Analysis II - Lösung Serie 5

1. Parametrisierung der Ellipsen

$$E_1: \begin{array}{l} x(\varphi_1) = 2\cos\varphi_1 \\ y(\varphi_1) = \sin\varphi_1 \end{array} \qquad E_2: \begin{array}{l} x(\varphi_2) = \cos\varphi_2 \\ y(\varphi_2) = 3\sin\varphi_2 \end{array}$$

   Die gemeinsame Fläche entspricht 4 mal der Fläche im ersten Quadranten (siehe Plot).

   Der Schnittpunkt ergibt sich aus

$$\begin{array}{rcl} 2\cos\varphi_1 = \cos\varphi_2 & \Rightarrow & \cos^2\varphi_1 = \frac{1}{4}\cos^2\varphi_2 \\ \sin\varphi_1 = 3\sin\varphi_2 & & \sin^2\varphi_1 = 9\sin^2\varphi_2 \end{array}$$

$$\text{Addition} \qquad 1 = \frac{1}{4}\cos^2\varphi_2 + 9\sin^2\varphi_2 = \frac{1}{4}\left(1 - \sin^2\varphi_2\right) + 9\sin^2\varphi_2$$

   Daraus folgt

$$\sin^2\varphi_2 = \frac{3}{35} \qquad \varphi_2 = \arcsin\sqrt{\frac{3}{35}}$$

$$\sin\varphi_1 = 3\sin\varphi_2 = 3\sqrt{\frac{3}{35}} \qquad \varphi_1 = \arcsin\sqrt{\frac{27}{35}}$$

   Für die Fläche gilt mit Ellipsenkoordinaten $dA = a\,b\,s\,ds\,d\varphi$ $(0 \leq s \leq 1)$

$$A = 4(A_1 + A_2) = 4\left(\int_0^1\int_{\varphi_1}^{\frac{\pi}{2}} a_1 b_1 s\,d\varphi\,ds + \int_0^1\int_0^{\varphi_2} a_2 b_2 s\,d\varphi\,ds\right)$$

$$= 4\left(2\int_0^1\int_{\varphi_1}^{\frac{\pi}{2}} s\,d\varphi\,ds + 3\int_0^1\int_0^{\varphi_2} s\,d\varphi\,ds\right) = 4\left(2\int_0^1 s\,ds\int_{\varphi_1}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi + 3\int_0^1 s\,ds\int_0^{\varphi_2} d\varphi\right)$$

$$= 4\left(2\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_1\right) + 3\frac{1}{2}\varphi_2\right) = 2(\pi - 2\varphi_1 + 3\varphi_2)$$

2. Der Zylinder sei gegeben durch

$$Z: \quad (x - R)^2 + y^2 \leq R^2 \qquad -\frac{H}{2} \leq z \leq \frac{H}{2}$$

   Die Rotationsachse ist dann die z-Achse. Nach dem Satz von Steiner gilt für das Trägheitsmoment

$$I = \int_Z \left(x^2 + y^2\right) dV = R^2\int_{\widetilde{Z}} dV + \int_{\widetilde{Z}} \left(\widetilde{x}^2 + \widetilde{y}^2\right) dV$$

denn R ist der Abstand der Rotationsachse zum Schwerpunkt des Zylinders. Das letzte Integral stellt das Trägheitsmoment dar, falls der Zylinder um seine Längsachse rotiert.

$$\widetilde{Z}: \quad \widetilde{x}^2 + \widetilde{y}^2 \leq R^2 \qquad -\frac{H}{2} \leq \widetilde{z} \leq \frac{H}{2}$$

Mit dem Volumenelement für Zylinderkoordinaten $dV = r\,dr\,d\varphi\,dz$ ergibt sich

$$\int_{\widetilde{Z}} \left(\widetilde{x}^2 + \widetilde{y}^2\right) dV = \int\limits_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^R r^3 dr\,d\varphi\,dz = \int\limits_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} dz \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^R r^3 dr = \frac{\pi}{2} H\,R^4$$

$$\int_{\widetilde{Z}} dV = \int\limits_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^R r\,dr\,d\varphi\,dz = \pi H\,R^2$$

