Lösung Serie 12

1. Zuerst werden die Randbedingungen homogenisiert durch

$$v(x,y,t) = u(x,y,t) - \frac{a-x}{a}\left(1-e^{-\gamma t}\right) \qquad u(x,y,t) = v(x,y,t) + \frac{a-x}{a}\left(1-e^{-\gamma t}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \partial_t u = \partial_t\left(v + \frac{a-x}{a}\left(1-e^{-\gamma t}\right)\right) = \partial_t v + \gamma\frac{a-x}{a}e^{-\gamma t} \quad \text{und} \quad \Delta u = \Delta v$$

Das Problem lautet damit

$$\partial_t v = D\Delta v - \gamma\frac{a-x}{a}e^{-\gamma t} \quad \text{in } [0,a]\times[0,b]$$
$$v = 0 \quad \text{auf } \Gamma_0,\, \Gamma_2, \qquad \frac{\partial v}{\partial n} = 0 \quad \text{auf } \Gamma_1,$$
$$v(x,y,0) = u(x,y,0) - \frac{a-x}{a}\left(1-e^{-\gamma 0}\right) = 0$$

Für die Eigenfunktionen wird

$$\Delta\phi + \lambda\phi = 0 \quad \text{in } [0,a]\times[0,b]$$
$$\phi = 0 \quad \text{auf } \Gamma_0, \Gamma_2, \qquad \frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \quad \text{auf } \Gamma_1$$

mit dem Ansatz $\phi(x,y) = X(x)Y(y)$ gelöst, wobei aus den Randbedingungen folgt

$$X(0) = X(a) = 0 \quad \text{und} \quad Y'(0) = Y'(b) = 0.$$

Inklusive Normierung ergibt sich für $k = 1, 2, \ldots$, $l = 0, 1, \ldots$

$$\phi_{k,l}(x,y) = \frac{2}{\sqrt{ab}}\sin\left(\frac{k\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{l\pi}{b}y\right), \quad \lambda_{k,l} = \left(\frac{k\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{l\pi}{b}\right)^2.$$

Den Kern wird:

$$K(x,y,\xi,\eta,t) = \sum_{k,l=1}^{\infty}\phi_{k,l}(x,y)\,\phi_{k,l}(\xi,\eta)\,e^{-D\lambda_{kl}t} =$$
$$= \frac{4}{ab}\sum_{k,l=1}^{\infty}\sin\left(\frac{\pi k}{a}x\right)\cos\left(\frac{\pi l}{b}y\right)\sin\left(\frac{\pi k}{a}\xi\right)\cos\left(\frac{\pi l}{b}\eta\right)e^{-D\lambda_{kl}t}$$

Bitte wenden!

Die Lösung für v ist:

$$v(x,y,t) = \underbrace{\int_\Omega \underbrace{v_0(\xi,\eta)}_{=0} K(x,y,\xi,\eta,t)\, d\xi d\eta}_{=0} + \int_0^t \int_\Omega q(\xi,\eta,\tau) K(x,y,\xi,\eta,t-\tau)\, d\xi d\eta d\tau =$$

$$= \frac{4}{ab} \int_0^t \int_0^a \int_0^b -\gamma \frac{a-\xi}{a} e^{-\gamma\tau} \sum_{k,l=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi k}{a}x\right) \cos\left(\frac{\pi l}{b}y\right) \sin\left(\frac{\pi k}{a}\xi\right) \cos\left(\frac{\pi l}{b}\eta\right) e^{-D\lambda_{kl}(t-\tau)} d\eta d\xi d\tau =$$

$$= \frac{-4\gamma}{ab} \sum_{k,l=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi k}{a}x\right) \cos\left(\frac{\pi l}{b}y\right) e^{-D\lambda_{kl}t} \int_0^t e^{(D\lambda_{kl}-\gamma)\tau} d\tau \int_0^a \frac{a-\xi}{a} \sin\left(\frac{\pi k}{a}\xi\right) d\xi \int_0^b \cos\left(\frac{\pi l}{b}\eta\right) d\eta$$

wobei für die Integrale gilt

$$\begin{aligned}
\int_0^a \frac{a-\xi}{a} \sin\left(\frac{k\pi}{a}\xi\right) d\xi &= \frac{-a}{k\pi} \\
\int_0^b \cos\left(\frac{l\pi}{b}\eta\right) d\eta &= \begin{cases} b & l = 0 \\ 0 & l > 0 \end{cases} \\
\int_0^t e^{(D\lambda_{kl}-\gamma)\tau} d\tau &= \frac{e^{(D\lambda_{kl}-\gamma)t} - 1}{D\lambda_{kl} - \gamma}
\end{aligned}$$

