Lösung Serie 11

1. Zu lösen ist

$$\partial_t u = D\,\Delta u + qe^{-t} \quad \text{in } [0, L]$$

$$\begin{aligned} u_x(0,t) = u(L,t) &= 0 \\ u(x,0) &= 0 \end{aligned}$$

Aus Vorlesung Lösung der Problem:

$$\begin{aligned} \partial_t u &= D\,\Delta u + q(x,t) \quad \text{in } \Omega \times (0,\infty) \\ Bu &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \times (0,\infty) \\ u(x,0) &= u_0(x) \end{aligned}$$

ist

$$u(x,t) = \int_\Omega u_0(\xi) K(x,\xi,t)\, d\xi + \int_0^t \int_\Omega q(\xi,\tau) K(x,\xi,t-\tau)\, d\xi d\tau$$

wo

$$K(x,\xi,t) = \sum_{k=1}^\infty \phi_k(x)\phi_k(\xi) e^{-D\lambda_k t}$$

den Kern und ϕ_k/λ_k die normierte Eigenfunktion/Eigenwert der Problem

$$\begin{aligned} \Delta\phi + \lambda\phi &= 0 \quad \text{in } \Omega \\ Bu &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

sind.
Zuerst werden die Eigenfunktionen $\phi(x)$ ausgerechnet:

$$\Delta\phi + \lambda\phi = \phi'' + \lambda\phi = 0 \quad \text{in } [0, L] \qquad \phi'(0) = \phi(L) = 0$$

$$\begin{aligned} &\phi(x) = C_1 \sin\left(\sqrt{\lambda}x\right) + C_2 \cos\left(\sqrt{\lambda}x\right) \\ &\phi'(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 0 \\ &\phi(L) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 \cos\left(\sqrt{\lambda}x\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_k = \left(\frac{(2k-1)\pi}{2L}\right)^2 \quad k = 1, 2, \ldots \\ &\qquad \Rightarrow \quad \phi_k(x) = C \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2L} x\right) \end{aligned}$$

Bitte wenden!

Normieren:

$$1 = \|\phi\|^2 = \int_0^L C^2 \cos^2\left(\frac{(2k-1)\pi}{2L}x\right)dx = C^2\frac{L}{2} \quad \Rightarrow \quad C = \sqrt{\frac{2}{L}}$$

$$\phi_k(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2L}x\right)$$

Mittels die Eigenfunktionen bildet man den Kern:

$$K\left(x,\xi,t\right) = \frac{2}{L}\sum_{k=1}^{\infty}\cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2L}x\right)\cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2L}\xi\right)e^{-D\lambda_k\tau}$$

Damit die Lösung wird:

$$u(x,t) = \underbrace{\int_\Omega \underbrace{u_0(\xi)}_{=0} K\left(x,\xi,t\right)d\xi}_{=0} + \int_0^t\int_0^L \underbrace{q(\xi,\tau)}_{=qe^{-t}} K\left(x,\xi,t-\tau\right)d\xi d\tau =$$

$$= \int_0^t\int_0^L\left(\frac{2}{L}\sum_{k=1}^{\infty}\cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2L}x\right)\cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2L}\xi\right)e^{-D\lambda_k(t-\tau)}\right)qe^{-\tau}d\xi d\tau =$$

$$= \frac{2q}{L}\sum_{k=1}^{\infty}e^{-D\lambda_k t}\cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2L}x\right)\int_0^t e^{(D\lambda_k-1)\tau}d\tau\int_0^L\cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2L}\xi\right)d\xi =$$

$$= \frac{2q}{L}\sum_{k=1}^{\infty}e^{-D\lambda_k t}\cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2L}x\right)\frac{e^{(D\lambda_k-1)t-1}}{D\lambda_k-1}\frac{2L}{(2k-1)\pi}\underbrace{\sin\left(\frac{(2k-1)\pi}{2}\right)}_{(-1)^{k+1}} =$$

$$= 4q\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{e^{-D\lambda_k t}-e^{-t}}{D\lambda_k-1}\frac{\cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2L}x\right)}{(2k-1)\pi}$$

2. Als erstes wird die Randbedingung homogenisiert durch die Transformation $v := u-1 \Leftrightarrow u = v+1$. Dann gilt es zu lösen

$$\begin{aligned} \partial_t v &= D\,\Delta v - c^2 v - c^2 && \text{in } G \\ v &= 0 && \text{auf } \partial G \\ v(x,y,0) = u(x,y,0) - 1 &= 0 \end{aligned}$$

Zunächst werden die Eigenfunktionen $\phi(x,y)$ ausgerechnet

$$\Delta\phi + \lambda\phi = 0 \quad \text{in } G \qquad\qquad \phi = 0 \quad \text{auf } \partial G.$$

Mit dem Separationsansatz bekommt man die Lösung

$$\phi_{k,l}(x,y) = \frac{2}{a}\sin\left(\frac{k\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{l\pi}{a}y\right) \qquad \lambda_{k,l} = \frac{\pi^2}{a^2}\left(k^2+l^2\right)$$

Siehe nächstes Blatt!

