}$$

und aus der ersten Nebenbedingung folgt

$$\left(\frac{q}{p}\frac{a}{b}\frac{y_1}{b}\right)^2 + \left(\frac{y_1}{b}\right)^2 = 1 \qquad \text{und} \qquad y_1 = b\sqrt{\left(\frac{a\,q}{p\,b}\right)^2 + 1}^{\,-1}$$

Die Koordinaten x_1 und y_1 sind damit bekannt. Für x_2, y_2 ergibt sich mit

$$\left.\begin{aligned} -2(x_1 - x_2) - \frac{\mu}{p} &= 0 \\ -2(y_1 - y_2) - \frac{\mu}{q} &= 0 \end{aligned}\right. \quad \Rightarrow \quad p(x_1 - x_2) = q(y_1 - y_2)$$

und der zweiten Nebenbedingung

$$x_2 = p - \frac{p}{q}y_2$$

$$\begin{aligned} x_1 - p + \frac{p}{q}y_2 &= \frac{q}{p}(y_1 - y_2) \\ y_2 &= \frac{p\,q}{p^2 + q^2}\left(p + \frac{q}{p}y_1 - x_1\right) \end{aligned}$$

2. Fläche des Dreiecks

$$A^{\Delta}(a,b) = \frac{1}{2} a \sqrt{b^2 - \frac{1}{4}a^2}$$

Volumen V und Oberfläche A des Zelts (A_0 gegeben)

$$V(a,b,c) = c\,A^{\Delta}(a,b) \qquad A(a,b,c) = 2A^{\Delta}(a,b) + 2b\,c + a\,c = A_0$$

Lagrangefunktion (Zur Übersicht wird A^{Δ} nicht explizit gemacht)

$$F(a,b,c,\lambda) = c\,A^{\Delta}(a,b) - \lambda\left(2A^{\Delta}(a,b) + 2b\,c + a\,c - A_0\right)$$

Ableiten und null setzen

$$\begin{aligned} F_a &= c\,A^{\Delta}_a - \lambda\left(2A^{\Delta}_a + c\right) = 0 \\ F_b &= c\,A^{\Delta}_b - \lambda\left(2A^{\Delta}_b + 2c\right) = 0 \\ F_c &= A^{\Delta} - \lambda\,(2b + a) = 0 \\ F_\lambda &= 2A^{\Delta}(a,b) + 2b\,c + a\,c - A_0 = 0 \end{aligned}$$

Es folgt

$$\lambda = \frac{A^{\Delta}}{2b+a} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} c\,A^{\Delta}_a &= \frac{A^{\Delta}}{2b+a}\left(2A^{\Delta}_a + c\right) \\ c\,A^{\Delta}_b &= \frac{A^{\Delta}}{2b+a}\left(2A^{\Delta}_b + 2c\right) \end{aligned} \qquad (*)$$

und aus den beiden letzten Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{1}{A^{\Delta}_a} &= \frac{2b+a}{A^{\Delta}} - \frac{2}{c} \\ \frac{2}{A^{\Delta}_b} &= \frac{2b+a}{A^{\Delta}} - \frac{2}{c} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad A^{\Delta}_a = \frac{1}{2} A^{\Delta}_b$$

Mit den Ableitungen

$$A^{\Delta}_a = \frac{1}{2}\sqrt{b^2 - \frac{1}{4}a^2} - \frac{a^2}{8\sqrt{b^2 - \frac{1}{4}a^2}} \quad \text{und} \quad A^{\Delta}_b = \frac{a\,b}{2\sqrt{b^2 - \frac{1}{4}a^2}}$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} \sqrt{b^2 - \frac{1}{4}a^2} - \frac{a^2}{4\sqrt{b^2 - \frac{1}{4}a^2}} &= \frac{a\,b}{2\sqrt{b^2 - \frac{1}{4}a^2}} \\ b^2 - \frac{1}{2}a\,b - \frac{1}{2}a^2 &= 0 \\ (b-a)\left(b + \frac{1}{2}a\right) &= 0 \end{aligned}$$

also

$$b = a \quad \Rightarrow \quad A^{\Delta} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \quad A^{\Delta}_b = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

und mit $(*)$

$$\begin{aligned} c\frac{a}{\sqrt{3}} &= \frac{a^2\sqrt{3}}{4}\frac{1}{3a}\left(2\frac{a}{\sqrt{3}} + 2c\right) \\ c &= \frac{1}{2}\left(\frac{a}{\sqrt{3}} + c\right) \\ a &= c\sqrt{3} \end{aligned}$$

Zuletzt mit der Nebenbedingung

$$\frac{c^2 3\sqrt{3}}{2} + 2\,c^2\sqrt{3} + c^2\sqrt{3} = A_0 \quad \Rightarrow \quad c = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{2A_0}{\sqrt{3}}}$$

3. Für den Quotienten

$$Q\,(x,y) = \frac{2x^2 + 5x\,y + y^2}{x^2 + 4y^2}$$

gilt die Aussage

$$Q\,(x,y) = Q\,(C\,x, C\,y) \quad C \text{ beliebig}$$

Daraus folgt, dass die Höhenlinien Geraden durch den Ursprung sind, d.h. die Extrema sind keine Punkte sondern werden entlang von Geraden angenommen.

Plots:

Die Extrema des Quotienten werden daher entlang der Ellipse betrachtet, auf der der Nenner gleich 1 ist. (Trick zur Aufwandsminimierung)

$$\frac{2x^2 + 5x\,y + y^2}{x^2 + 4y^2} \quad \rightarrow \; \textit{extremal} \;\text{ mit NB. } x^2 + 4y^2 = 1$$

Lagrangefunktion

$$F\,(x,y,\lambda) = 2x^2 + 5x\,y + y^2 - \lambda\left(x^2 + 4y^2 - 1\right)$$

Ableiten

$$\begin{aligned} F_x &= 4x + 5y - 2\lambda\,x = 0 \\ F_y &= 5x + 2y - 8\lambda\,y = 0 \\ F_\lambda &= x^2 + 4y^2 - 1 = 0 \end{aligned}$$

Die ersten beiden Gleichungen bilden ein Eigenwert-Problem

$$\begin{pmatrix} 2 & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{8} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

mit der Lösung

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{8}\left(9 \pm \sqrt{149}\right)$$

Die Eigenrichtungen bilden die Geraden auf denen der Quotient extremal ist

$$y = \frac{2}{5}\left(\frac{1}{8}\left(9 \pm \sqrt{149}\right) - 2\right) x = \frac{1}{20}\left(-7 \pm \sqrt{149}\right) x$$