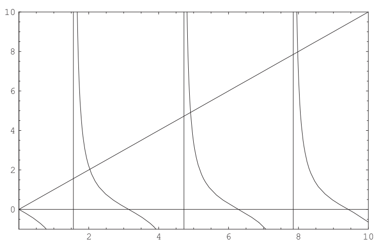
Analysis II - Lösung Serie 9

1. Betrachte das Quadrat
$$\Omega = \{(x,y) \mid 0 \le x \le a,\ 0 \le y \le a\}$$
Die gemischte Randbedingung gelte auf der Seite $x = a$. Das Problem lautet dann
$$u_{xx} + u_{yy} + \lambda u = 0 \quad \text{in } \Omega$$
$$\begin{aligned} u(0,y) &= 0 & u(x,0) &= 0 \\ u_x(a,y) + \frac{1}{a}u(a,y) &= 0 & u(x,a) &= 0 \end{aligned}$$
Der Separationsansatz $u(x,y) = X(x)\,Y(y)$ führt auf
$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + \lambda = 0$$
Da λ konstant ist und die einzelnen Summanden nur von einer Variablen abhängen, müssen alle Summanden konstant sein. Also mit $\lambda = \nu^2 + \mu^2$
$$\begin{aligned} \frac{X''}{X} &= -\nu^2 & \frac{Y''}{Y} &= -\mu^2 \\ X'' + \nu^2 X &= 0 & Y'' + \mu^2 Y &= 0 \\ X(x) = C_1^x \sin(\nu x) &+ C_2^x \cos(\nu x) & Y(y) &= C_1^y \sin(\mu y) + C_2^y \cos(\mu y) \end{aligned}$$
Aus den Randbedinungen folgt
$$X(0) = 0 \quad X'(a) + \frac{1}{a}X(a) = 0 \quad Y(0) = 0 \quad Y(a) = 0$$
$$\begin{aligned} Y(0) = C_2^y = 0 \quad &\Rightarrow \quad Y(a) = C_1^y \sin(\mu a) = 0 \\ \text{mit } C_1^y \neq 0 \quad &\Rightarrow \quad \mu = \frac{j\pi}{a} \quad j = 1,2,... \\ X(0) = C_2^x = 0 \quad &\Rightarrow \quad X'(a) + \frac{1}{a}X(a) = C_1^x\,\nu \cos(\nu a) + \frac{1}{a}C_1^x \sin(\nu a) = 0 \\ \text{mit } C_1^x \neq 0 \quad &\Rightarrow \quad a\nu = -\tan(\nu a) \end{aligned}$$
Die Gleichung $x = -\tan x$ hat unendlich viele Lösungen x_i, die z.B. graphisch gefunden werden können.



Die ersten Lösungen sind
$$x_1 = 2.029 \quad x_2 = 4.91 \quad x_3 = 7.98$$

und für die ν's gilt

$$\nu = \frac{x_i}{a} \quad i = 1, 2, ...$$

Insgesamt also

$$\lambda_{ij} = \frac{x_i^2 + j^2\pi^2}{a^2}$$

$$\lambda_{11} = \frac{13.985}{a^2} < \lambda_{12} = \frac{34.009}{a^2} < \lambda_{21} = \frac{43.594}{a^2} < \lambda_{22} < ...$$

2. Der Einheitswürfel ist durch

$$\Omega = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1,\ 0 \leq z \leq 1\}$$

gegeben. Damit

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} + \lambda u = 0 \quad \text{in } \Omega$$

$$\begin{aligned} u_x(0, y, z) = u_y(x, 0, z) = u_z(x, y, 0) = 0 \\ u_x(1, y, z) = u_y(x, 1, z) = u_z(x, y, 1) = 0 \end{aligned}$$

