Serie 8

1. Temperaturverteilung bei inhomogener Heizung: Gegeben sei ein Kreisring G mit Radien $0 < R_1 < R_2$. Lösen Sie das Randwertproblem

$$\begin{aligned} \Delta u + 1 + \frac{r}{R_2} &= 0 \qquad \text{für } r \in G \\ u &= 0 \qquad \text{auf dem Rand} \end{aligned}$$

und bestimmen Sie den maximalen Wert von u für die Radien $R_1 = 1$ und $R_2 = 2$.

2. Sei G eine Kugel mit Radius R, sowie zwei Konstanten α und $q > 0$. Berechnen Sie die Lösung von

$$\begin{aligned} \Delta u + q &= 0 \qquad \text{in}\, G \\ \frac{\partial u}{\partial n} + \alpha u &= 0 \qquad \text{auf dem Rand} \end{aligned}$$

a) Welchen maximalen Wert hat u in der Kugel ?

b) Bestimmen Sie die Gesamtenergie der Lösung $E = \int_G |\nabla u|^2 dV$.

3. Diffusion und Reaktion in einer Kugelschale: Lösen Sie das Randwertproblem

$$\begin{aligned} \Delta u - c^2 u &= 0 \qquad \text{in}\, G \\ u &= 1 \qquad \text{auf } \partial G \end{aligned}$$

für eine Kugelschale G mit Radien $0 < R_1 < R_2$ und gegebene Konstante c. Berechnen Sie den minimalen Wert von u für $R_1 = 1$, $R_2 = 2$ und $c = 1$.

4. Stationäre Temperaturverteilung in einer Kugel: Bestimmen Sie in einer Kugel G mit Radius R die Lösung von

$$\begin{aligned} \Delta u + \alpha r^p &= 0 \qquad \text{für } r \in G \\ u &= 0 \qquad \text{auf } \partial G \end{aligned}$$

mit $\alpha = \mathit{const}$ und $p \geq 0$ gegeben, sowie

Bitte wenden!

a) den maximalen Wert von u in G,

b) und die Wärmemenge $W = \int_G u dV$.

Präsenz: Mittwoch, 29.5. von 12:00-13:00 im Vorraum von HG G53
Abgabe: Montag, 3. Juni 2002 in den Übungen