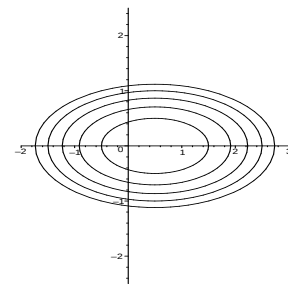
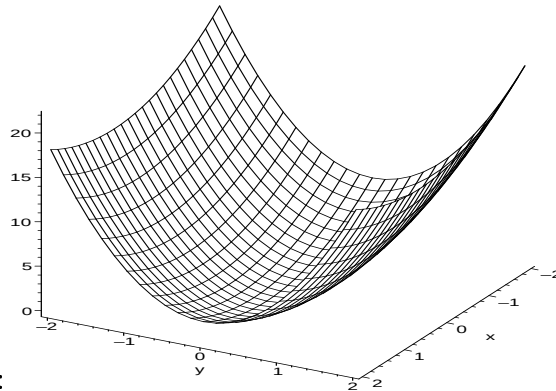


Lösung Serie 1

1. Gegebene Fläche:

$$z = x^2 - x + 4y^2 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 4y^2 - \frac{1}{4}$$



a) Plots:

b) Höhenlinien:

Da $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$ und $4y^2 \geq 0$ dann

$$z = c = \text{const} > -\frac{1}{4} :$$

Definiere $\tilde{c} = \sqrt{c + 1/4}$

$$\Rightarrow \tilde{c}^2 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 4y^2$$

$$\Rightarrow \frac{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2}{\tilde{c}^2} + \frac{y^2}{(\tilde{c}/2)^2} = 1$$

Die Niveaulinien sind Ellipsen mit Brennpunkten $(c\sqrt{3/4} + 1/2, 0)$, $(-c\sqrt{3/4} + 1/2, 0)$ und Halbachsen $\tilde{c}$, $\tilde{c}/2$.

Bitte wenden!

c) Parametrisierung der Fläche:

$$\begin{aligned}\underline{r}(x, y) &= (x, y, z(x, y))^{\top} \\ \text{Normale } \underline{n}(x, y) &= \underline{r}_x \times \underline{r}_y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ z_x \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ z_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z_x \\ -z_y \\ 1 \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow \underline{n}(x, y) = (-2x + 1, -8y, 1)^{\top}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Punkt } P &= (1, 2, z(1, 2))^{\top} = (1, 2, 16)^{\top} \\ \underline{n}(1, 2) &= (-1, -16, 1)^{\top}\end{aligned}$$

Gerade durch P in Richtung $\underline{n}$ ist gegeben durch $(1, 2, 16)^{\top} + t(-1, -16, 1)^{\top}$,
 (x, y) -Ebene ist gegeben durch $(x, y, 0)^{\top}$, damit muss gelten:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 16 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ -16 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow t = -16 &\Rightarrow x = 17, y = 258\end{aligned}$$

d) Differentialgleichung der Falllinien:

$$y'(x) = \frac{z_y(x, y)}{z_x(x, y)} = \frac{8y(x)}{2x - 1} = \frac{dy}{dx}$$

Trennung der Veränderlichen liefert $\frac{dx}{2x-1} = \frac{dy}{8y}$. Integration auf beiden Seiten ergibt:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \ln(2x - 1) &= \frac{1}{8} \ln(y) + c \Rightarrow \ln(2x - 1)^{1/2} = \ln(y)^{1/8} + c \\ \Rightarrow (2x - 1)^{1/2} &= y^{1/8} \hat{c}^{-1} \Rightarrow (2x - 1)^4 = \hat{c}^{-1} y \\ \Rightarrow y &= \hat{c}(2x - 1)^4\end{aligned}$$

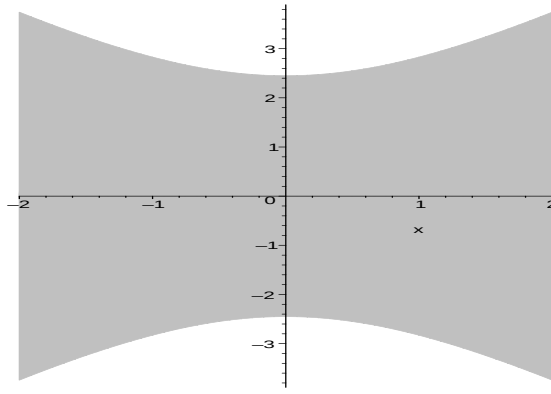
2. Gegebene Fläche: $z = \sqrt{2x^2 - y^2 + 6}$

a) Die Fläche ist für $2x^2 - y^2 + 6 \geq 0$ definiert.

$$2x^2 - y^2 = -6 \Rightarrow \frac{y^2}{(\sqrt{6})^2} - \frac{x^2}{(\sqrt{3})^2} = 1$$

Die Fläche ist "innerhalb" der Hyperbel mit Brennpunkten $(0, 3)$, $(0, -3)$ und Schnittpunkt mit der y-Achse in Punkt $(0, \pm\sqrt{6})$ definiert.

