Analysis II - Lösung Serie 7

1. Formel von Bonnet (in drei Dimensionen)

$$\kappa = \frac{1}{2} \operatorname{div} \underline{n} = \frac{1}{2} \left(\partial_x n_1 + \partial_y n_2 + \partial_z n_3 \right)$$

mit $\underline{n}$ als Flächennormale. Für die Fläche

$$z = f(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

gilt

$$\underline{n} = \frac{1}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1 + 4\left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}\right)}} \begin{pmatrix} 2\frac{x}{a^2} \\ 2\frac{y}{b^2} \\ -1 \end{pmatrix}$$

also

$$\begin{aligned}
\kappa &= \frac{1}{2} \left(\frac{2}{a^2} \partial_x \left(\frac{x}{\sqrt{1 + 4\left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}\right)}} \right) + \frac{2}{b^2} \partial_x \left(\frac{y}{\sqrt{1 + 4\left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}\right)}} \right) + \partial_z \left(\frac{-1}{\sqrt{1 + 4\left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}\right)}} \right) \right) \\
&= \frac{1}{a^2} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + 4\left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}\right)}} - \frac{4x^2}{a^4 \sqrt{1 + 4\left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}\right)}^3} \right) \\
&+ \frac{1}{b^2} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + 4\left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}\right)}} - \frac{4y^2}{b^4 \sqrt{1 + 4\left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}\right)}^3} \right) \\
&= \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) \frac{1}{\sqrt{1 + 4\left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}\right)}} - \frac{4}{\sqrt{1 + 4\left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}\right)}^3} \left(\frac{x^2}{a^6} + \frac{y^2}{b^6} \right)
\end{aligned}$$

2. Für den Winkel in dem sich zwei Kurven in einer beliebigen Geometrie schneiden gilt

$$\cos\gamma = \frac{g_{ij} v_1^i v_2^j}{\sqrt{g_{ij} v_1^i v_1^j} \sqrt{g_{ij} v_2^i v_2^j}}$$

darin sind die Vektoren $\underline{v}_{1,2}$ die Tangentenvektoren der beiden Kurven und es gilt die Summationskonvention (über doppelte Indices wird summiert). Die "Metrik" g_{ij} für eine Kugeloberfläche wurde in der Vorlesung angegeben:

$$g_{ij} = R^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2\vartheta \end{pmatrix}$$

Parametrisierung der beiden Kurven

$$r_1(t) = \begin{pmatrix} \vartheta_1(t) \\ \varphi_1(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix} \qquad r_2(t) = \begin{pmatrix} \vartheta_2(t) \\ \varphi_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^2 \\ t \end{pmatrix}$$

Am Schnittpunkt soll $\vartheta = \varphi = 1$ gelten, also $t = 1$. Die Tangentenvektoren sind

$$v_1(1) = \dot{r}_1(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix}_{t=1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad v_2(1) = \dot{r}_2(1) = \begin{pmatrix} 2t \\ 1 \end{pmatrix}_{t=1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Es folgt (mit $\vartheta = 1$)

$$\cos\gamma = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}}\sqrt{\begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}}}$$

$$= \frac{\begin{pmatrix} 1 & 2\sin^2 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{\begin{pmatrix} 1 & 2\sin^2 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}}\sqrt{\begin{pmatrix} 2 & \sin^2 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}}} = \frac{2 + 2\sin^2 1}{\sqrt{1 + 4\sin^2 1}\sqrt{4 + \sin^2 1}} \approx 0.804...$$

$$\gamma = 0.636... \widehat{=} 36.46^\circ$$

3. (a) Abgerollt ergibt sich folgendes Bild:

Der Winkel ρ ergibt sich durch die Gleichheit der Bogenlängen

$$\frac{\pi}{6}R = \rho L \qquad \text{mit } L = \sqrt{R^2 + H^2} \quad \Rightarrow \quad \rho = \frac{\pi R}{6L} = \frac{\pi}{6\sqrt{1 + \left(\frac{H}{R}\right)^2}}$$

