Analysis II - Lösung Serie 4

1. Das Integrationsgebiet ist gegeben durch

$$G: \quad \begin{cases} -\frac{a}{2}\left(1-\frac{z}{h}\right) \le x \le \frac{a}{2}\left(1-\frac{z}{h}\right) \\ -\frac{a}{2}\left(1-\frac{z}{h}\right) \le y \le \frac{a}{2}\left(1-\frac{z}{h}\right) \\ 0 \le z \le h \end{cases}$$

Für das Trägheitsmoment gilt

$$I = \int\limits_G \left(x^2+y^2\right)\, dV = \int\limits_0^h \int\limits_{-\frac{a}{2}\left(1-\frac{z}{h}\right)}^{\frac{a}{2}\left(1-\frac{z}{h}\right)} \int\limits_{-\frac{a}{2}\left(1-\frac{z}{h}\right)}^{\frac{a}{2}\left(1-\frac{z}{h}\right)} \left(x^2+y^2\right)\, dx\, dy\, dz$$

$$= 2\int\limits_0^h \int\limits_{-\frac{a}{2}\left(1-\frac{z}{h}\right)}^{\frac{a}{2}\left(1-\frac{z}{h}\right)} \int\limits_{-\frac{a}{2}\left(1-\frac{z}{h}\right)}^{\frac{a}{2}\left(1-\frac{z}{h}\right)} x^2\, dx\, dy\, dz = 2\int\limits_0^h \int\limits_{-\frac{a}{2}\left(1-\frac{z}{h}\right)}^{\frac{a}{2}\left(1-\frac{z}{h}\right)} x^2\, dx \int\limits_{-\frac{a}{2}\left(1-\frac{z}{h}\right)}^{\frac{a}{2}\left(1-\frac{z}{h}\right)} dy\, dz$$

$$= 2\int\limits_0^h \left[\frac{1}{3}x^3\right]_{-\frac{a}{2}\left(1-\frac{z}{h}\right)}^{\frac{a}{2}\left(1-\frac{z}{h}\right)} [x]_{-\frac{a}{2}\left(1-\frac{z}{h}\right)}^{\frac{a}{2}\left(1-\frac{z}{h}\right)}\, dz = 2\int\limits_0^h \frac{a^3}{12}\left(1-\frac{z}{h}\right)^3 a\left(1-\frac{z}{h}\right)\, dz$$

$$= \frac{a^4}{6}\int\limits_0^h \left(1-\frac{z}{h}\right)^4 dz = \frac{a^4}{6}\left[-\frac{h}{5}\left(1-\frac{z}{h}\right)^5\right]_0^h = \frac{h\,a^4}{30}$$

2. Mit Ellipsoid-Koordinaten gilt

$$\begin{aligned} x(r,\vartheta,\varphi) &= a\,s\,\sin(\vartheta)\,\cos(\varphi) \\ y(r,\vartheta,\varphi) &= b\,s\,\sin(\vartheta)\,\sin(\varphi) \\ z(r,\vartheta,\varphi) &= c\,s\,\cos(\vartheta) \end{aligned} \qquad \text{und } dV = a\,b\,c\,s^2\,\sin(\vartheta)\,d\varphi\,d\vartheta\,ds\,.$$

Für die Integrale der Masse und des Trägheitsmoments wird nur ein Achtel des Ellipsoids betrachtet. Die Masse berechnet sich

$$M = \int\limits_G \rho(x)\, dV = 8\int\limits_0^1 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1+\frac{x^2}{a^2}\right) a\,b\,c\,s^2\,\sin(\vartheta)\,d\varphi\,d\vartheta\,ds$$

$$= 8a\,b\,c\int\limits_0^1 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1+s^2\,\sin^2(\vartheta)\,\cos^2(\varphi)\right) s^2\,\sin(\vartheta)\,d\varphi\,d\vartheta\,ds$$

$$= 8a\,b\,c\int\limits_0^1 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} s^2\,\sin(\vartheta)\,d\varphi\,d\vartheta\,ds + 8a\,b\,c\int\limits_0^1 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} s^4\,\sin^3(\vartheta)\,\cos^2(\varphi)\,d\varphi\,d\vartheta\,ds$$

$$= 8a\,b\,c\int\limits_0^1 s^2 ds\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\vartheta)\,d\vartheta\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi + 8a\,b\,c\int\limits_0^1 s^4 ds\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3(\vartheta)\,d\vartheta\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(\varphi)\,d\varphi$$

