Analysis II - Lösung Serie 8

1. In Polarkoordinaten (r, φ) ist der Laplace-Operator gegeben durch

$$\Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\varphi\varphi}$$

In der Aufgabe ist eine Lösung der Form $u(r)$ zu erwarten (Symmetrie !). Also

$$\Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r} u_r = -1 - \frac{r^2}{R_2^2} \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{1}{r}(r\,u_r)_r = -1 - \frac{r^2}{R_2^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad (r\,u_r)_r = -r - \frac{r^3}{R_2^2} \qquad \Leftrightarrow \quad r\,u_r = -\frac{1}{2}r^2 - \frac{r^4}{4R_2^2} + C_1 \qquad \Leftrightarrow \quad u_r = -\frac{1}{2}r - \frac{r^3}{4R_2^2} + C_1 \frac{1}{r}$$

$$\Leftrightarrow \quad u = -\frac{1}{4}r^2 - \frac{r^4}{16R_2^2} + C_1 \ln r + C_2$$

$$\Leftrightarrow u(r) = -\frac{1}{4}r^2 \left(1 + \frac{1}{4}\left(\frac{r}{R_2}\right)^2\right) + C_1 \ln \frac{r}{R_2} + \widetilde{C}_2$$

Die Randbedingungen lauten

$$u(R_1) = 0 \qquad \text{und} \qquad u(R_2) = 0$$

$$u(R_2) = -\frac{5}{16}R_2^2 + \widetilde{C}_2 \overset{!}{=} 0 \qquad \Rightarrow \quad \widetilde{C}_2 = \frac{5}{16}R_2^2$$

$$u(R_1) = -\frac{1}{4}R_1^2 \left(1 + \frac{1}{4}\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2\right) + C_1 \ln \frac{R_1}{R_2} + \frac{5}{16}R_2^2 \overset{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \quad C_1 = \frac{R_1^2}{4 \ln \frac{R_1}{R_2}} \left(1 + \frac{1}{4}\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 - \frac{5}{4}\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2\right)$$

Für den maximalen Wert muss gelten

$$u_r(r) = 0 \qquad \text{also} \quad -\frac{1}{2}r - \frac{r^3}{4R_2^2} + C_1 \frac{1}{r} = 0$$

$$\Rightarrow \quad r^4 + 2R_2^2 r^2 - 4C_1 R_2^2 = 0 \qquad r_{\max}^2 = -R_2^4 \pm \sqrt{R_2^4 + 4C_1 R_2^2}$$

Damit $r_{\max}^2 > 0$ muss das + gewählt werden.

$$r_{\max} = R_2 \sqrt{\sqrt{1 + 4\frac{C_1}{R_2^2}} - 1}$$

Für $R_1 = 1$ und $R_2 = 2$ gilt

$$C_1 = \frac{63}{64 \ln 2} \quad \text{und} \quad r_{\max} = 2\sqrt{\sqrt{1 + \frac{63}{64 \ln 2}} - 1} \approx 1.491$$

$$u(r_{\max}) = -\frac{1}{4}r_{\max}^2 \left(1 + \frac{r_{\max}^2}{16}\right) + C_1 \ln \frac{r_{\max}}{2} + \frac{5}{4} \approx 0.1999$$

2. In Kugelkoordinaten (r, ϑ, φ) lautet der Laplace-Operator

$$\Delta u = u_{rr} + \frac{2}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\vartheta\vartheta} + \frac{\cot\vartheta}{r^2} u_\vartheta + \frac{1}{r^2 \sin^2\vartheta} u_{\varphi\varphi}$$

In der Augabe gilt $u(r)$, daher

$$\Delta u = u_{rr} + \frac{2}{r} u_r = \frac{1}{r^2}\left(r^2 u_r\right)_r = -q$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(r^2 u_r\right)_r = -q r^2 \quad \Leftrightarrow \quad r^2 u_r = -\frac{q}{3} r^3 + C_1 \quad \Leftrightarrow \quad u_r = -\frac{q}{3} r + C_1 \frac{1}{r^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad u(r) = -\frac{q}{6} r^2 - C_1 \frac{1}{r} + C_2$$

Zunächst muss $u(0) < \infty$ und deshalb $C_1 = 0$ gelten. Die Normalenableitung in der Randbedingung wird zu u_r und es ergibt sich

$$u_r(R) + \alpha\, u(R) = -\frac{q}{3} R + \alpha\left(-\frac{q}{6} R^2 + C_2\right) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \quad C_2 = \frac{q}{6}\left(\frac{2R}{\alpha} + R^2\right)$$

$$u(r) = \frac{q}{6}\left(\frac{R}{2\alpha} + R^2 - r^2\right)$$

(a) Für den maximalen Wert gilt

$$u_r = 0 \quad \text{also} \quad -\frac{q}{3} r = 0 \quad \Rightarrow \quad r_{\max} = 0$$

$$u(r_{\max}) = \frac{q}{6}\left(\frac{R}{2\alpha} + R^2\right)$$

(b) Für den Gradient gilt in Kugelkoordinaten

$$\nabla u = \left(u_r, \frac{1}{r} u_\vartheta, \frac{1}{r\,\sin\vartheta} u_\varphi\right)$$

