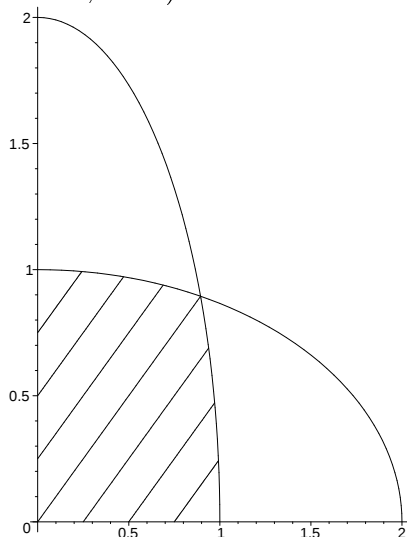


Lösung Serie 5

1. Parametrisierung der Ellipsen

$$E_1 : \begin{aligned} x(\phi_1) &= a \cos(\phi_1) \\ y(\phi_1) &= b \sin(\phi_1) \end{aligned} \quad E_2 : \begin{aligned} x(\phi_2) &= b \cos(\phi_2) \\ y(\phi_2) &= a \sin(\phi_2) \end{aligned}$$

Die gemeinsame Fläche entspricht 4 mal der schraffierten Fläche (siehe Plot mit $a = 2, b = 1$).



Der Schnittpunkt ergibt sich aus

$$\begin{aligned} a \cos(\alpha) &= b \cos(\beta) \\ b \sin(\alpha) &= a \sin(\beta) \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} a^2 \cos^2(\alpha) &= b^2 \cos^2(\beta) \\ b^2 \sin^2(\alpha) &= a^2 \sin^2(\beta) \end{aligned}$$

Von der zweiten Gleichung finden wir: $\sin^2(\alpha) = \frac{a^2}{b^2} \sin^2(\beta)$

Durch Substitution in die erste Gleichung finden wir:

$$\begin{aligned} a^2 (1 - \sin^2(\alpha)) &= b^2 \cos^2(\beta) \\ a^2 \left(1 - \frac{a^2}{b^2} \sin^2(\beta) \right) &= b^2 \cos^2(\beta) \\ a^2 (b^2 - a^2 (1 - \cos^2(\beta))) &= b^4 \cos^2(\beta) \\ a^2 (b^2 - a^2) &= \underbrace{(b^4 - a^4)}_{(b^2 - a^2)(b^2 + a^2)} \cos^2(\beta) \\ \cos(\beta) &= \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{aligned}$$

Bitte wenden!

und mit $a \cos(\alpha) = b \cos(\beta)$ findet man:

$$\cos(\alpha) = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}\alpha &= \arccos\left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right) \\ \beta &= \arccos\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)\end{aligned}$$

Für die Fläche gilt mit Ellipsenkoordinaten $dA = a b s ds d\phi$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit $a \geq b$, findet man:

$$\begin{aligned}A &= 4(A_1 + A_2) = 4 \left(\int_0^1 \int_0^\beta a b s d\phi_2 ds + \int_0^1 \int_\alpha^{\frac{\pi}{2}} a b s d\phi_1 ds \right) \\ &= 4 a b \left(\int_0^1 s \beta ds + \int_0^1 s \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) ds \right) \\ &= 4 a b \int_0^1 s \left(\beta + \frac{\pi}{2} - \alpha \right) ds = 2 a b \left(\beta + \frac{\pi}{2} - \alpha \right) = a b (2 (\beta - \alpha) + \pi)\end{aligned}$$

2. Der Kreiskegel ist gegeben durch

$$K : (x^2 + y^2 \leq \left(\frac{z}{H}\right)^2 R^2, \quad 0 \leq z \leq H.$$

Die Rotationsachse ist die x -Achse und für das Trägheitsmoment gilt:

$$J = \iiint_K (z^2 + y^2) dV$$

Die Öffnungswinkel α des Kegels wird gegeben durch die Bedingung:

$$\tan(\alpha) = \frac{R}{H}$$

In Kugelkoordinaten wird der Kegel durch diese Gleichungen gegeben:

$$\begin{cases} 0 \leq \phi \leq 2\pi \\ 0 \leq \theta \leq \alpha \\ 0 \leq r \cos(\theta) \leq H \Rightarrow 0 \leq r \leq \frac{H}{\cos(\theta)} \end{cases}$$

Siehe nächstes Blatt!

