Analysis II - Lösung Serie 9

1. Betrachte das Quadrat
$$\Omega = \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq a,\ 0 \leq y \leq a\}$$
Die gemischte Randbedingung gelte auf der Seite $x = a$. Das Problem lautet dann
$$u_{xx} + u_{yy} + \lambda\, u = 0 \quad \text{in } \Omega$$
$$\begin{aligned} u\,(0,y) &= 0 & \qquad u\,(x,0) &= 0 \\ u_x\,(a,y) + \frac{1}{a} u\,(a,y) &= 0 & \qquad u\,(x,a) &= 0 \end{aligned}$$
Der Separationsansatz $u\,(x,y) = X\,(x)\,Y\,(y)$ führt auf
$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + \lambda = 0$$
Da λ konstant ist und die einzelnen Summanden nur von einer Variablen abhängen, müssen alle Summanden konstant sein. Also mit $\lambda = \nu^2 + \mu^2$
$$\begin{aligned} \frac{X''}{X} &= -\nu^2 & \qquad \frac{Y''}{Y} &= -\mu^2 \\ X'' + \nu^2 X &= 0 & \qquad Y'' + \mu^2 Y &= 0 \\ X\,(x) &= C_1^x\, \sin(\nu x) + C_2^x\, \cos(\nu x) & \qquad Y\,(y) &= C_1^y\, \sin(\mu y) + C_2^y\, \cos(\mu y) \end{aligned}$$
Aus den Randbedinungen folgt
$$X\,(0) = 0 \quad X'\,(a) + \frac{1}{a} X\,(a) = 0 \quad Y\,(0) = 0 \quad Y\,(a) = 0$$
$$\begin{aligned} Y\,(0) = C_2^y = 0 \quad &\Rightarrow \quad Y\,(a) = C_1^y \sin(\mu a) = 0 \\ \text{mit } C_1^y \neq 0 \quad &\Rightarrow \quad \mu = \frac{j\pi}{a} \quad j = 1, 2, ... \\ X\,(0) = C_2^x = 0 \quad &\Rightarrow \quad X'\,(a) + \frac{1}{a} X\,(a) = C_1^x\, \nu\, \cos(\nu\, a) + \frac{1}{a} C_1^x\, \sin(\nu\, a) = 0 \\ \text{mit } C_1^x \neq 0 \quad &\Rightarrow \quad a\nu = -\tan(\nu\, a) \end{aligned}$$
Die Gleichung $x = -\tan x$ hat unendlich viele Lösungen x_i, die z.B. graphisch gefunden werden können.

Die ersten Lösungen sind
$$x_1 = 2.029 \quad x_2 = 4.91 \quad x_3 = 7.98$$

und für die ν's gilt

$$\nu = \frac{x_i}{a} \quad i = 1, 2, ...$$

Insgesamt also

$$\lambda_{ij} = \frac{x_i^2 + j^2\pi^2}{a^2}$$

$$\lambda_{11} = \frac{13.985}{a^2} < \lambda_{12} = \frac{34.009}{a^2} < \lambda_{21} = \frac{43.594}{a^2} < \lambda_{22} < ...$$

2. Der Einheitswürfel ist durch

$$\Omega = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1,\ 0 \leq z \leq 1\}$$

gegeben. Damit

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} + \lambda u = 0 \quad \text{in } \Omega$$

$$\begin{aligned} u_x(0, y, z) = u_y(x, 0, z) = u_z(x, y, 0) = 0 \\ u_x(1, y, z) = u_y(x, 1, z) = u_z(x, y, 1) = 0 \end{aligned}$$

Mit dem Separationsansatz $u(x, y, z) = X(x)\, Y(y)\, Z(z)$ folgt

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + \frac{Z''}{Z} + \lambda = 0$$

und wieder, dass die einzelnen Summanden konstant sind. Mit $\lambda = \nu^2 + \mu^2 + \eta^2$ gilt dann

$$\frac{X''}{X} = -\nu^2 \qquad \frac{Y''}{Y} = -\mu^2 \qquad \frac{Z''}{Z} = -\eta^2$$

$$X'' + \nu^2 X = 0 \qquad Y'' + \mu^2 Y = 0 \qquad Z'' + \eta^2 Z = 0$$

$$\begin{aligned} X(x) &= C_1^x \sin(\nu x) + C_2^x \cos(\nu x) \\ Y(y) &= C_1^y \sin(\mu y) + C_2^y \cos(\mu y) \\ Z(z) &= C_1^z \sin(\eta z) + C_2^z \cos(\eta z) \end{aligned}$$

Die obigen Randbedingungen ergeben für $X(x)$

$$X'(0) = X'(1) = 0$$

$$\begin{aligned} &X'(0) = C_1^x \nu = 0 \ \text{ also } C_1^x = 0 \quad \text{und damit } X'(1) = -C_2^x \nu \sin(\nu) = 0 \\ &\text{mit } C_2^x \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \nu = i\pi \quad i = 0, 1, 2, ... \end{aligned}$$

$i = 0$ ist wegen $X_0 = const$ möglich. Analog folgt für Y und Z

$$\mu = j\pi \quad j = 0, 1, 2, ... \qquad \eta = k\pi \quad k = 0, 1, 2, ...$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_{ijk} = \left(i^2 + j^2 + k^2\right)\pi^2$$

Die ersten 7 Eigenwerte lauten

$$\lambda_{000} = 0 < \lambda_{001} = \lambda_{010} = \lambda_{100} = \pi^2 < \lambda_{011} = \lambda_{101} = \lambda_{110} = 2\pi^2$$

3. Der Viertel-Einheitskreis ist gegeben durch

$$\Omega = \left\{(x, y) \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ x^2 + y^2 \leq 1\right\}$$

und es gilt zu lösen (Kreiskoordinaten (r, φ))