Die Koordinaten der beiden Punkte sind dann

$$A = \begin{pmatrix} L \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \hat{A} = \begin{pmatrix} L\cos\rho \\ L\sin\rho \end{pmatrix}$$

und der kürzeste Abstand

$$x = \left\| \begin{pmatrix} L \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} L\cos\rho \\ L\sin\rho \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} L(1 - \cos\rho) \\ -L\sin\rho \end{pmatrix} \right\|$$

$$= L\sqrt{(1 - \cos\rho)^2 + \sin^2\rho} = L\sqrt{2 - 2\cos\rho} = \sqrt{2}\sqrt{R^2 + H^2}\sqrt{1 - \cos\frac{\pi}{6\sqrt{1 + \left(\frac{H}{R}\right)^2}}}$$

(b) "Abgerollt" ergibt sich folgendes Bild:

(*) bezeichnet die gegenüberliegende Seite und der kürzeste Abstand ist damit

$$x = \sqrt{\frac{9a^2}{4} + \frac{a^2}{4}} = \frac{a}{2}\sqrt{10}$$

4. Die maximale und minimale Krümmung $\kappa_{1,2}$von Kurven, die durch verschiedene Schnitte an einem Punkt einer Fläche auftreten können, lassen sich sich durch die Nullstellen der quadratischen Gleichung

$$\left(E\,G-F^2\right)\kappa_{1,2}^2-\left(E\,N+L\,G-2M\,F\right)\kappa_{1,2}+L\,N-M^2=0$$

berechnen. Die Größen E, F und G, sowie L, M und N sind die ersten und zweiten Fundamentalgrößen der Fläche. Es gilt hier

$$\underline{r}\,(u,v)=\begin{pmatrix} u \\ v \\ f\,(u)\,g\,(v) \end{pmatrix}\quad \underline{r}_u\,(u,v)=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f'\,(u)\,g\,(v) \end{pmatrix}\quad \underline{r}_v\,(u,v)=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f\,(u)\,g'\,(v) \end{pmatrix}$$

$$\underline{r}_{u\,u}\,(u,v)=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f''\,(u)\,g\,(v) \end{pmatrix}\quad \underline{r}_{u\,v}\,(u,v)=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f'\,(u)\,g'\,(v) \end{pmatrix}\quad \underline{r}_{v\,v}\,(u,v)=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f\,(u)\,g''\,(v) \end{pmatrix}$$

$$\underline{n}\,(u,v)=\frac{1}{\sqrt{1+g^2 f'^2+g'^2 f^2}}\begin{pmatrix} -g\,f' \\ -g'\,f \\ 1 \end{pmatrix}$$

sowie

$$\begin{aligned} E&=\left\|\underline{r}_u\right\|^2=1+g^2 f'^2 \\ F&=\underline{r}_u\cdot\underline{r}_v=g\,g'\,f\,f' \\ G&=\left\|\underline{r}_v\right\|^2=1+g'^2 f^2 \end{aligned}\qquad \begin{aligned} L&=\underline{r}_{u\,u}\cdot\underline{n}=\frac{g\,f''}{\sqrt{1+g^2 f'^2+g'^2 f^2}} \\ M&=\underline{r}_{u\,v}\cdot\underline{n}=\frac{g'\,f'}{\sqrt{1+g^2 f'^2+g'^2 f^2}} \\ N&=\underline{r}_{v\,v}\cdot\underline{n}=\frac{g''\,f}{\sqrt{1+g^2 f'^2+g'^2 f^2}} \end{aligned}$$

Die mittlere und Gauß'sche Krümmung ist gegeben durch

$$\kappa_M=\frac{1}{2}\left(\kappa_1+\kappa_2\right),\qquad \kappa_G=\kappa_1\kappa_2$$

und mit dem Satz von Vieta gilt

$$\begin{aligned} \kappa_M&=\frac{E\,N+L\,G-2M\,F}{2\left(E\,G-F^2\right)}=\frac{\left(1+g^2 f'^2\right)g''\,f+\left(1+g'^2 f^2\right)g\,f''-2g\,g'^2 f\,f'^2}{2\sqrt{1+g^2 f'^2+g'^2 f^2}^3} \\ \kappa_G&=\frac{L\,N-M^2}{E\,G-F^2}=\frac{g\,g''\,f\,f''-g'^2 f'^2}{\left(1+g'^2 f^2+g^2 f'^2\right)^2} \end{aligned}$$