Lösung Serie 10

1. Betrachte also das Quadrat

$$G = \{(x,y):\ -L \le x \le L,\ -L \le y \le L\}$$

Zuerst werden die Eigenfunktionen und Eigenwerte des Problems

$$\Delta\phi + \lambda\phi = 0 \quad \text{in } G \qquad \phi = 0 \quad \text{auf } \partial G$$

berechnet.

Das Problem lautet dann

$$\phi_{xx} + \phi_{yy} + \lambda\phi = 0 \quad \text{in } G$$

$$\begin{array}{ll} \phi(x,-L) = 0 \qquad & \phi(x,L) = 0 \\ \phi(-L,y) = 0 \qquad & \phi(L,y) = 0 \end{array}$$

Der Separationsansatz $\phi(x,y) = X(x)Y(y)$ führt mit $\lambda = \nu^2 + \mu^2$ auf

$$\frac{X''}{X} = -\nu^2 \qquad \frac{Y''}{Y} = -\mu^2$$

Für $X(x)$ ergibt sich

$$X'' + \nu^2 X = 0$$

$$X(x) = C_1^x \sin(\nu x) + C_2^x \cos(\nu x)$$

Aus den Randbedinungen folgt

$$X(L) = 0 \qquad X(-L) = 0$$

und damit

$$\begin{array}{rcl} C_1^x \sin(\nu L) + C_2^x \cos(\nu L) &=& 0 \\ C_1^x \sin(-\nu L) + C_2^x \cos(-\nu L) &=& 0 \end{array} \qquad \begin{pmatrix} \sin(\nu L) & \cos(\nu L) \\ -\sin(\nu L) & \cos(\nu L) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1^x \\ C_2^x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

also für eine nichttriviale Lösung

$$\det \begin{pmatrix} \sin(\nu L) & \cos(\nu L) \\ -\sin(\nu L) & \cos(\nu L) \end{pmatrix} = 0 \qquad 2\sin(\nu L)\cos(\nu L) = \sin(\nu 2L) = 0$$

$$\nu_k = \frac{k\pi}{2L} \quad k = 1, 2, \ldots$$

Bitte wenden!

Für die Konstanten ergibt sich $C_1^x \sin(\nu L) = C_2^x \cos(\nu L)$, z.B.:

$$C_1^x = C^x \cos(\nu L) \quad \text{und} \quad C_2^x = C^x \sin(\nu L)$$

$$\begin{aligned} X(x) &= C^x(\cos(\nu_k L)\sin(\nu_k x) + \sin(\nu_k L)\cos(\nu_k x)) \\ &= C^x \sin\left(\frac{k\pi}{2L}(x+L)\right) \qquad k = 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

und analog für $Y(y)$

$$\mu_l = \frac{l\pi}{2L}, \quad Y(y) = C^y \sin\left(\frac{l\pi}{2L}(y+L)\right), \quad l = 1, 2, \ldots$$

$$\Rightarrow \quad \text{Eigenfunktionen } \phi_{k,l}(x,y) = C \sin\left(\frac{k\pi}{2L}(x+L)\right) \sin\left(\frac{l\pi}{2L}(y+L)\right)$$

Normierung der Eigenfunktionen $\phi_{k,l}$

$$\begin{aligned} 1 = \|\phi_{k,l}\|^2 &= \int_G u_{k,l}^2\, dA = \int_{-L}^{L}\int_{-L}^{L} C^2 \sin^2\left(\frac{k\pi}{2L}(x+L)\right)\sin^2\left(\frac{l\pi}{2L}(y+L)\right) dx\, dy \\ &= C^2 \int_{-L}^{L} \sin^2\left(\frac{k\pi}{2L}(x+L)\right) dx \int_{-L}^{L} \sin^2\left(\frac{l\pi}{2L}(y+L)\right) dy = C^2 L^2 \qquad \Rightarrow \quad C = \frac{1}{L} \end{aligned}$$