Damit

$$\begin{aligned}
\Rightarrow v(x,y,t) &= \frac{4\gamma}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{k\pi}{a}x\right) e^{-D\lambda_{k0}t} \left(e^{(D\lambda_{k0}-\gamma)t} - 1\right)}{k(D\lambda_{k0} - \gamma)} = \\
&= \frac{4\gamma}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{k\pi}{a}x\right) \left(e^{-\gamma t} - e^{-D\left(\frac{\pi k}{a}\right)^2 t}\right)}{k\left(D\left(\frac{\pi k}{a}\right)^2 - \gamma\right)}
\end{aligned}$$

Insgesamt lautet die Lösung

$$\begin{aligned}
u(x,y,t) &= v(x,y,t) + \frac{a-x}{a}\left(1 - e^{-\gamma t}\right) = \\
&= \frac{a-x}{a}\left(1 - e^{-\gamma t}\right) + \frac{4\gamma}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{k\pi}{a}x\right) \left(e^{-\gamma t} - e^{-D\left(\frac{\pi k}{a}\right)^2 t}\right)}{k\left(D\left(\frac{\pi k}{a}\right)^2 - \gamma\right)}
\end{aligned}$$

und der Grenzwert

$$\lim_{t\to\infty} u(x,y,t) = \frac{a-x}{a} u(x,t) = \Re\left(w(x) e^{-\imath\omega t}\right)$$

2. Mit $\cos(\omega t) = \Re\left(e^{-\imath\omega t}\right)$ und die Ansatz $u(x,t) = \Re\left(w(x) e^{-\imath\omega t}\right)$ die Differential gleichung wird:

$$\begin{aligned}
\Re\left(\imath\omega\, w(x)\, e^{-\imath\omega t}\right) &= \nu \Re\left(w''(x)\, e^{-\imath\omega t}\right) + \delta \Re\left(e^{-\imath\omega t}\right) \\
\Re\left(w'(x)\, e^{-\imath\omega t}\right) &= \Re\left(w(L)\, e^{-\imath\omega t}\right) = 0
\end{aligned}$$

Siehe nächstes Blatt!

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} w''(x) - \frac{\imath\omega}{\nu} w(x) &= -\frac{\delta}{\nu} \\ w'(0) = w(L) &= 0 \end{aligned}$$

Die Allgemeine Lösung dieses Problems ist:

$$w(x) = C_1 e^{ax} + C_2 e^{-ax} - \frac{\delta}{\imath\omega}$$

wo $a = \sqrt{\frac{\imath\omega}{\nu}} = \sqrt{\frac{\omega}{\nu}}\sqrt{i} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+\imath) = \sqrt{\frac{\omega}{\nu}} = \gamma(1+\imath)$ mit $\gamma = \sqrt{\frac{\omega}{\nu}}$

$$\Rightarrow w(x) = C_1 e^{\gamma(1+\imath)x} + C_2 e^{-\gamma(1+\imath)x} - \frac{\delta}{\imath\omega}$$

Aus $w'(0) = 0$ folgt $C_1 = C_2$ also

$$\Rightarrow w(x) = C \cosh(\gamma(1+\imath)x) - \frac{\delta}{\imath\omega}$$

und aus $w(L) = 0$ folgt $C = -\frac{\delta}{\cosh(\gamma(1+\imath)x) - \frac{\delta}{\imath\omega}}$.

$$\Rightarrow w(x) = \frac{\imath\delta}{\omega}\left(\frac{\cosh(\gamma(1+\imath)x)}{\cosh(\gamma(1+\imath)L)} - 1\right)$$

Mit

$$\begin{aligned} \cosh(\gamma x + \imath\gamma x) &= \cosh(\gamma x)\cosh(\imath\gamma x) + \sinh(\gamma x)\sinh(\imath\gamma x) = \\ &= \underbrace{\cosh(\gamma x)\cos(\gamma x)}_{\alpha(x)} + \imath\underbrace{\sinh(\gamma x)\sin(\gamma x)}_{\beta(x)} \end{aligned}$$

Die Lösung für v ist

$$\begin{aligned} w(x) &= \frac{\imath\delta}{\omega}\left(\frac{\alpha(x) + \imath\beta(x)}{\alpha(L) + \imath\beta(L)} - 1\right) = \\ &= \frac{\imath\delta}{\omega}\left(\frac{(\alpha(x) + \imath\beta(x))(\alpha(L) - \imath\beta(L)) - \alpha^2(L) - \beta^2(L)}{\alpha^2(L) + \beta^2(L)}\right) = \\ &= -\frac{\delta}{\omega}\frac{\alpha(L)\beta(x) - \alpha(x)\beta(L)}{\alpha^2(L) + \beta^2(L)} + \imath\frac{\delta}{\omega}\left(\frac{\alpha(L)\alpha(x) - \beta(x)\beta(L)}{\alpha^2(L) + \beta^2(L)} - 1\right) \end{aligned}$$

