Lösung Serie 2

1. Kurve $y(x)$ implizit gegeben durch

$$f(x,y) = xye^{x+y} = 5$$

Da f konstant ist, ist die totale Ableitung null:

$$\frac{df}{dx} = 0 \;\Rightarrow\; f_x + f_y\, y'(x) = 0$$

Also

$$y' = -\frac{f_x(x,y)}{f_y(x,y)}$$

Hier:

$$f_x(x,y) = (x+1)ye^{x+y}$$
$$f_y(x,y) = x(1+y)e^{x+y}$$

$$y'(x) = -\frac{(x+1)y}{x(1+y)}$$

An der Stelle $x = 1$

$$y'(1) = -\frac{2y(1)}{1+y(1)}$$

Es bleibt $y(1)$ zu berechnen. $y(1)$ erfüllt die Gleichung

$$ye^{y+1} = 5$$

Die Lösung erfolgt numerisch durch (z.B.) Newtonverfahren.

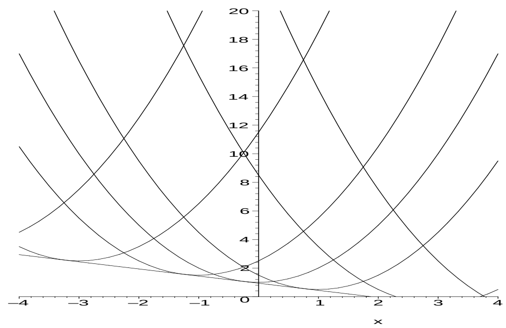
$$F(y) = ye^{1+y} - 5 = 0 \quad \text{mit Startwert } y_0 = 1$$

$y_0 = 2; \quad y_1 = 1; \quad i = 0;$
while $|y_0 - y_1| > 10^{-3}$
  $y_0 = y_1;$
  $y_1 = y_0 - \frac{F(y_0)}{F'(y_0)};$
  $i = i + 1;$
end

Bitte wenden!

Nach 4 Iterationen bricht das Verfahren ab und liefert $y_1 = 0.8146$.

$$y'(1) \approx -\frac{2 \cdot 0.8146}{1 + \cdot 0.8146} \approx -0.8978$$



2. Parabelschar

$$y(x,p) = (x-p)^2 - \frac{p}{2} + 1$$

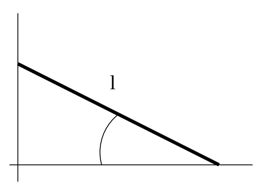
Enveloppe

$$\frac{\partial y}{\partial p} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -2(x-p) - \frac{1}{2} = 0$$

$$\Rightarrow \quad p = x + \frac{1}{4}$$

Einsetzen

$$y_E(x, p(x)) = \left(x - x - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{4}\right) + 1 = \frac{15}{16} - \frac{1}{2}x$$



3. Parametrisiere die Kurvenschar mit dem Winkel

$$y = mx + q = -\tan(\phi)x + l\sin(\phi) = y(x,\phi)$$

Enveloppe

$$\frac{\partial y}{\partial \phi} = -\frac{x}{\cos^2(\phi)} + l\cos(\phi) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x}{l} = \cos^3(\phi) \quad \Leftrightarrow \quad x = l\cos^3(\phi)$$

Siehe nächstes Blatt!

Einsetzen

$$\begin{aligned} y &= -\frac{\sin(\phi)}{\cos(\phi)}x + l\sin(\phi) = \sin(\phi)\left(-\frac{x}{\cos(\phi)} + l\right) \\ &= \sqrt{1-\cos^2(\phi)}\left(-\frac{x}{\cos(\phi)} + l\right) = \sqrt{1-\left(\frac{x}{l}\right)^{2/3}}\left(-\frac{x}{(x/l)^{1/3}} + l\right) \\ &= \sqrt{1-\left(\frac{x}{l}\right)^{2/3}}\left(-x^{2/3}l^{1/3} + l\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \quad \frac{y}{l} &= \sqrt{1-\left(\frac{x}{l}\right)^{2/3}}\left(-\left(\frac{x}{l}\right)^{2/3} + 1\right) \\ \Leftrightarrow \quad \frac{y}{l} &= \left(1-\left(\frac{x}{l}\right)^{2/3}\right)^{3/2} \\ \Leftrightarrow \quad 1 &= \left(\frac{y}{l}\right)^{2/3} + \left(\frac{x}{l}\right)^{2/3} \end{aligned}$$