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi} + \lambda u = 0 \quad \text{in } \Omega$$

$$u(1,\varphi) = 0 \quad u_\varphi(r,0) = u_\varphi\left(r,\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

Mit dem Separationsansatz $u(r,\varphi) = R(r)\,\Phi(\varphi)$ folgt

$$\frac{R''}{R} + \frac{1}{r}\frac{R'}{R} + \frac{1}{r^2}\frac{\Phi''}{\Phi} + \lambda = 0$$

In dieser Gleichung taucht nur im Term $\frac{\Phi''}{\Phi}$ eine φ-Abhängigkeit auf. Damit muss dieser Term konstant sein:

$$\frac{\Phi''}{\Phi} = -\nu^2 \qquad \Phi(\varphi) = C_1^\varphi \sin(\nu\varphi) + C_2^\varphi \cos(\nu\varphi)$$

Aus den Randbedingungen folgt

$$\Phi'(0) = \Phi'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$\Phi'(0) = C_1^\varphi = 0 \quad \text{und damit } \Phi'\left(\frac{\pi}{2}\right) = C_2^\varphi \nu \sin\left(\nu\frac{\pi}{2}\right) = 0$$
$$\text{mit } C_2^\varphi \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \nu = 2n \quad n = 0,1,...$$

Damit gilt $\frac{\Phi''}{\Phi} = -(2n)^2$ und für die obige Gleichung

$$r^2 R'' + r\,R' + \left(\lambda\, r^2 - (2n)^2\right) R = 0$$

Nach der Variablentransformation $s = \sqrt{\lambda} r$ mit $\frac{d}{dr} = \sqrt{\lambda}\frac{d}{ds}$ ergibt sich

$$s^2\frac{d^2\widetilde{R}}{ds^2} + s\frac{d\widetilde{R}}{ds} + \left(s^2 - (2n)^2\right)\widetilde{R} = 0 \quad \text{(Bessel'sche DGL)}$$

mit der Lösung

$$\widetilde{R}(s) = C_1^r\, J_{2n}(s) + C_2^r\, Y_{2n}(s)$$
$$R(r) = C_1^r\, J_{2n}\left(\sqrt{\lambda} r\right) + C_2^r\, Y_{2n}\left(\sqrt{\lambda} r\right)$$

(J_n, Y_n Besselfunktionen erster und zweiter Art) Da $|Y_n(0)| \to \infty$ muss $C_2^r = 0$ sein. Aus der obigen Randbedingung folgt

$$R(1) = C_1^r\, J_{2n}\left(\sqrt{\lambda}\right) = 0$$
$$\text{mit } C_1^r \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{n,k} = j_{2n,k}^2 \quad k = 1,2,...$$

wobei $j_{n,k}$ die k-te Nullstelle von J_n ist. Die ersten paar Nullstellen lauten

$$j_{0,1} = 2.405 \quad j_{0,2} = 5.520 \quad j_{0,3} = 8.654$$
$$j_{2,1} = 5.136 \quad j_{2,2} = 8.417 \quad j_{2,3} = 11.620$$

und die ersten beiden Eigenwerte damit

$$\lambda_{0,1} = 5.784 < \lambda_{1,1} = 26.378$$

4. In Kugelkoordinaten gilt

$$u_{rr} + \frac{2}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\vartheta\vartheta} + \frac{\cot\vartheta}{r^2}u_\vartheta + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}u_{\varphi\varphi} + \lambda\, u = 0 \quad \text{in } \Omega$$
$$u_r(1,\vartheta,\varphi) + u(1,\vartheta,\varphi) = 0$$

woraus mit dem Separationsansatz $u(r,\vartheta,\varphi) = R(r)\,\Theta(\vartheta)\,\Phi(\varphi)$ folgt

$$\frac{R''}{R} + \frac{2}{r}\frac{R'}{R} + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\Theta''}{\Theta} + \cot\vartheta\frac{\Theta'}{\Theta} + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\Phi''}{\Phi}\right) + \lambda = 0$$

Wie in Aufgabe 3 folgt, dass die Klammer konstant sein muss. Sie wird null gesetzt und wir betrachten nur den radialen Teil der Gleichung

$$R'' + \frac{2}{r}R' = -\lambda\, R \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{r^2}\left(r^2 R'\right)' = -\lambda\, R$$

Mit der Transformation

$$R\,(r) = \frac{v\,(r)}{r} \qquad R'\,(r) = \frac{v'}{r} - \frac{v}{r^2}$$

ergibt sich

$$v'' = -\lambda\, v \qquad \Rightarrow v\,(r) = C_1 \sin\left(\sqrt{\lambda} r\right) + C_2 \cos\left(\sqrt{\lambda} r\right)$$

$$R\,(r) = C_1 \frac{\sin\left(\sqrt{\lambda} r\right)}{r} + C_2 \frac{\cos\left(\sqrt{\lambda} r\right)}{r}$$

Damit $|R\,(0)| < \infty$ muss $C_2 = 0$ sein. Weiter folgt aus der Randbedingung

$$\begin{aligned} R'\,(1) + R(1) &= 0 \\ R'\,(r) &= C_1 \frac{r\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda} r) - \sin\left(\sqrt{\lambda} r\right)}{r^2} \\ R'\,(1) + R\,(1) &= C_1 \sqrt{\lambda} \cos\left(\sqrt{\lambda}\right) = 0 \\ \text{mit } C_1 \neq 0 \quad &\Rightarrow \quad \lambda_i = (i + \frac{1}{2})^2 \pi^2 \quad i = 0, 1, 2, ... \end{aligned}$$

Der erste (radiale) Eigenwert ist damit $\frac{\pi^2}{4}$.