In unserem Fall folgt also

$$\|\nabla u\|^2 = u_r^2$$

und mit $dV = r^2 \sin\vartheta\, dr\, d\vartheta\, d\varphi$

$$\int_G \|\nabla u\|^2\, dV = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R} u_r^2\, r^2 \sin\vartheta\, dr\, d\vartheta\, d\varphi = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R} \frac{q^2}{9}\, r^4 \sin\vartheta\, dr\, d\vartheta\, d\varphi$$

$$= \frac{4\pi q^2}{9} \int_0^R r^4 dr = \frac{4\pi q^2 R^5}{45}$$

3. Wieder folgt mit dem Laplace-Operator in Kugelkoordinaten und $u(r)$

$$\frac{1}{r^2}\left(r^2 u_r\right)_r = c^2 u$$

Es wird jetzt die Variablentransformation

$$u(r) = \frac{v(r)}{r} \quad \text{mit} \quad u_r = \frac{v_r}{r} - \frac{v}{r^2}$$

durchgeführt:

$$\frac{1}{r^2}\left(r^2\left(\frac{v_r}{r}-\frac{v}{r^2}\right)\right)_r=\frac{1}{r^2}\left(r\,v_r-v\right)_r=\frac{1}{r^2}\left(v_r+r\,v_{rr}-v_r\right)=c^2\frac{v}{r}$$

Es bleibt

$$v_{rr}=c^2v \qquad \Rightarrow \quad v\left(r\right)=C_1\sinh\left(c\,r\right)+C_2\cosh\left(c\,r\right)$$

$$u\left(r\right)=C_1\frac{\sinh\left(c\,r\right)}{r}+C_2\frac{\cosh\left(c\,r\right)}{r}$$

Die Randbedingungen lauten

$$u\left(R_1\right)=1 \qquad \text{und} \qquad u\left(R_2\right)=1$$

$$\begin{array}{l} C_1\frac{\sinh(c\,R_1)}{R_1}+C_2\frac{\cosh(c\,R_1)}{R_1}=1 \\ C_1\frac{\sinh(c\,R_2)}{R_2}+C_2\frac{\cosh(c\,R_2)}{R_2}=1 \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} \frac{\sinh(c\,R_1)}{R_1} & \frac{\cosh(c\,R_1)}{R_1} \\ \frac{\sinh(c\,R_2)}{R_2} & \frac{\cosh(c\,R_2)}{R_2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} &= \frac{R_1R_2}{\sinh\left(c\,R_1\right)\cosh\left(c\,R_2\right)-\sinh\left(c\,R_2\right)\cosh\left(c\,R_1\right)}\begin{pmatrix} \frac{\cosh(c\,R_2)}{R_2}-\frac{\cosh(c\,R_1)}{R_1} \\ \frac{\sinh(c\,R_1)}{R_1}-\frac{\sinh(c\,R_2)}{R_2} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sinh\left(c\left(R_1-R_2\right)\right)}\begin{pmatrix} R_1\cosh\left(c\,R_2\right)-R_2\cosh\left(c\,R_1\right) \\ R_2\sinh\left(c\,R_1\right)-R_1\cosh\left(c\,R_2\right) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$u\left(r\right)=\frac{\left(R_1\cosh\left(c\,R_2\right)-R_2\cosh\left(c\,R_1\right)\right)\sinh\left(c\,r\right)+\left(R_2\sinh\left(c\,R_1\right)-R_1\cosh\left(c\,R_2\right)\right)\cosh\left(c\,r\right)}{r\sinh\left(c\left(R_1-R_2\right)\right)}$$

4. Wie oben

$$\frac{1}{r^2}\left(r^2u_r\right)_r=-\alpha\,r^p$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(r^2u_r\right)_r=-\alpha\,r^{p+2} \quad \Leftrightarrow \quad r^2u_r=-\frac{\alpha}{p+3}\,r^{p+3}+C_1 \quad \Leftrightarrow \quad u_r=-\frac{\alpha}{p+3}\,r^{p+1}+C_1\frac{1}{r^2}$$

$$u\left(r\right)=-\frac{\alpha}{\left(p+3\right)\left(p+2\right)}\,r^{p+2}-C_1\frac{1}{r}+C_2$$

Es gilt $C_1=0$, da $u\left(0\right)<\infty$ erfüllt sein sollte. C_2 folgt aus der Randbedingung

$$u\left(R\right)=0 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{\alpha}{\left(p+3\right)\left(p+2\right)}\,R^{p+2}+C_2\overset{!}{=}0 \quad \text{also} \quad C_2=\frac{\alpha}{\left(p+3\right)\left(p+2\right)}\,R^{p+2}$$

und damit

$$u\left(r\right)=\frac{\alpha}{\left(p+3\right)\left(p+2\right)}\left(R^{p+2}-r^{p+2}\right)$$

(a) u ist maximal bei $r=0$

$$u\left(0\right)=\frac{\alpha}{\left(p+3\right)\left(p+2\right)}R^{p+2}$$

(b) Wie oben gilt

$$\begin{aligned} \int_G\left\|\nabla u\right\|^2dV &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R}u_r^2\,r^2\sin\vartheta\,dr\,d\vartheta\,d\varphi=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R}\left(\frac{\alpha}{p+3}\,r^{p+1}\right)^2r^2\sin\vartheta\,dr\,d\vartheta\,d\varphi \\ &= \left(\frac{\alpha}{p+3}\right)^2\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R}r^{2p+4}\sin\vartheta\,dr\,d\vartheta\,d\varphi=4\pi\left(\frac{\alpha}{p+3}\right)^2\int_0^{R}r^{2p+4}\,dr \\ &= \frac{4\pi}{2p+5}\left(\frac{\alpha}{p+3}\right)^2R^{2p+5} \end{aligned}$$