$$= 8a\,b\,c\,\frac{1}{3}\,\frac{\pi}{2} + 8a\,b\,c\,\frac{1}{5}\,\frac{2}{3}\,\frac{\pi}{4} = a\,b\,c\,\frac{24}{15}\pi$$

und das Trägheitsmoment

$$
\begin{aligned}
I &= \int\limits_G \left(x^2+y^2\right)\,\rho(x)\,dV = 8\int\limits_0^1\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1+\frac{x^2}{a^2}\right)\left(x^2+y^2\right)\,a\,b\,c\,s^2\,\sin(\vartheta)\,d\varphi\,d\vartheta\,ds\\
&= 8a\,b\,c\int\limits_0^1\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1+s^2\,\sin^2(\vartheta)\,\cos^2(\varphi)\right)s^2\sin^2(\vartheta)\left(a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi\right)\,s^2\,\sin(\vartheta)\,d\varphi\,d\vartheta\,ds\\
&= 8a\,b\,c\int\limits_0^1\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} s^4\,\sin^3(\vartheta)\left(a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi\right)\,d\varphi\,d\vartheta\,ds\\
&+ 8a\,b\,c\int\limits_0^1\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} s^6\,\sin^5(\vartheta)\,\cos^2(\varphi)\left(a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi\right)\,d\varphi\,d\vartheta\,ds\\
&= 8a\,b\,c\int\limits_0^1 s^4\,ds\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3(\vartheta)\,d\vartheta\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi\right)d\varphi\\
&+ 8a\,b\,c\int\limits_0^1 s^6 ds\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5(\vartheta)\,d\vartheta\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2(\varphi)\left(a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi\right)\,d\varphi\\
&= 8a\,b\,c\,\frac{1}{5}\,\frac{2}{3}\left(a^2\frac{\pi}{4}+b^2\frac{\pi}{4}\right)+8a\,b\,c\,\frac{1}{7}\,\frac{8}{15}\,\left(a^2\frac{3\pi}{16}+b^2\frac{\pi}{16}\right) = a\,b\,c\frac{4}{105}\pi\left(10a^2+8b^2\right)
\end{aligned}
$$

3. In der (x,y)-Ebene werden Polarkoordinaten benutzt

$$
\begin{aligned}
x(r,\varphi) &= r\cos(\varphi)\\
y(r,\varphi) &= r\sin(\varphi)
\end{aligned}
\qquad \text{und } dA = r\,dr\,d\varphi
$$

Die z-Koordinate hängt durch

$$
z=\sqrt{R^2-x^2}=\sqrt{R^2-r^2\cos^2(\varphi)}
$$

von x, bzw r und φ ab. Für das Volumen wird nur ein Achtel des Körpers betrachtet.

$$
\begin{aligned}
V &= \int\limits_G z(x)\,dA = 8\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\int\limits_0^R \sqrt{R^2-r^2\cos^2(\varphi)}\,r\,dr\,d\varphi\\
&= 8\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left[-\frac{1}{3\cos^2(\varphi)}\sqrt{R^2-r^2\cos^2(\varphi)}^3\right]_0^R d\varphi = -\frac{8}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{R^3\sqrt{1-\cos^2(\varphi)}^3}{\cos^2(\varphi)}-\frac{R^3}{\cos^2(\varphi)}\right)d\varphi\\
&= -\frac{8}{3}R^3\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin^3(\varphi)}{\cos^2(\varphi)}-\frac{1}{\cos^2(\varphi)}\right)d\varphi = -\frac{8}{3}R^3\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin(\varphi)\left(1-\cos^2(\varphi)\right)}{\cos^2(\varphi)}-\frac{1}{\cos^2(\varphi)}\right)d\varphi\\
&= -\frac{8}{3}R^3\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin(\varphi)}{\cos^2(\varphi)}-\sin(\varphi)-\frac{1}{\cos^2(\varphi)}\right)d\varphi = -\frac{8}{3}R^3\left[\frac{1}{\cos(\varphi)}+\cos(\varphi)-\tan(\varphi)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\\
&= -\frac{8}{3}R^3\left(\lim_{\varphi\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\cos(\varphi)}-\tan(\varphi)\right)-2\right) = \frac{16}{3}R^3
\end{aligned}
$$

Der Grenzwert kann z.B. mit Bernoulli-L'Hospital berechnet werden

$$
\lim_{\varphi\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\cos(\varphi)}-\tan(\varphi)\right)=\lim_{\varphi\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1-\sin(\varphi)}{\cos(\varphi)}\right)=\lim_{\varphi\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{-\cos(\varphi)}{-\sin(\varphi)}\right)=0
$$