

Lösung Serie 13

1. Für die Lösung der Wellengleichung im unendlichen Intervall gilt

$$u(x, t) = \frac{1}{2} (u_0(x + ct) + u_0(x - ct)) + \frac{1}{2c} (v(x + ct) - v(x - ct))$$

$$\text{mit } v(s) := \int_0^s \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) dx \text{ und } c = 1.$$

Mit den Integralen

$$\int_0^s (1 - x) dx = s - \frac{s^2}{2}$$

ergibt sich für $v(s)$

$$v(s) = \begin{cases} 0, & s < 0 \\ s - \frac{s^2}{2}, & 0 \leq s < 1 \\ \frac{1}{2}, & 1 \leq s \end{cases}$$

und für die Lösung

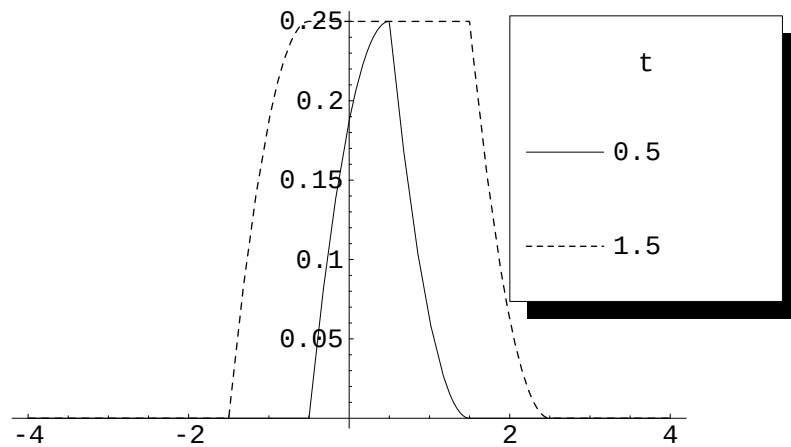
$$u(x, t) = \frac{1}{2} (v(x + t) - v(x - t)).$$

Damit bekommen wir

$$\begin{aligned} & u\left(x, \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2} \begin{cases} 0 - 0 = 0, & x < -\frac{1}{2} \\ \left((x + \frac{1}{2}) - \frac{(x + \frac{1}{2})^2}{2} - 0\right) = \frac{3 - 4x - 4x^2}{8}, & -\frac{1}{2} \leq x < \frac{1}{2} \\ \left(\frac{1}{2} - \left((x - \frac{1}{2}) - \frac{(x - \frac{1}{2})^2}{2}\right)\right) = \frac{9 - 12x + 4x^2}{8}, & \frac{1}{2} \leq x < \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0, & \frac{3}{2} \leq x \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & u\left(x, \frac{3}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2} \begin{cases} 0 - 0 = 0, & x < -\frac{3}{2} \\ \left((x + \frac{3}{2}) - \frac{(x + \frac{3}{2})^2}{2} - 0\right) = \frac{3 - 4x - 4x^2}{8}, & -\frac{3}{2} \leq x < -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}, & -\frac{1}{2} \leq x < \frac{1}{2} \\ \left(\frac{1}{2} - \left((x - \frac{3}{2}) - \frac{(x - \frac{3}{2})^2}{2}\right)\right) = \frac{25 - 20x + 4x^2}{8}, & \frac{1}{2} \leq x < \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0, & \frac{5}{2} \leq x \end{cases} \end{aligned}$$

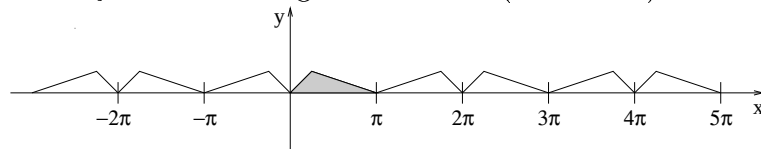
Bitte wenden!



2. Wir schreiben das Problem um, sodass wir die Lösungsformel für das unbeschränkte Gebiet anwenden können. Das neue Problem lautet:

$$\begin{aligned}\partial_{tt}u &= 4\partial_{xx}u, \quad x \in (-\infty, \infty), \quad t > 0 \\ u(x, 0) &= \tilde{u}_0(x) \\ \partial_t u(x, 0) &= 0\end{aligned}$$

wobei $\tilde{u}_0$ auf $[0, \pi]$ mit u_0 übereinstimmt und ausserhalb des Intervalls so fortgesetzt wird, dass $\tilde{u}_0$ symmetrisch bzgl. 0 und π ist (siehe Bild).



Dadurch wird $\partial_x u(0, t) = \partial_x u(\pi, t) = 0$ erfüllt.

Dann gilt:

$$\begin{aligned}u(x, t) &= \frac{1}{2}(\tilde{u}_0(x + ct) + \tilde{u}_0(x - ct)) + \frac{1}{2c}(v(x + ct) - v(x - ct)) \\ \text{mit } v(s) &:= \int_0^s \partial_t u(x, 0) dx\end{aligned}$$

In dieser Aufgabe ist $c = 2$ und $\partial_t u(x, 0) = 0$. Damit ergibt sich für die Lösung

$$u(x, t) = \frac{1}{2}(\tilde{u}_0(x + 2t) + \tilde{u}_0(x - 2t))$$

In der Figur ist $u(x, t)$ für $x \in [0, \pi]$ skizziert zu den Zeiten: $0, \frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{8}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{8}, \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{8}, \pi$

Siehe nächstes Blatt!