Mit dem Separationsansatz $u(x, y, z) = X(x)\,Y(y)\,Z(z)$ folgt

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + \frac{Z''}{Z} + \lambda = 0$$

und wieder, dass die einzelnen Summanden konstant sind. Mit $\lambda = \nu^2 + \mu^2 + \eta^2$ gilt dann

$$\frac{X''}{X} = -\nu^2 \qquad \frac{Y''}{Y} = -\mu^2 \qquad \frac{Z''}{Z} = -\eta^2$$

$$X'' + \nu^2 X = 0 \qquad Y'' + \mu^2 Y = 0 \qquad Z'' + \eta^2 Z = 0$$

$$\begin{aligned} X(x) &= C_1^x \sin(\nu x) + C_2^x \cos(\nu x) \\ Y(y) &= C_1^y \sin(\mu y) + C_2^y \cos(\mu y) \\ Z(z) &= C_1^z \sin(\eta z) + C_2^z \cos(\eta z) \end{aligned}$$

Die obigen Randbedingungen ergeben für $X(x)$

$$X'(0) = X'(1) = 0$$

$$\begin{aligned} &X'(0) = C_1^x \nu = 0 \ \text{ also } C_1^x = 0 \quad \text{und damit } X'(1) = -C_2^x \nu \sin(\nu) = 0 \\ &\text{mit } C_2^x \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \nu = i\pi \quad i = 0, 1, 2, ... \end{aligned}$$

$i = 0$ ist wegen $X_0 = const$ möglich. Analog folgt für Y und Z

$$\mu = j\pi \quad j = 0, 1, 2, ... \qquad \eta = k\pi \quad k = 0, 1, 2, ...$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_{ijk} = \left(i^2 + j^2 + k^2\right)\pi^2$$

Die ersten 7 Eigenwerte lauten

$$\lambda_{000} = 0 < \lambda_{001} = \lambda_{010} = \lambda_{100} = \pi^2 < \lambda_{011} = \lambda_{101} = \lambda_{110} = 2\pi^2$$

3. Der Viertel-Einheitskreis ist gegeben durch

$$\Omega = \left\{(x, y) \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ x^2 + y^2 \leq 1\right\}$$

und es gilt zu lösen (Kreiskoordinaten (r, φ))

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi} + \lambda u = 0 \quad \text{in } \Omega$$

$$u\left(1,\varphi\right)=0 \quad u_\varphi\left(r,0\right)=u_\varphi\left(r,\frac{\pi}{2}\right)=0$$

Mit dem Separationsansatz $u\left(r,\varphi\right)=R\left(r\right)\Phi\left(\varphi\right)$ folgt

$$\frac{R''}{R}+\frac{1}{r}\frac{R'}{R}+\frac{1}{r^2}\frac{\Phi''}{\Phi}+\lambda=0$$

In dieser Gleichung taucht nur im Term $\frac{\Phi''}{\Phi}$ eine φ-Abhängigkeit auf. Damit muss dieser Term konstant sein:

$$\frac{\Phi''}{\Phi}=-\nu^2 \qquad \Phi\left(\varphi\right)=C_1^\varphi\sin\left(\nu\varphi\right)+C_2^\varphi\cos\left(\nu\varphi\right)$$

Aus den Randbedingungen folgt

$$\Phi'\left(0\right)=\Phi'\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$$

$$\Phi'\left(0\right)=C_1^\varphi=0 \quad \text{und damit } \Phi'\left(\frac{\pi}{2}\right)=C_2^\varphi\nu\,\sin\left(\nu\frac{\pi}{2}\right)=0$$
$$\text{mit } C_2^\varphi\neq 0 \quad\Rightarrow\quad \nu=2n \quad n=0,1,...$$

Damit gilt $\frac{\Phi''}{\Phi}=-\left(2n\right)^2$ und für die obige Gleichung

$$r^2\,R''+r\,R'+\left(\lambda\,r^2-\left(2n\right)^2\right)R=0$$

Nach der Variablentransformation $s=\sqrt{\lambda}r$ mit $\frac{d}{dr}=\sqrt{\lambda}\frac{d}{ds}$ ergibt sich

$$s^2\frac{d^2\widetilde{R}}{ds^2}+s\frac{d\widetilde{R}}{ds}+\left(s^2-\left(2n\right)^2\right)\widetilde{R}=0 \quad \text{(Bessel'sche DGL)}$$

mit der Lösung

$$\widetilde{R}\left(s\right)=C_1^r\,J_{2n}\left(s\right)+C_2^r\,Y_{2n}\left(s\right)$$
$$R\left(r\right)=C_1^r\,J_{2n}\left(\sqrt{\lambda}r\right)+C_2^r\,Y_{2n}\left(\sqrt{\lambda}r\right)$$