Analog zur erste aufgabe bildet man den Kern:

$$K\left(x,y,\xi,\eta,t\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\phi_{k,l}(x,y)\phi_{k,l}(\xi,\eta)e^{-(D\lambda_{k,l}+c^2)t}=$$
$$=\frac{4}{a^2}\sum_{k,l=1}^{\infty}\sin\left(\frac{k\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{l\pi}{a}y\right)\sin\left(\frac{k\pi}{a}\xi\right)\sin\left(\frac{l\pi}{a}\eta\right)e^{-(D\lambda_{k,l}+c^2)t}$$

Damit die Lösung füer v wird

$$v(x,y,t)=\underbrace{\int_{\Omega}\underbrace{u_0(\xi,\eta)}_{=0}K\left(x,y,\xi,\eta,t\right)d\xi d\eta}_{=0}+\int_0^t\int_0^a\int_0^a\underbrace{g(\xi,\tau)}_{=-c^2}K\left(x,y,\xi,\eta,t-\tau\right)d\xi d\eta d\tau=$$
$$=\frac{4c^2}{a^2}\sum_{k,l=1}^{\infty}\sin\left(\frac{k\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{l\pi}{a}y\right)e^{-(D\lambda_{k,l}+c^2)t}\times$$
$$\times\int_0^t e^{(D\lambda_{k,l}+c^2)\tau}d\tau\int_0^a\int_0^a\sin\left(\frac{k\pi}{a}\xi\right)\sin\left(\frac{l\pi}{a}\eta\right)d\xi d\eta=$$
$$=\frac{4c^2}{a^2}\sum_{k,l=1}^{\infty}\sin\left(\frac{k\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{l\pi}{a}y\right)e^{-(D\lambda_{k,l}+c^2)t}\frac{e^{(D\lambda_{k,l}+c^2)t}-1}{D\lambda_{k,l}+c^2}\beta_{k,l}$$

mit

$$\beta_{k,l}=\int_0^a\int_0^a\sin\left(\frac{k\pi}{a}\xi\right)\sin\left(\frac{l\pi}{a}\eta\right)d\xi\,d\eta=\begin{cases}\frac{4a^2}{kl\pi^2} & k,\ l\ \text{ungerade}\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$$

Mit $k\to 2k-1$ und $l\to 2l-1$ erhalt man

$$v(x,y,t)=-\frac{16c^2}{\pi^2}\sum_{k,l=1}^{\infty}\sin\left(\frac{(2k-1)\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{(2l-1)\pi}{a}y\right)\frac{1-e^{-(D\lambda_{2k-1,2l-1}+c^2)t}}{(2k-1)\,(2l-1)\,(D\lambda_{2k-1,2l-1}+c^2)}$$

$$\Rightarrow\quad u(x,y,t)=1+v(x,y,t)=$$
$$1-\frac{16c^2}{\pi^2}\sum_{k,l=1}^{\infty}\sin\left(\frac{(2k-1)\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{(2l-1)\pi}{a}y\right)\frac{1-e^{-(D\lambda_{2k-1,2l-1}+c^2)t}}{(2k-1)\,(2l-1)\,(D\lambda_{2k-1,2l-1}+c^2)}$$

Für $t\to\infty$ gilt $e^{-(D\,\lambda_{k,l}+c^2)t}\to 0$, also

$$\lim_{t\to\infty}u(x,y,t)=1-\frac{16c^2}{\pi^2}\sum_{k,l=1}^{\infty}\frac{\sin\left(\frac{(2k-1)\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{(2l-1)\pi}{a}y\right)}{(2k-1)\,(2l-1)\,(D\lambda_{2k-1,2l-1}+c^2)}$$

Bitte wenden!