Für die Lösung $u(x,y)$ wird jetzt die Entwicklung

$$u(x,y) = \sum_{k,l=1}^{\infty} \widehat{u}_{k,l}\, \phi_{k,l}(x,y)$$

eingesetzt. Damit gilt

$$\Delta u = \sum_{k,l=1}^{\infty} \widehat{u}_{k,l}\, \Delta(\phi_{k,l}(x,y)) = -\sum_{k,l=1}^{\infty} \widehat{u}_{k,l}\, \lambda_{k,l}\, \phi_{k,l}(x,y).$$

mit

$$\lambda_{k,l} = \frac{\pi^2}{4\,L^2}\left(k^2 + l^2\right)$$

Nun muss noch der Term $\frac{x}{L}$ als $\phi_{k,l}$-Summe, also als Entwicklung in den Eigenfunktionen dargestellt werden:

$$\frac{x}{L} = \sum_{k,l=1}^{\infty} \alpha_{k,l}\phi_{k,l}(x,y)$$

Siehe nächstes Blatt!

mit

$$\begin{aligned}
\alpha_{k,l} &= \int_G \frac{x}{l}\phi_{k,l} dA = \\
&= \int_{-L}^{L}\int_{-L}^{L} \frac{x}{L}\phi_{k,l}(x,y)\,dx\,dy = \\
&= \frac{1}{L^2}\int_{-L}^{L} x\sin\left(\frac{k\pi}{2L}(x+L)\right)dx \int_{-L}^{L}\sin\left(\frac{l\pi}{2L}(y+L)\right)dy = \\
&= \frac{1}{L^2}\left(-\frac{2L^2}{k\pi}-\frac{2L^2}{k\pi}\cos(k\pi)\right)\left(\frac{2L}{l\pi}-\frac{2L}{l\pi}\cos(l\pi)\right) = \\
&= -\frac{4L}{kl\pi^2}\left(1+(-1)^k\right)\left(1-(-1)^l\right) = \begin{cases} \frac{16L}{kl\pi^2} & k \text{ gerade , } l \text{ ungerade} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}
\end{aligned}$$

Damit bekommen wir die Gleichung

$$\begin{aligned}
\sum_{k,l=1}^{\infty}(-\lambda_{k,l}\widehat{u}_{k,l}+\alpha_{k,l})\phi_{k,l}(x,y) &= 0 \\
\Rightarrow \quad -\lambda_{k,l}\widehat{u}_{k,l}+\alpha_{k,l} &= 0 \\
\Rightarrow \quad \widehat{u}_{k,l} &= \frac{\alpha_{k,l}}{\lambda_{k,l}}, \quad k,l = 1,2,\dots \\
\Rightarrow \quad \widehat{u}_{k,l} &= \begin{cases} \frac{\frac{16L}{kl\pi^2}}{\frac{\pi^2}{4L^2}(k^2+l^2)} & k \text{ gerade , } l \text{ ungerade} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \frac{64L^3}{kl(k^2+l^2)\pi^4} & k \text{ gerade , } l \text{ ungerade} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}
\end{aligned}$$

Insgesamt mit $k \to 2k$, $l \to 2l-1$

$$u(x,y) = \sum_{k,l=1}^{\infty}\left(\frac{4L^3}{k\,(l-1/2)\left(k^2+(l-1/2)^2\right)\pi^4}\right)\frac{1}{L}\sin\left(\frac{k\pi}{L}(x+L)\right)\sin\left(\frac{(l-1/2)\,\pi}{L}(y+L)\right)$$

2. Rechteck

$$G = \{(x,y):\ 0 \le x \le a,\ 0 \le y \le b\}$$

und

$$\Delta u - c^2 u = -\sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{\pi}{b}y\right) \quad \text{in } G \qquad u = 0 \quad \text{auf } \partial G.$$

Zuerst werden die Eigenfunktionen und Eigenwerte des Problems

$$\Delta\phi + \lambda\phi = 0 \quad \text{in } G \qquad \phi = 0 \quad \text{auf } \partial G$$

Bitte wenden!

berechnet: Der Ansatz $\phi(x,y) = X(x)Y(y)$ ergibt

$$\phi_{k,l}(x,y) = C \sin\left(\frac{k\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{l\pi}{b}y\right), \qquad \lambda_{k,l} = \pi^2\left(\frac{k^2}{a^2} + \frac{l^2}{b^2}\right) \quad k,l = 1,2,\ldots$$

u$(x,t) = \Re\left(w(x)e^{-\imath\omega t}\right)$ *unddieKonstanteCwirddurchNormierungbestimmt* : *FürdieLösung*u(x,y)*wir* $\sum_{k,l=1}^{\infty} \widehat{u}_{k,l}\, \phi_{k,l}(x,y)$eingesetzt. Damit gilt

$$\Delta u = \sum_{k,l=1}^{\infty} \widehat{u}_{k,l}\, \Delta(\phi_{k,l}(x,y)) = -\sum_{k,l=1}^{\infty} \widehat{u}_{k,l}\, \lambda_{k,l}\, \phi_{k,l}(x,y).$$