(J_n, Y_n Besselfunktionen erster und zweiter Art) Da $\left|Y_n\left(0\right)\right|\to\infty$ muss $C_2^r=0$ sein. Aus der obigen Randbedingung folgt

$$R\left(1\right)=C_1^r\,J_{2n}\left(\sqrt{\lambda}\right)=0$$
$$\text{mit } C_1^r\neq 0 \quad\Rightarrow\quad \lambda_{n,k}=j_{2n,k}^2 \quad k=1,2,...$$

wobei $j_{n,k}$ die k-te Nullstelle von J_n ist. Die ersten paar Nullstellen lauten

$$j_{0,1}=2.405 \quad j_{0,2}=5.520 \quad j_{0,3}=8.654$$
$$j_{2,1}=5.136 \quad j_{2,2}=8.417 \quad j_{2,3}=11.620$$

und die ersten beiden Eigenwerte damit

$$\lambda_{0,1}=5.784<\lambda_{1,1}=26.378$$

4. In Kugelkoordinaten gilt

$$u_{rr}+\frac{2}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\vartheta\vartheta}+\frac{\cot\vartheta}{r^2}u_\vartheta+\frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}u_{\varphi\varphi}+\lambda\,u=0 \quad \text{in } \Omega$$
$$u_r\left(1,\vartheta,\varphi\right)+u\left(1,\vartheta,\varphi\right)=0$$

woraus mit dem Separationsansatz $u\left(r,\vartheta,\varphi\right)=R\left(r\right)\Theta\left(\vartheta\right)\Phi\left(\varphi\right)$ folgt

$$\frac{R''}{R}+\frac{2}{r}\frac{R'}{R}+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\Theta''}{\Theta}+\cot\vartheta\frac{\Theta'}{\Theta}+\frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\Phi''}{\Phi}\right)+\lambda=0$$

Wie in Aufgabe 3 folgt, dass die Klammer konstant sein muss. Sie wird null gesetzt und wir betrachten nur den radialen Teil der Gleichung

$$R'' + \frac{2}{r}R' = -\lambda\, R \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{r^2}\left(r^2 R'\right)' = -\lambda\, R$$

Mit der Transformation

$$R\left(r\right) = \frac{v\left(r\right)}{r} \qquad R'\left(r\right) = \frac{v'}{r} - \frac{v}{r^2}$$

ergibt sich

$$v'' = -\lambda\, v \qquad \Rightarrow v\left(r\right) = C_1 \sin\left(\sqrt{\lambda} r\right) + C_2 \cos\left(\sqrt{\lambda} r\right)$$

$$R\left(r\right) = C_1 \frac{\sin\left(\sqrt{\lambda} r\right)}{r} + C_2 \frac{\cos\left(\sqrt{\lambda} r\right)}{r}$$

Damit $|R\left(0\right)| < \infty$ muss $C_2 = 0$ sein. Weiter folgt aus der Randbedingung

$$\begin{aligned} R'\left(1\right) + R(1) &= 0 \\ R'\left(r\right) &= C_1 \frac{r\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda} r) - \sin\left(\sqrt{\lambda} r\right)}{r^2} \\ R'\left(1\right) + R\left(1\right) &= C_1 \sqrt{\lambda}\cos\left(\sqrt{\lambda}\right) = 0 \\ \text{mit } C_1 \neq 0 \quad &\Rightarrow \quad \lambda_i = (i + \frac{1}{2})^2 \pi^2 \quad i = 0, 1, 2, ... \end{aligned}$$

Der erste (radiale) Eigenwert ist damit $\frac{\pi^2}{4}$.