4. Krümmung ist definiert durch

$$K = \frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}$$

Bei einer implizit durch $f(x, y(x)) = const$ gegebenen Kurve $y(x)$ gilt für die Ableitungen

$$y' = -\frac{f_x}{f_y} \qquad y'' = -\frac{f_{xx}\,f_y^2 - 2f_{xy}\,f_x\,f_y + f_{yy}\,f_x^2}{f_y^3}$$

Also

$$K = -\frac{f_{xx}\,f_y^2 - 2f_{xy}\,f_x\,f_y + f_{yy}\,f_x^2}{\left(f_x^2 + f_y^2\right)^{3/2}}$$

Gegeben ist die Hyperbel

$$f(x,y) = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$f_x = \frac{2x}{a^2} \qquad f_y = -\frac{2y}{b^2} \qquad f_{xx} = \frac{2}{a^2} \qquad f_{yy} = -\frac{2}{b^2} \qquad f_{xy} = 0$$

$$K = -\frac{\frac{2}{a^2}\left(-\frac{2y}{b^2}\right)^2 - \frac{2}{b^2}\left(\frac{2x}{a^2}\right)^2}{\left(\frac{4x^2}{a^4} + \frac{4y^2}{b^4}\right)^{3/2}} = \frac{1}{a^2b^2}\frac{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}{\left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}\right)^{3/2}}$$

Bitte wenden!

Mit

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = a^2 \left(\frac{y^2}{b^2} + 1\right)$$

ergibt sich

$$K = \frac{1}{a^2b^2} \frac{1}{\left(\left(\frac{1}{b^4} + \frac{1}{a^2b^2}\right) y^2 + \frac{1}{a^2}\right)^{3/2}}$$

a) Das Maximum wird angenommen, falls der Nenner minimal wird:

$$K \to \max \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{1}{b^4} + \frac{1}{a^2b^2}\right) y^2 + \frac{1}{a^2} \to \min$$

$$\frac{d}{dy}\left(\left(\frac{1}{b^4} + \frac{1}{a^2b^2}\right) y^2 + \frac{1}{a^2}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = 0$$

$$K_{\max} = K(y = 0) = \frac{a}{b^2}$$

b) Die Hälfte der maximalen Krümmung ist:

$$\frac{K_{\max}}{2} = \frac{a}{2b^2}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{2b^2} = \frac{1}{a^2b^2} \frac{1}{\left(\left(\frac{1}{b^4} + \frac{1}{a^2b^2}\right) y^2 + \frac{1}{a^2}\right)^{3/2}}$$

$$\Rightarrow \left(\left(\frac{1}{b^4} + \frac{1}{a^2b^2}\right) y^2 + \frac{1}{a^2}\right)^{3/2} = \frac{2}{a^3}$$

$$\Rightarrow \frac{a^2 + b^2}{b^2} y^2 = \sqrt[3]{4} - 1$$

$$\Rightarrow y = \frac{\sqrt{\sqrt[3]{4} - 1 b^2}}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

mit $x^2 = a^2 \left(\frac{y^2}{b^2} + 1\right)$:

$$x^2 = a^2 \left(\frac{\left(\sqrt[3]{4} - 1\right) b^2}{a^2 + b^2} + 1\right)$$

$$\Rightarrow x = \pm\frac{\sqrt{\sqrt[3]{4} b^2 + a^2} a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Die Hälfte der maximalen Krümmung wird in den Punkten $\pm\left(\frac{\sqrt{\sqrt[3]{4}b^2 + a^2} a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \pm\frac{\sqrt{\sqrt[3]{4} - 1 b^2}}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$ angenommen.