Siehe nächstes Blatt!



- b) Die Tangentialebene ist gegeben durch $\underline{n} \cdot (x, y, z)^\top = d$ mit dem Normalenvektor $\underline{n} = (-z_x, -z_y, 1)^\top$.

$$z_x = \frac{2x}{\sqrt{2x^2 - y^2 + 6}} = \frac{2x}{z} \quad z_y = \frac{-y}{\sqrt{2x^2 - y^2 + 6}} = -\frac{y}{z}$$

$$\underline{n}(x, y) = \left(-\frac{2x}{z}, \frac{y}{z}, 1 \right)^\top$$

$$P = (2, 2, z(2, 2))^\top = (2, 2, \sqrt{10})^\top$$

$$\underline{n}(2, 2) = \left(-\frac{4}{\sqrt{10}}, \frac{2}{\sqrt{10}}, 1 \right)^\top = \frac{1}{\sqrt{10}} (-4, 2, \sqrt{10})^\top$$

Da $P \in E$ gilt

$$d = \underline{n} \cdot P = \frac{1}{\sqrt{10}} (-8 + 4 + 10) = \frac{6}{\sqrt{10}}$$

$$\Rightarrow E : \frac{1}{\sqrt{10}} (-4x + 2y + \sqrt{10}z) = \frac{6}{\sqrt{10}} \Rightarrow -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y + \frac{\sqrt{10}}{6}z = 1$$

(x, y) -Ebene hat $z = 0$, also

$$-\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y = 1 \Rightarrow y(x) = 2x + 3$$

- c) Differentialgleichung der Falllinien:

$$y'(x) = \frac{z_y(x, y)}{z_x(x, y)} = -\frac{y(x)}{2x} = \frac{dy}{dx}$$

Trennung der Veränderlichen liefert $-\frac{dx}{2x} = \frac{dy}{y}$. Integration auf beiden Seiten ergibt:

$$\ln(y) = -\frac{1}{2} \ln(x) + c = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) + c \Rightarrow y = \frac{\tilde{c}}{\sqrt{x}}$$

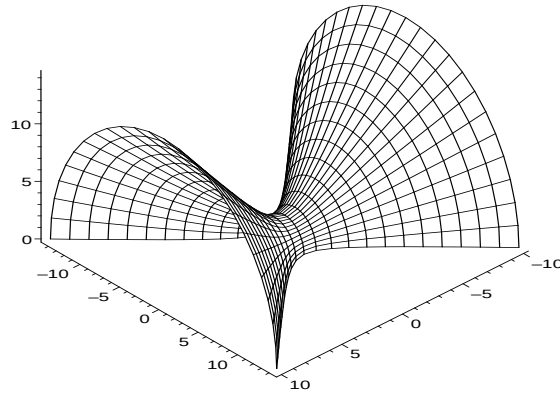
Bitte wenden!

Falllinie geht durch $P = (2, 2, z(2, 2))^T \Rightarrow 2 = \tilde{c}/\sqrt{2} \Rightarrow \tilde{c} = 2\sqrt{2}$. Falllinie durch P ist gegeben durch $y(x) = 2\sqrt{2/x}$.
 Schnittpunkt mit (x, y) -Ebene bei $z = 0$.

$$\begin{aligned}\sqrt{2x^2 - y(x)^2 + 6} &= \sqrt{2x^2 - 8/x + 6} = 0 \\ \Rightarrow 2x^3 + 6x - 8 &= 0 \Rightarrow (x - 1)(x^2 + x + 4) = 0\end{aligned}$$

$x^2 + x + 4$ hat nur komplexe Nullstelle ($(-1 \pm i\sqrt{15})/2$), d.h. die einzige reelle Lösung ist $x = 1$. $\Rightarrow$ Schnittpunkt mit (x, y) -Ebene ist

$$(1, 2\sqrt{2})$$



d) Plot: