Lösung Serie 4

1. Die Masse ist das Integral von der Dichte über das ganze Volumen. In Kugelkordinaten ergibt sich:

$$\begin{aligned}
M &= \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \varrho(r)\, r^2 \sin(\theta)\, d\phi d\theta dr \\
&= \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left(r^2 + \frac{r^4}{R^2}\right) \sin(\theta)\, d\phi d\theta dr = \\
&= 2\pi \int_0^R \int_0^\pi \left(r^2 + \frac{r^4}{R^2}\right) \sin(\theta)\, d\theta dr \\
&= 4\pi \int_0^R \left(r^2 + \frac{r^4}{R^2}\right) dr \\
&= 4\pi \left(\frac{r^3}{3} + \frac{r^5}{5R^2}\right)\Bigg|_0^R = \\
&= \frac{32}{15}\pi R^3
\end{aligned}$$

Das Trägheitsmoment bezüglich der z-Achse erhalt man durch integration von $\varrho(x,y,z)\,(x^2+y^2)$ über das ganze Volumen. In Kugelkoordinaten gilt $x^2+y^2 = r^2\sin^2(\theta)$. Daraus ergibt sich:

$$\begin{aligned}
I_z &= \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \varrho(r)\, r^2 \sin^2(\theta)\, r^2 \sin(\theta)\, d\phi d\theta dr \\
&= \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left(r^4 + \frac{r^6}{R^2}\right) \sin^3(\theta)\, d\phi d\theta dr = \\
&= 2\pi \int_0^R \int_0^\pi \left(r^4 + \frac{r^6}{R^2}\right) \sin^3(\theta)\, d\theta dr = \\
&= \frac{8}{3}\pi \int_0^R \left(r^4 + \frac{r^6}{R^2}\right) dr = \\
&= \frac{32}{35}\pi R^5 = \frac{15}{35}\frac{32}{15}\pi R^3 R^2 = \frac{3}{7} M R^2
\end{aligned}$$

2. Das Volumen erhält man durch integration von $f(x, y) = 1 - x^2$ über die Oberfläche A, die durch die Ellipse $x^2 + 4y^2 = 1$ begrenzt ist.

$$\iint_A f(x, y)\, dxdy$$

Mit Koordinatenwechsel $(x, y) \to (s, \phi)$

$$\begin{aligned} x &= s\cos(\phi) \\ y &= \frac{s}{2}\sin(\phi) \end{aligned}$$

die Ellipse ist durch die Gleichung $s = 1$ gegeben. Die Funktion f ist gegeben $f(s, \phi) = 1 - s^2\cos^2(\phi)$.
Durch Berechnung der Jacobideterminante findet man: $dxdy = \frac{s}{2} ds d\phi$.
So wird das Integral:

$$\begin{aligned} \iint_A f(x, y)\, dxdy &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} f(s, \phi)\, \frac{s}{2} ds d\phi = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left(s - s^3\cos^2(\phi)\right) ds d\phi = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left(2\pi s - \pi s^3\right) ds = \\ &= \frac{\pi}{2} \left(s^2 - \frac{s^4}{4}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{3\pi}{8} \end{aligned}$$

3. Mit Ellipsoid-Koordinaten gilt

$$\begin{aligned} x(s, \theta, \phi) &= a\, s\, \sin(\theta)\, \cos(\phi) \\ y(s, \theta, \phi) &= b\, s\, \sin(\theta)\, \sin(\phi) \qquad \text{und } dV = a\, b\, c\, s^2\, \sin(\theta)\, d\phi\, d\theta\, ds\,. \\ z(s, \theta, \phi) &= c\, s\, \cos(\theta) \end{aligned}$$

Mit diesen Koordinaten wird die Dichte: $\varrho(s, \theta, \phi) = 1 + s\left|\sin(\theta)\cos(\phi)\right| + s\left|\cos(\theta)\right|$. Wegen die Symmetrien des Problem genugt es über ein viertel der Ellipsoid zu integriren und dann den Vierfach der Resultat zu nehmen.

Siehe nächstes Blatt!

Für die Masse ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
M &= \iiint_V \varrho\,(s,\theta,\phi)\,dV = \\
&= 4\int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1+s\sin(\theta)\cos(\phi)+s\cos(\theta))\,a\,b\,c\,s^2\,\sin(\theta)\,d\phi\,d\theta\,ds = \\
&= 4a\,b\,c\int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(s^2\sin(\theta)+s^3\sin^2(\theta)\cos(\phi)+s^3\cos(\theta)\sin(\theta)\right) d\phi\,d\theta\,ds = \\
&= 4a\,b\,c\int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(s^2\pi\sin(\theta)+2s^3\sin^2(\theta)+s^3\pi\cos(\theta)\sin(\theta)\right) d\theta\,ds = \\
&= 4a\,b\,c\int_0^1 \left(s^2\pi+2s^3\frac{\pi}{4}+s^3\pi\frac{1}{2}\right) d\theta\,ds = 4a\,b\,c\,\pi\int_0^1 \left(s^2+s^3\right) ds = \frac{7abc\pi}{3}
\end{aligned}
$$