Mit dem Volumenelement für Kugelkoordinaten $dV = r^2 \sin \theta dr d\phi d\theta$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
 J &= \iiint_K (z^2 + y^2) dV = \\
 &= \int_0^\alpha \int_0^{H/\cos(\theta)} \int_0^{2\pi} (r^2 \cos^2(\theta) + r^2 \sin^2(\theta) \sin^2(\phi)) r^2 \sin \theta d\phi dr d\theta = \\
 &= \int_0^\alpha \int_0^{H/\cos(\theta)} \int_0^{2\pi} r^4 (\cos^2(\theta) \sin(\theta) + \sin^3(\theta) \sin^2(\phi)) d\phi dr d\theta = \\
 &= \int_0^\alpha \int_0^{H/\cos(\theta)} r^4 (2\pi \cos^2(\theta) \sin(\theta) + \pi \sin^3(\theta)) dr d\theta = \\
 &= \pi \int_0^\alpha \frac{(H/\cos(\theta))^5}{5} (2 \cos^2(\theta) \sin(\theta) + \pi \sin^3(\theta)) d\theta = \\
 &= \frac{\pi H^5}{5} \int_0^\alpha \frac{(2 \cos^2(\theta) \sin(\theta) + (1 - \cos^2(\theta)) \sin(\theta))}{\cos^5(\theta)} d\theta = \\
 &= \frac{\pi H^5}{5} \int_0^\alpha \sin(\theta) \left(\frac{1}{\cos^3(\theta)} + \frac{1}{\cos^5(\theta)} \right) d\theta
 \end{aligned}$$

mit Substitution $q = \cos(\theta)$ erhält man

$$\begin{aligned}
 J &= \frac{\pi H^5}{5} \int_{\cos(\alpha)}^1 \left(\frac{1}{q^3} + \frac{1}{q^5} \right) dq = \\
 &= \frac{\pi H^5}{5} \left(\frac{-1}{2q^2} + \frac{-1}{4q^4} \right) \Big|_{\cos(\alpha)}^1 = \\
 &= \frac{\pi H^5}{20} \left(\frac{2}{\cos^2(\alpha)} + \frac{1}{\cos^4(\alpha)} - 3 \right) = \\
 &= \frac{\pi H^5}{20} (4 \tan^2(\alpha) + \tan^4(\alpha))
 \end{aligned}$$

wo im letzten Schritt die trigonometrische Identität $\frac{1}{\cos^2(\alpha)} = 1 + \tan^2(\alpha)$ angewendet wurde. Mit $\tan(\alpha) = \frac{R}{H}$ und $M = \frac{\pi R^2 H}{3}$ wird die Gleichung

$$\begin{aligned}
 J &= \frac{\pi H^5}{20} \left(4 \left(\frac{R}{H} \right)^2 + \left(\frac{R}{H} \right)^4 \right) = \frac{\pi H}{20} (4R^2 H^2 + R^4) = \\
 &= \frac{3}{20} \frac{\pi R^2 H}{3} (4H^2 + R^2) = \frac{3}{20} M (4H^2 + R^2)
 \end{aligned}$$

3. 1. Das Kraftfeld $\underline{K} = (z^2 + 2xy, x^2 + 1, 2xz)$ hat ein Potential, da

$$\begin{aligned}
 \partial_y K_3 - \partial_z K_2 &= 0 - 0 = 0 \\
 \partial_z K_1 - \partial_x K_3 &= 2z - 2z = 0 \\
 \partial_x K_2 - \partial_y K_1 &= 2x - 2x = 0.
 \end{aligned}$$

Bitte wenden!

Das Potential berechnet sich durch

$$\Phi(x, y, z) = \int K_1 dx = \int (z^2 + 2xy) dx = xz^2 + x^2y + C_1(y, z)$$

$$\Phi(x, y, z) = \int K_2 dy = \int (x^2 + 1) dy = yx^2 + y + C_2(x, z)$$

$$\Phi(x, y, z) = \int K_3 dz = \int 2xz dz = xz^2 + C_3(x, y).$$

Die Konstanten ergeben sich durch Vergleich

$$\begin{aligned} C_1(y, z) &= y, & C_2(x, z) &= xz^2, & C_3(x, y) &= yx^2 + y \\ \Rightarrow \Phi(x, y, z) &= x^2y + xz^2 + y \end{aligned}$$

Die Arbeit hängt nicht von Weg ab, aber nur von Anfang- und Endpunkt.
In diesem Fall die Lösung für a) und b) ist dieselbe:

$$W_1 = \int_C \underline{K}(\underline{r}) \cdot d\underline{r} = \Phi(Q) - \Phi(P) = 1 - 0 = 1$$