3. Zunächst die Eigenfunktionen $\phi(r)$ (Kugelkoordinaten)

$$\frac{1}{r^2}\left(r^2\phi_r\right)_r + \lambda\phi = 0 \quad \text{in } G, \qquad \phi(R) = 0$$

Zur Lösung wird der übliche Ansatz benutzt:

$$\phi(r) = \frac{f(r)}{r} \quad \text{mit} \quad \phi_r = \frac{f'}{r} - \frac{f}{r^2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{r^2}\left(r^2\left(\frac{f'}{r} - \frac{f}{r^2}\right)\right)_r + \lambda\frac{f}{r} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f'' - \lambda f = 0$$

Also

$$f(r) = C_1 \sin\left(\sqrt{\lambda}r\right) + C_2\cos\left(\sqrt{\lambda}r\right) \quad \Leftrightarrow \quad \phi(r) = C_1\frac{\sin\left(\sqrt{\lambda}r\right)}{r} + C_2\frac{\cos\left(\sqrt{\lambda}r\right)}{r}$$

Es muss $|\phi(0)| < \infty$ und daher $C_2 = 0$ gelten. Aus der Randbedingung folgt

$$\phi(R) = C_1\frac{\sin\left(\sqrt{\lambda}R\right)}{R} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_k = \left(\frac{k\pi}{R}\right)^2 \quad k = 1, 2, \ldots$$

$$\phi_k(r) = C\frac{\sin\left(\frac{k\pi}{R}r\right)}{r}$$

Normieren mit Kugelkoordinaten $dV = r^2\sin\theta\, dr\, d\theta\, d\phi$

$$\begin{aligned}
\|\phi\|^2 = \int_G \phi_k^2\, dV &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R} C^2\frac{\sin^2\left(\frac{k\pi}{R}r\right)}{r^2}r^2\sin\theta\, dr\, d\theta\, d\phi \\
&= 4\pi\int_0^R C^2\sin^2\left(\frac{k\pi}{R}r\right)\, dr = C^2 2\pi R \quad \Rightarrow \quad C = \frac{1}{\sqrt{2\pi R}}
\end{aligned}$$

$$\phi_k(r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi R}}\frac{\sin\left(\frac{k\pi}{R}r\right)}{r}$$

Entwicklung der Quelle $r^2 = \sum_{k=1}^{\infty}\beta_k\,\phi_k(r)$ mit

$$\begin{aligned}
\beta_k &= \int_G r^2\,\phi_k\, dV = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R} r\frac{1}{\sqrt{2\pi R}}\frac{\sin\left(\frac{k\pi}{R}r\right)}{r}r^3\sin\theta\, dr\, d\theta\, d\phi \\
&= 4\pi\frac{1}{\sqrt{2\pi R}}\int_0^R r^2\sin\left(\frac{k\pi}{R}r\right)\, dr = 4\pi\frac{1}{\sqrt{2\pi R}}\left(-\frac{R^4\cos(k\pi)}{k\pi} + \frac{6R^4\cos(k\pi)}{(k\pi)^3}\right) \\
&= 2\sqrt{2\pi R}R^3(-1)^k\frac{6-(k\pi)^2}{(k\pi)^3}
\end{aligned}$$

Siehe nächstes Blatt!

Jetzt den Ansatz $u(r,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(t)\, \phi_k(r)$ einsetzen

$$\partial_t \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(t)\, \phi_k(r) - D\,\Delta \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(t)\, \phi_k(r) - \gamma \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k\, \phi_k(r) = 0$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\partial_t \alpha_k(t)\, \phi_k(r) - D\,\alpha_k(t)\, \Delta\phi_k(r) - \gamma\beta_k\, \phi_k(r)\right) = 0$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\alpha_k'(t) + D\,\lambda_k\, \alpha_k(t) - \gamma\beta_k\,\right) \phi_k(r) = 0$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \alpha_k'(t) &= -D\,\lambda_k\,\alpha_k(t) + \gamma\beta_k \\ \alpha_k(t) &= \frac{\gamma\beta_k}{D\,\lambda_k} + C_k\, e^{-D\,\lambda_k\, t} \end{aligned}$$

Mit der Anfangsbedingung für u

$$u(r,0) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(0)\, \phi_k(r) = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_k(0) = 0$$

also

$$\begin{aligned} \alpha_k(0) &= \frac{\gamma\beta_k}{D\,\lambda_k} + C_k = 0 \quad \Rightarrow \quad C_k = -\frac{\gamma\beta_k}{D\,\lambda_k} \\ \alpha_k(t) &= \frac{\gamma\beta_k}{D\,\lambda_k}\left(1 - e^{-D\,\lambda_k\, t}\right) \\ \Rightarrow \quad u(r,t) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\gamma\beta_k}{D\,\lambda_k}\, \frac{\left(1 - e^{-D\,\lambda_k\, t}\right)}{\sqrt{2\pi R}}\, \frac{\sin\left(\frac{k\pi}{R} r\right)}{r} \end{aligned}$$

Mit $\lim_{t\to\infty} e^{-D\,\lambda_k\, t} = 0$

$$\lim_{t\to\infty} u(r,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\gamma\beta_k}{D\,\lambda_k}\, \frac{1}{\sqrt{2\pi R}}\, \frac{\sin\left(\frac{k\pi}{R} r\right)}{r}$$