

Lösung Serie 3

1. Wir haben

$$\begin{aligned}x &= r \cos(\phi) & y &= r \sin(\phi) \\r &= \sqrt{x^2 + y^2} & \phi &= \arctan\left(\frac{y}{x}\right).\end{aligned}$$

Nach Vorlesung gilt für die partielle Ableitung von f nach x, y :

$$\begin{aligned}f_x &= \frac{\partial f}{\partial r} \cos(\phi) - \frac{\partial f}{\partial \phi} \frac{\sin(\phi)}{r} \\f_y &= \frac{\partial f}{\partial r} \sin(\phi) + \frac{\partial f}{\partial \phi} \frac{\cos(\phi)}{r}\end{aligned}$$

Einsetzen liefert

$$\begin{aligned}\nabla f \cdot \nabla f &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \\&= \left(\frac{\partial f}{\partial r} \cos(\phi) - \frac{\partial f}{\partial \phi} \frac{\sin(\phi)}{r}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial r} \sin(\phi) + \frac{\partial f}{\partial \phi} \frac{\cos(\phi)}{r}\right)^2 \\&= \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)^2 \cos^2(\phi) - 2 \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial f}{\partial \phi} \frac{\cos(\phi) \sin(\phi)}{r} + \left(\frac{\partial f}{\partial \phi}\right)^2 \frac{\sin^2(\phi)}{r^2} \\&\quad + \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)^2 \sin^2(\phi) + 2 \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial f}{\partial \phi} \frac{\sin(\phi) \cos(\phi)}{r} + \left(\frac{\partial f}{\partial \phi}\right)^2 \frac{\cos^2(\phi)}{r^2} \\&= \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial f}{\partial \phi}\right)^2\end{aligned}$$

2. Koordinaten auf der Ellipse x_1, y_1 , auf der Geraden x_2, y_2 . Abstand ist gegeben durch

$$f(x_1, x_2, y_1, y_2) = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 \rightarrow \min$$

Nebenbedingungen

$$g_1(x_1, y_1) = \left(\frac{x_1}{a}\right)^2 + \left(\frac{y_1}{b}\right)^2 = 1 \quad g_2(x_2, y_2) = \frac{x_2}{p} + \frac{y_2}{q} = 1$$

Bitte wenden!

Lagrangefunktion

$$F(x_1, x_2, y_1, y_2, \lambda, \mu) = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 - \lambda \left(\left(\frac{x_1}{a} \right)^2 + \left(\frac{y_1}{b} \right)^2 - 1 \right) - \mu \left(\frac{x_2}{p} + \frac{y_2}{q} - 1 \right)$$

Ableiten

$$\begin{aligned} F_{x_1} &= 2(x_1 - x_2) - 2\frac{\lambda x_1}{a^2} = 0 & F_{\lambda} &= \left(\frac{x_1}{a} \right)^2 + \left(\frac{y_1}{b} \right)^2 - 1 = 0 \\ F_{x_2} &= -2(x_1 - x_2) - \frac{\mu}{p} = 0 & F_{\mu} &= \frac{x_2}{p} + \frac{y_2}{q} - 1 = 0 \\ F_{y_1} &= 2(y_1 - y_2) - 2\frac{\lambda y_1}{b^2} = 0 \\ F_{y_2} &= -2(y_1 - y_2) - \frac{\mu}{q} = 0 \end{aligned}$$

Addition der ersten beiden und der dritten und vierten gibt

$$\begin{aligned} \frac{2x_1}{a^2}\lambda + \frac{1}{p}\mu &= 0 \\ \frac{2y_1}{b^2}\lambda + \frac{1}{q}\mu &= 0 \end{aligned}$$

Da $\lambda, \mu \neq 0$ muss

$$\frac{2x_1}{a^2 q} - \frac{2y_1}{b^2 p} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{x_1}{a} = \frac{q}{p} \frac{a}{b} \frac{y_1}{b}$$

und aus der ersten Nebenbedingung folgt

$$\left(\frac{q}{p} \frac{a}{b} \frac{y_1}{b} \right)^2 + \left(\frac{y_1}{b} \right)^2 = 1 \quad \text{und} \quad y_1 = b \sqrt{\left(\frac{a}{p} \frac{q}{b} \right)^2 + 1}^{-1}$$

Die Koordinaten x_1 und y_1 sind damit bekannt. Für x_2, y_2 ergibt sich mit

$$\begin{aligned} -2(x_1 - x_2) - \frac{\mu}{p} &= 0 \\ -2(y_1 - y_2) - \frac{\mu}{q} &= 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad p(x_1 - x_2) = q(y_1 - y_2)$$

und der zweiten Nebenbedingung

$$x_2 = p - \frac{p}{q} y_2$$

$$\begin{aligned} x_1 - p + \frac{p}{q} y_2 &= \frac{q}{p} (y_1 - y_2) \\ y_2 &= \frac{p q}{p^2 + q^2} \left(p + \frac{q}{p} y_1 - x_1 \right) \end{aligned}$$

Siehe nächstes Blatt!

3. Volumen V und Oberfläche A des Zylinder (A_0 gegeben)

$$V(r, h) = \pi r^2 h \quad A(r, h) = 2\pi r^2 + 2\pi r h = A_0$$

Lagrangefunktion

$$F(r, h, \lambda) = V(r, h) - \lambda(A(r, h) - A_0)$$

Ableiten und null setzen

$$F_r = V_r - \lambda A_r = 0$$

$$F_h = V_h - \lambda A_h = 0$$

$$F_\lambda = A(r, h) - A_0 = 0$$

Mit der partielle Ableitungen:

$$V_r = 2\pi r h \quad A_r = 4\pi r + 2\pi h$$

$$V_h = \pi r^2 \quad A_h = 2\pi r$$

Es folgt

$$\begin{cases} rh - \lambda(2r + h) = 0 \\ r^2 - 2\lambda r = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{r}{2} \\ r^2 + rh = \frac{A_0}{2\pi} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} rh - \frac{r}{2}(2r + h) = 0 \Rightarrow h = 2r \\ r^2 + rh = \frac{A_0}{2\pi} \end{cases}$$

Der Zylinder mit dem maximalen Volumen hat: $r = \sqrt{\frac{A_0}{6\pi}}$ und $h = \sqrt{\frac{2A_0}{3\pi}}$.