Und u wird

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \Re\left(w(x)e^{-\imath\omega t}\right) = \\ &= \frac{\delta}{\omega}\left(\left(\frac{\alpha(L)\alpha(x) - \beta(x)\beta(L)}{\alpha^2(L) + \beta^2(L)} - 1\right)\sin(\omega t) - \frac{\alpha(L)\beta(x) - \alpha(x)\beta(L)}{\alpha^2(L) + \beta^2(L)}\cos(\omega t)\right) \end{aligned}$$

Bitte wenden!

3. Wir lösen das Problem im unendlichen Intervall. Damit wir $u(0,t)=0$ erfüllen können spiegeln wir u_0 am Ursprung und erhalten damit für den Anfangswert auf dem unendlichen Intervall

$$\hat{u}(x) \quad = \quad \begin{cases} -2 & -3 < x < -2 \\ -1 & -2 < x < 0 \\ 1 & 0 < x < 2 \\ 2 & 2 < x < 3 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad .$$

In die Vorlesung wurde den Problem betrachtet:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad \text{in } (-\infty,\infty)$$
$$u(x,0) = \theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x < 0 \\ 0 & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

Die Lösung lautet:

$$u\left(x,t\right) = \frac{1}{2}\text{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{4Dt}}\right)$$

wo

$$\text{erfc}\left(a\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_a^\infty e^{-x^2}dx$$

Die Anfangsfunktion dieser Aufgabe kann durch die Anfangsfunktion der Standardbeispiel der Vorlesung dargestellt werden:

$$\hat{u}(x) = 2\theta(x+3) + \theta(-(x+2)) + 2\theta(-x) + \theta(-(x-2)) + 2\theta(x-3) - 4$$

Da die Differentialgleichung linear ist, ergibt sich die Lösung für die Anfangsbedingung $\hat{u}$ als Summe der Lösungen mit Termen der obigen Darstellung als Anfangbediengnung.
Die verschiedenen Teillösung können mit Hilfe der Verschiebung/Spiegelung der Standardlösung konstruiert werden. Z.B.

$$\frac{\partial v}{\partial t} = D\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \qquad \text{in } (-\infty,\infty)$$
$$v(x,0) = 2\theta((x+3))$$

$$\Rightarrow v(x,t) = \text{erfc}\left(\frac{x+3}{\sqrt{4Dt}}\right)$$

Für die gesamte Lösung erhält man:

$$\begin{aligned} u(x,t) =& \text{erfc}\left(\frac{x+3}{\sqrt{4Dt}}\right) + \frac{1}{2}\text{erfc}\left(\frac{-(x+2)}{\sqrt{4Dt}}\right) + \text{erfc}\left(\frac{-x}{\sqrt{4Dt}}\right) \\ &+ \frac{1}{2}\text{erfc}\left(\frac{-(x-2)}{\sqrt{4Dt}}\right) + \text{erfc}\left(\frac{x-3}{\sqrt{4Dt}}\right) - 4 \end{aligned}$$

Siehe nächstes Blatt!

mit $\operatorname{erfc}(x) = 2 - \operatorname{erf}(x)$ und $\operatorname{erfc}(-x) = 2 - \operatorname{erfc}(x) = 2 - (1 - \operatorname{erf}(x)) = 1 + \operatorname{erf}(x)$ erhält man

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow u(x,t) =& 1 - \operatorname{erf}\left(\frac{x+3}{\sqrt{4Dt}}\right) + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{erf}\left(\frac{x+2}{\sqrt{4Dt}}\right) + 1 + \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{4Dt}}\right) \\
& + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{erf}\left(\frac{x-2}{\sqrt{4Dt}}\right) + 1 - \operatorname{erf}\left(\frac{x-3}{\sqrt{4Dt}}\right) - 4 = \\
=& \frac{1}{2}\left(-2\operatorname{erf}\left(\frac{x+3}{\sqrt{4Dt}}\right) + \operatorname{erf}\left(\frac{x+2}{\sqrt{4Dt}}\right) + 2\operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{4Dt}}\right)\right. \\
& \left. + \operatorname{erf}\left(\frac{x-2}{\sqrt{4Dt}}\right) - 2\operatorname{erf}\left(\frac{x-3}{\sqrt{4Dt}}\right)\right)
\end{aligned}
$$