Und damit

$$I = R^2\,\pi H\,R^2 + \frac{\pi}{2} H\,R^4 = \frac{3\pi}{2} H\,R^4$$

3. Der Weg ist gegeben durch

$$C: \quad \underline{r}\,(t) = \begin{pmatrix} x\,(t) \\ y\,(t) \\ z\,(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \dot{\underline{r}}\,(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und } 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

(a) Das Kraftfeld hat ein Potential, da

$$\begin{aligned} \partial_y K_3 - \partial_z K_2 &= 0 - 0 = 0 \\ \partial_z K_1 - \partial_x K_3 &= 2z - 2z = 0 \\ \partial_y K_1 - \partial_x K_2 &= 2x - 2x = 0 \end{aligned}$$

Das Potential berechnet sich durch

$$\begin{aligned} \Phi\,(x,y,z) &= \textstyle\int K_1 dx = \int \left(z^2 + 2x\,y\right) dx = x\,z^2 + y\,x^2 + C_1\,(y,z) \\ \Phi\,(x,y,z) &= \textstyle\int K_2 dy = \int x^2 dy = y\,x^2 + C_2\,(x,z) \\ \Phi\,(x,y,z) &= \textstyle\int K_3 dz = \int 2x\,z\,dz = x\,z^2 + C_3\,(x,y) \end{aligned}$$

wobei sich die Konstanten durch Vergleich ergeben:

$$C_1\,(y,z) = 1 \quad C_2\,(x,z) = x\,z^2 \quad C_3\,(x,y) = y\,x^2$$
$$\Rightarrow \Phi\,(x,y,z) = x\,z^2 + y\,x^2$$

Für die Arbeit gilt dann

$$W_1 = \int_C \underline{K}\,(\underline{r}) \cdot d\underline{r} = \Phi\,(\underline{r}\,(1)) - \Phi\,(\underline{r}\,(0)) = x\,(1)\;z\,(1)^2 + y\,(1)\;x\,(1)^2 - x\,(0)\;z\,(0)^2 + y\,(0)\;x\,(0)^2 = 0$$

(b) Dieses Kraftfeld hat kein Potential, denn $\partial_y K_1 \neq \partial_x K_2$, aber es gilt

$$W_2 = \int_C \underline{K}\,(\underline{r}) \cdot d\underline{r} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \begin{pmatrix} z\,(t)^2 \\ x\,(t)^2 \\ 2x\,(t)\,z\,(t)^2 \end{pmatrix} \cdot \dot{\underline{r}}\,(t)\,dt = W_1 - \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \begin{pmatrix} 2x\,(t)\,y\,(t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \dot{\underline{r}}\,(t)\,dt$$

$$= W_1 + 2 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \sin^2 t\,dt = W_1 + \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

4. Parametrisierung der Parabel

$$C: \quad \underline{r}\,(t) = \begin{pmatrix} x\,(t) \\ y\,(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 1-t^2 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \dot{\underline{r}}\,(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2t \end{pmatrix} \quad \text{und } 0 \le t \le 1$$

$\dot{\underline{r}}\,(t)$ ist der Tangentenvektor der Kurve C. Der Normalenvektor steht auf $\dot{\underline{r}}$ senkrecht

$$\underline{n}\,(t) \cdot \dot{\underline{r}}\,(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{n}\,(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ 1 \end{pmatrix}$$

Für den Volumenfluss $\dot{V}$ gilt

$$\dot{V} = \int_C \underline{v}\,(t) \cdot \frac{\underline{n}(t)}{\|\underline{n}(t)\|} ds = \int_C \underline{v}\,(t) \cdot \frac{\underline{n}(t)}{\|\underline{n}(t)\|} \|\dot{\underline{r}}(t)\| dt = \int\limits_0^1 \begin{pmatrix} 1 + x\,(t) \\ x\,(t) - y\,(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2t \\ 1 \end{pmatrix} dt$$

$$= \int\limits_0^1 \begin{pmatrix} 1+t \\ t-1+t^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2t \\ 1 \end{pmatrix} dt = \int\limits_0^1 (3t^2 + 3t - 1) dt = \left[t^3 + \frac{3}{2} t^2 - 1 \right]_0^1 = \frac{3}{2}$$