Analysis II - Lösung Serie 6

1. Parametrisierung des Ellipsoids

$$\underline{r}(\vartheta,\varphi) = \begin{pmatrix} x(\vartheta,\varphi) \\ y(\vartheta,\varphi) \\ z(\vartheta,\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\,\sin\vartheta\,\cos\varphi \\ b\,\sin\vartheta\,\sin\varphi \\ c\,\cos\vartheta \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} 0 \le \vartheta \le \frac{\pi}{2} \\ 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2} \end{matrix}$$

mit

$$\underline{r}_\vartheta = \begin{pmatrix} a\cos\vartheta\,\cos\varphi \\ b\cos\vartheta\,\sin\varphi \\ -c\sin\vartheta \end{pmatrix} \quad \underline{r}_\varphi = \begin{pmatrix} -a\sin\vartheta\,\sin\varphi \\ b\sin\vartheta\,\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad \underline{r}_\vartheta \times \underline{r}_\varphi = \begin{pmatrix} b\,c\sin^2\vartheta\,\cos\varphi \\ a\,c\sin^2\vartheta\,\sin\varphi \\ a\,b\cos\vartheta\sin\vartheta \end{pmatrix}$$

Der Volumenstrom ist dann

$$\dot V = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \underline{v}\left(\underline{r}(\vartheta,\varphi)\right)\cdot \underline{r}_\vartheta \times \underline{r}_\varphi \, d\vartheta\, d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \alpha \begin{pmatrix} a\sin\vartheta\,\cos\varphi \\ \frac{b}{2}\sin\vartheta\,\sin\varphi \\ \beta c^2\cos^2\vartheta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b\,c\sin^2\vartheta\,\cos\varphi \\ a\,c\sin^2\vartheta\,\sin\varphi \\ a\,b\cos\vartheta\sin\vartheta \end{pmatrix} d\vartheta\, d\varphi$$

$$= \alpha \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(a\,b\,c\sin^3\vartheta\,\cos^2\varphi + \frac{1}{2} a\,b\,c\sin^3\vartheta\sin^2\varphi + \beta\,a\,b\,c^2\cos^3\vartheta\sin\vartheta \right) d\vartheta\, d\varphi$$

$$= \alpha\,a\,b\,c \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi\, d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\vartheta\, d\vartheta + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\varphi\, d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\vartheta\, d\vartheta + \beta\,c \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\vartheta\cos^3\vartheta\, d\vartheta \right)$$

$$= \alpha\,a\,b\,c \left(\frac{\pi}{4}\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\frac{\pi}{4}\frac{2}{3} + \beta\,c \frac{\pi}{2}\frac{1}{4} \right) = \frac{\alpha\,a\,b\,c\,\pi}{4}\left(1 + \frac{\beta\,c}{2}\right)$$

2. Parametrisierung der Fläche

$$\underline{r}(u,v) = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ a^2 - b^2\left(u^2+v^2\right) \end{pmatrix} \qquad u^2 + v^2 \le \frac{a^2}{b^2}$$

mit

$$\underline{r}_u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2b^2 u \end{pmatrix} \quad \underline{r}_v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2b^2 v \end{pmatrix} \quad \underline{r}_u \times \underline{r}_v = \begin{pmatrix} 2b^2 u \\ 2b^2 v \\ 1 \end{pmatrix}$$

Für die Oberfläche gilt

$$A = \int_{u^2+v^2\le\frac{a^2}{b^2}} \|\underline{r}_u \times \underline{r}_v\|\, du\, dv = \int_{u^2+v^2\le\frac{a^2}{b^2}} \sqrt{4b^4\left(u^2+v^2\right)+1}\, du\, dv = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{a}{b}} \sqrt{4b^4r^2+1}\, r\, dr\, d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \left[\frac{1}{12b^4}\sqrt{4b^4r^2+1}^3 \right]_0^{\frac{a}{b}} = 2\pi \left(\frac{\sqrt{4a^2b^2+1}^3 - 1}{12b^4} \right) = \frac{\pi}{6b^4}\left(\sqrt{4a^2b^2+1}^3 - 1 \right)$$

3. Aus der Parametrisierung der Fläche

$$\underline{r}\,(u,v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ 1-u-v \end{pmatrix}$$

und der Kurve

$$\begin{pmatrix} u\,(t) \\ v\,(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ a\,t^2 \end{pmatrix}$$

folgt

$$\underline{r}\,(t) = \underline{r}\,(u\,(t)\,,v\,(t)) = \begin{pmatrix} u\,(t) \\ v\,(t) \\ 1-u\,(t)-v\,(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ a\,t^2 \\ 1-t-a\,t^2 \end{pmatrix}$$

mit

$$\dot{\underline{r}}\,(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2a\,t \\ -1-2a\,t \end{pmatrix} \qquad \|\dot{\underline{r}}\,(t)\| = \sqrt{1+4a^2t^2+(1+2a\,t)^2} = \sqrt{2+4a\,t+8a^2t^2}$$