Nun muss noch der Term $-\sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{\pi}{b}y\right)$ als $\phi_{k,l}$-Summe, also als Entwicklung in den Eigenfunktionen dargestellt werden:

$$-\sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{\pi}{b}y\right) = \sum_{k,l=1}^{\infty} \alpha_{k,l}\phi_{k,l}(x,y)$$

mit

$$\begin{aligned}
\alpha_{k,l} &= -\int_G \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{\pi}{b}y\right)\phi_{k,l}dA \\
&= -\frac{2}{\sqrt{ab}}\int_0^a \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{k\pi}{a}x\right)\,dx \int_0^b \sin\left(\frac{\pi}{b}y\right)\sin\left(\frac{l\pi}{b}y\right)\,dy
\end{aligned}$$

mit

$$\int_0^a \sin\left(\frac{k\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^a \left(\cos\left(\frac{(k-1)\pi}{a}x\right) - \cos\left(\frac{(k+1)\pi}{a}x\right)\right)\,dx =$$
$$= \begin{cases} \frac{a}{2} & k=1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

erhält man

$$\alpha_{k,l} = \begin{cases} -\frac{\sqrt{ab}}{2} & \text{k=1 und l=1} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Damit bekommen wir die Gleichung

$$\begin{aligned}
\sum_{k,l=1}^{\infty}(-\lambda_{k,l} - c^2)\widehat{u}_{k,l}\phi_{k,l}(x,y) &= \sum_{k,l=1}^{\infty}\alpha_{k,l}\phi_{k,l}(x,y) \\
\Rightarrow \quad \sum_{k,l=1}^{\infty}(\alpha_{k,l} + (\lambda_{k,l} + c^2)\widehat{u}_{k,l})\phi_{k,l}(x,y) &= 0 \\
\Rightarrow \quad \alpha_{k,l} + (\lambda_{k,l} + c^2)\widehat{u}_{k,l} &= 0, \quad k,l = 1,2,\ldots \\
\Rightarrow \quad \widehat{u}_{k,l} &= -\frac{\alpha_{k,l}}{\lambda_{k,l} + c^2}, \quad k,l = 1,2,\ldots
\end{aligned}$$

Siehe nächstes Blatt!

Es gilt damit für die Lösung

$$u(x,y) = \frac{\frac{\sqrt{ab}}{2}}{\pi^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)+c^2}\sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{\pi}{b}y\right)$$

Zur Lösung von

$$\Delta u + \frac{x+y+z}{a} = 0 \quad \text{in } [0,a]^3$$

$$u(x,y,0) = u(x,y,a) = u(x,0,z) = u(x,a,z) = u(0,y,z) = u(a,y,z) = 0$$

wird das Eigenwertproblem

$$\Delta\phi + \lambda\phi = 0 \quad \text{in } [0,a]^3$$

$$\phi(x,y,0) = \phi(x,y,a) = \phi(x,0,z) = \phi(x,a,z) = \phi(0,y,z) = \phi(a,y,z) = 0$$

gelöst. Es gilt

$$\phi_{j,k,l}(x,y,z) = C\sin\left(\frac{j\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{k\pi}{a}y\right)\sin\left(\frac{l\pi}{a}z\right),$$

$$\lambda_{j,k,l} = \frac{\pi^2}{a^2}(j^2+k^2+l^2), \quad j,k,l = 1,2,\ldots$$

Die Konstante C wird durch Normierung bestimmt

$$\begin{aligned}
1 &= \int_0^a\int_0^a\int_0^a \phi_{j,k,l}^2(x,y,z)\,dx\,dy\,dz \\
&= C^2\int_0^a \sin^2\left(\frac{j\pi}{a}x\right)\,dx\int_0^a \sin^2\left(\frac{k\pi}{a}y\right)\,dy\int_0^a \sin^2\left(\frac{l\pi}{a}z\right)\,dz = C^2\frac{a^3}{8} \\
\Rightarrow \quad C &= \sqrt{\frac{8}{a^3}}
\end{aligned}$$