2. Dieses Kraftfeld hat kein Potential, denn $\partial_x K_2 \neq \partial_y K_1$.

a) Der Weg ist gegeben durch

$$C: \underline{r}(t) = \underline{P} + t(\underline{Q} - \underline{P}) = \begin{pmatrix} 1-t \\ t \\ 2t \end{pmatrix}$$

mit $\underline{P} = (1, 0, 0)$ und $\underline{Q} = (0, 1, 2)$. Es gilt

$$\begin{aligned} W_2 &= \int_C \underline{K}(\underline{r}) \cdot d\underline{r} = \int_0^1 \begin{pmatrix} z^2(t) \\ x^2(t) \\ 2x(t)z(t) \end{pmatrix} \cdot \dot{\underline{r}}(t) dt \\ &= \int_0^1 \begin{pmatrix} 4t^2 \\ (1-t)^2 \\ 2(1-t)2t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} dt = \int_0^1 (-4t^2 + (1-t)^2 + 8(1-t)t) dt \\ &= \int_0^1 (1 + 6t - 11t^2) dt = 1 + 3 - \frac{11}{3} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

b) In diesem Fall wird die Bewegung in Kraftfeld in drei Schritten gemacht, d.h. der gesamte Weg C wird in drei Teilstrecken geteilt: $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$.

- C_1 : Gerade von $(1, 0, 0)$ zu $(0, 0, 0)$

$$\underline{r}_1(t) = \begin{pmatrix} 1-t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad 0 \leq t \leq 1$$

Siehe nächstes Blatt!

- C_2 : Gerade von $(0, 0, 0)$ zu $(0, 1, 0)$

$$\underline{r}_2(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 0 \end{pmatrix} \quad 0 \leq t \leq 1$$

- C_3 : Gerade von $(0, 1, 0)$ zu $(0, 1, 2)$

$$\underline{r}_3(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2t \end{pmatrix} \quad 0 \leq t \leq 1$$

Für die gesamte Arbeit ergibt sich

$$\begin{aligned} W_2 &= \int_C \underline{K}(\underline{r}) \cdot d\underline{r} = \\ &= \int_{C_1} \underline{K}(\underline{r}_1) \cdot d\underline{r}_1 + \int_{C_2} \underline{K}(\underline{r}_2) \cdot d\underline{r}_2 + \int_{C_3} \underline{K}(\underline{r}_3) \cdot d\underline{r}_3 = \\ &= \int_0^1 \left(\begin{pmatrix} z_1^2(t) \\ x_1^2(t) \\ 2x_1(t)z_1(t) \end{pmatrix} \cdot \underline{\dot{r}}_1(t) + \begin{pmatrix} z_2^2(t) \\ x_2^2(t) \\ 2x_2(t)z_2(t) \end{pmatrix} \cdot \underline{\dot{r}}_2(t) \right. \\ &\quad \left. + \begin{pmatrix} z_3^2(t) \\ x_3^2(t) \\ 2x_3(t)z_3(t) \end{pmatrix} \cdot \underline{\dot{r}}_3(t) \right) dt = \\ &= \int_0^1 \left(\begin{pmatrix} 0 \\ (1-t)^2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right. \\ &\quad \left. + \begin{pmatrix} (2t)^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right) dt = 0 \end{aligned}$$

4. Parametrisierung der Parabel

$$C: \underline{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 1-t^2 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \underline{\dot{r}}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2t \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad 0 \leq t \leq 1$$

$\underline{\dot{r}}(t)$ ist der Tangentenvektor der Kurve C . Der Normalenvektor steht auf $\underline{\dot{r}}$ senkrecht

$$\underline{n}(t) \cdot \underline{\dot{r}}(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{n}(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ 1 \end{pmatrix}$$

Bitte wenden!

Für den Volumenfluss $\dot{V}$ gilt

$$\begin{aligned}\dot{V} &= \int_C \underline{v}(t) \cdot \frac{\underline{n}(t)}{\|\underline{n}(t)\|} ds = \int_C \underline{v}(t) \cdot \frac{\underline{n}(t)}{\|\underline{n}(t)\|} \|\dot{\underline{r}}(t)\| dt = \int_0^1 \begin{pmatrix} 1 + 2x(t) \\ 2x(t) - y(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2t \\ 1 \end{pmatrix} dt \\ &= \int_0^1 \begin{pmatrix} 1 + 2t \\ 2t - 1 + t^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2t \\ 1 \end{pmatrix} dt = \int_0^1 (5t^2 + 4t - 1) dt = \left[\frac{5}{3}t^3 + \frac{4}{2}t^2 - t \right]_0^1 = \frac{8}{3}\end{aligned}$$