Der Anfangspunkt liegt bei $t=0$ da $\underline{r}\,(0) = (0,0,1)$, für den Endpunkt muss gelten:

$$z = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1-t-a\,t^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{1}{2a}\left(-1 \pm \sqrt{1+4a}\right)$$

Da am Endpunkt $x\,(t) = t > 0$ gelten soll, ergibt sich

$$t_{end} = \frac{1}{2a}\left(-1+\sqrt{1+4a}\right)$$

Für die Bogenlänge folgt

$$L = \int_0^{t_{end}} \|\dot{\underline{r}}\,(t)\|\,dt = \int_0^{t_{end}} \sqrt{2+4a\,t+8a^2t^2}dt = \int_0^{t_{end}} \sqrt{2\left(2a\,t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{2}dt}$$

$$= \sqrt{\frac{3}{2}}\int_0^{t_{end}} \sqrt{\frac{1}{3}\,(4a\,t+1)^2+1dt}$$

Die Integrationsvariable wird durch $\xi = (4a\,t+1)\,/\sqrt{3}$ mit $d\xi = 4a\,dt/\sqrt{3}$ ersetzt:

$$L = \frac{3}{4a\sqrt{2}}\int_{1/\sqrt{3}}^{(4a\,t_{end}+1)/\sqrt{3}} \sqrt{\xi^2+1}d\xi = \frac{3}{4a\sqrt{2}}\left[\frac{1}{2}\left(\xi\sqrt{\xi^2+1}+\operatorname{asinh}\xi\right)\right]_{1/\sqrt{3}}^{(4a\,t_{end}+1)/\sqrt{3}}$$

$$= \frac{3}{8a\sqrt{2}}\left(\frac{4a\,t_{end}+1}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{1}{3}\,(4a\,t_{end}+1)^2+1}+\operatorname{asinh}\frac{4a\,t_{end}+1}{\sqrt{3}}-\frac{2}{3}-\operatorname{asinh}\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

Naja...

4. Parametrisierung der Kurve

$$\begin{pmatrix} u\,(t) \\ v\,(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t-\frac{a}{b} \end{pmatrix} \qquad 0 \le t \le \frac{a}{b}$$

Zusammen mit der Parametrisierung der Fläche aus Aufgabe 2 ergibt sich

$$\underline{r}\,(t) = \begin{pmatrix} u\,(t) \\ v\,(t) \\ a^2-b^2\left(u\,(t)^2+v\,(t)^2\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t-\frac{a}{b} \\ a^2-b^2\left(t^2+\left(t-\frac{a}{b}\right)^2\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t-\frac{a}{b} \\ 2\left(a\,b\,t-b^2t^2\right) \end{pmatrix}$$

mit

$$\underline{\dot{r}}\,(t)=\begin{pmatrix}1\\1\\2\left(a\,b-2b^2t\right)\end{pmatrix}\qquad \|\underline{\dot{r}}\,(t)\|=\sqrt{2+4\left(a\,b-2b^2t\right)^2}$$

Und somit die Bogenlänge

$$L=\int\limits_0^{\frac{a}{b}}\|\underline{\dot{r}}\,(t)\|\,dt=\int\limits_0^{\frac{a}{b}}\sqrt{2+4\left(a\,b-2b^2t\right)^2}dt=\sqrt{2}\int\limits_0^{\frac{a}{b}}\sqrt{1+2\left(a\,b-2b^2t\right)^2}dt$$

Auch hier wird die Integrationsvariable durch $\xi=\sqrt{2}\left(a\,b-2b^2t\right)$ mit $d\xi=-2\sqrt{2}b^2dt$ ersetzt:

$$L=-\frac{1}{2b^2}\int\limits_{a\,b\sqrt{2}}^{-a\,b\sqrt{2}}\sqrt{1+\xi^2}d\xi=\frac{1}{b^2}\int\limits_0^{a\,b\sqrt{2}}\sqrt{1+\xi^2}d\xi=\frac{1}{b^2}\left[\frac{1}{2}\left(\xi\sqrt{\xi^2+1}+\operatorname{asinh}\xi\right)\right]_0^{a\,b\sqrt{2}}$$

$$=\frac{1}{2b^2}\left(a\,b\sqrt{4a^2b^2+2}+\operatorname{asinh}\left(a\,b\sqrt{2}\right)\right)$$