Ansatz für u

$$u(x,y,z) = \sum_{j,k,l=1}^{\infty} \widehat{u}_{j,k,l}\,\phi_{j,k,l}(x,y)$$

und Entwicklung von $\frac{x+y+z}{a}$

$$\frac{x+y+z}{a} = \sum_{j,k,l=1}^{\infty} \alpha_{j,k,l}\,\phi_{j,k,l}(x,y,z)$$

Bitte wenden!

mit

$$
\begin{aligned}
\alpha_{j,k,l} =& \int_G \frac{x+y+z}{a}\,\phi_{j,k,l}\,dA = \\
=& \int_0^a \int_0^a \int_0^a \sqrt{\frac{8}{a^3}} \frac{x+y+z}{a} \sin\left(\frac{j\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{k\pi}{a}y\right) \sin\left(\frac{l\pi}{a}z\right)\,dx\,dy\,dz \\
=& \sqrt{\frac{8}{a^5}} \left(\int_0^a x \sin\left(\frac{j\pi}{a}x\right) dx \int_0^a \sin\left(\frac{k\pi}{a}y\right) dy \int_0^a \sin\left(\frac{l\pi}{a}z\right) dz + \right. \\
& + \int_0^a \sin\left(\frac{j\pi}{a}x\right) dx \int_0^a y \sin\left(\frac{k\pi}{a}y\right) dy \int_0^a \sin\left(\frac{l\pi}{a}z\right) dz + \\
& \left. + \int_0^a \sin\left(\frac{j\pi}{a}x\right) dx \int_0^a \sin\left(\frac{k\pi}{a}y\right) dy \int_0^a z \sin\left(\frac{l\pi}{a}z\right) dz + \right) = \\
=& \sqrt{\frac{8}{a^5}} \left(\frac{a^2}{j\pi}(-\cos(j\pi)) \frac{a}{k\pi}(1-\cos(k\pi)) \frac{a}{l\pi}(1-\cos(l\pi)) + \right. \\
& + \frac{a}{j\pi}(1-\cos(j\pi)) \frac{a^2}{k\pi}(-\cos(k\pi)) \frac{a}{l\pi}(1-\cos(l\pi)) + \\
& \left. + \frac{a}{j\pi}(1-\cos(j\pi)) \frac{a}{k\pi}(1-\cos(k\pi)) \frac{a^2}{l\pi}(-\cos(l\pi)) \right) = \\
=& \frac{\sqrt{8a^3}}{j\,k\,l\pi^3} \left((-1)^{j+1}(1-(-1)^k)(1-(-1)^l) + (-1)^{k+1}(1-(-1)^j)(1-(-1)^l) + \right. \\
& \left. + (-1)^{l+1}(1-(-1)^k)(1-(-1)^j) \right) \\
=& \begin{cases} \frac{24\,a\sqrt{2a}}{jkl\pi^3} & j,k,l \text{ ungerade} \\ \frac{-8\sqrt{2a}}{jkl\pi^3} & \text{wenn ein Index gerade und ist die andere zwei Indizes ungerade sind} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}
\end{aligned}
$$

Durch Einsetzen folgt

$$
\begin{aligned}
\Delta u + \frac{x+y+z}{a} &= \sum_{j,k,l=1}^{\infty} \left(\widehat{u}_{j,k,l}\,\Delta\phi_{j,k,l}(x,y,z) + \alpha_{j,k,l}\,\phi_{j,k,l}(x,y,z) \right) \\
&= \sum_{j,k,l=1}^{\infty} \left(\widehat{u}_{j,k,l}(-\lambda_{j,k,l})\phi_{j,k,l}(x,y,z) + \alpha_{j,k,l}\,\phi_{j,k,l}(x,y,z) \right) \\
&= \sum_{j,k,l=1}^{\infty} \left(-\widehat{u}_{j,k,l}\lambda_{j,k,l} + \alpha_{j,k,l} \right)\phi_{j,k,l}(x,y,z) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \widehat{u}_{j,k,l} = \frac{\alpha_{j,k,l}}{\lambda_{j,k,l}}
\end{aligned}
$$

$$
u(x,y,z) = \sum_{j,k,l=1}^{\infty} \frac{\sqrt{8a}\,\alpha_{j,k,l}}{\pi^2(j^2+k^2+l^2)} \sin\left(\frac{j\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{k\pi}{a}y\right) \sin\left(\frac{k\pi}{a}z\right)
$$