Lösung Serie 7

1. Formel von Bonnet (in drei Dimensionen)

$$\varkappa = \frac{1}{2}\,\mathrm{div}\,\underline{n} = \frac{1}{2}\left(\partial_x n_1 + \partial_y n_2 + \partial_z n_3\right)$$

mit $\underline{n}$ als Flächennormale.
Für die Fläche

$$z\left(x,y\right) = \pm\, c\sqrt{1-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)}$$

gilt

$$\underline{n} = \frac{1}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}\begin{pmatrix} z_x \\ z_y \\ -1 \end{pmatrix}$$

durch die partielle Ableitung von $\frac{z(x,y)^2}{c^2} = 1-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)$ nach x und y erhält man:

$$\frac{2\,z\,z_x}{c^2} = \frac{2\,x}{a^2} \Rightarrow z_x = -\frac{c^2\,x}{a^2\,z}$$
$$\frac{2\,z\,z_y}{c^2} = \frac{2\,y}{b^2} \Rightarrow z_y = -\frac{c^2\,y}{b^2\,z}$$

den Normalenvektor wird

$$\underline{n} = \frac{1}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}\begin{pmatrix} z_x \\ z_y \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{c^2\,x}{a^2\,z}\right)^2+\left(\frac{c^2\,y}{b^2\,z}\right)^2}}\begin{pmatrix} -\frac{c^2\,x}{a^2\,z} \\ -\frac{c^2\,y}{b^2\,z} \\ -1 \end{pmatrix} =$$
$$= \frac{-1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}}\begin{pmatrix} \frac{x}{a^2} \\ \frac{y}{b^2} \\ \frac{z}{c^2} \end{pmatrix}$$

Bitte wenden!

also

$$
\begin{aligned}
\varkappa =& \frac{-1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{a^2\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{b^2\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{c^2\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}}\right)\right)=\\
=& \frac{-1}{2}\left(\left(\frac{1}{a^2\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}}-\frac{x^2}{a^6\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right)^{3/2}}\right)+\right.\\
&+\left(\frac{1}{b^2\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}}-\frac{y^2}{b^6\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right)^{3/2}}\right)+\\
&\left.+\left(\frac{1}{c^2\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}}-\frac{z^2}{c^6\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right)^{3/2}}\right)\right)=\\
=& \frac{-1}{2\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right)^{3/2}}\left(\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right)-\frac{x^2}{a^6}-\frac{y^2}{b^6}-\frac{z^2}{c^6}\right)=\\
=& \frac{-1}{2\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right)^{3/2}}\left(\frac{x^2}{a^4}\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)+\frac{y^2}{b^4}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{c^2}\right)+\frac{z^2}{c^4}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)\right)=\\
=& \frac{-1}{2\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right)^{3/2}}\left(\frac{1}{a^2\,b^2}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)-\frac{z^2}{a^2\,b^2\,c^2}+\right.\\
&\qquad+\frac{1}{b^2\,c^2}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)-\frac{y^2}{a^2\,b^2\,c^2}+\\
&\qquad\left.+\frac{1}{a^2\,c^2}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)-\frac{x^2}{a^2\,b^2\,c^2}\right)=\\
=& \frac{x^2+y^2+z^2-a^2-b^2-c^2}{2\,a^2\,b^2\,c^2\,\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right)^{3/2}}
\end{aligned}
$$

Siehe nächstes Blatt!

mit $z^2 = c^2 \left(1 - \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)\right)$, erhält man

$$\varkappa(x,y) = \frac{x^2 + y^2 + c^2 \left(1 - \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)\right) - a^2 - b^2 - c^2}{2\,a^2\,b^2\,c^2 \left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{1-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)}{c^2}\right)^{3/2}} = $$

$$= \frac{c\left(\left(1-\left(\frac{c}{a}\right)^2\right)x^2 + \left(1-\left(\frac{c}{b}\right)^2\right)y^2 - a^2 - b^2\right)}{2\,a^2\,b^2\left(1 - \left(1-\left(\frac{c}{a}\right)^2\right)x^2 - \left(1-\left(\frac{c}{b}\right)^2\right)y^2\right)}$$

2. Für den Winkel in dem sich zwei Kurven in einer beliebigen Geometrie schneiden gilt

$$\cos\gamma = \frac{g_{ij} v_1^i v_2^j}{\sqrt{g_{ij} v_1^i v_1^j}\sqrt{g_{ij} v_2^i v_2^j}}$$

darin sind die Vektoren $\underline{v}_{1,2}$ die Tangentenvektoren der beiden Kurven und es gilt die Summationskonvention (über doppelte Indices wird summiert). Die "Metrik" g_{ij} für eine Kugeloberfläche wurde in der Vorlesung angegeben:

$$g_{ij} = R^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2\theta \end{pmatrix}$$

Parametrisierung der beiden Kurven

$$r_1(t) = \begin{pmatrix} \theta_1(t) \\ \phi_1(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t^3 \end{pmatrix} \qquad r_2(t) = \begin{pmatrix} \theta_2(t) \\ \phi_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^2 \\ t \end{pmatrix}$$

Am Schnittpunkt soll $\theta = \phi = 1$ gelten, also $t = 1$. Die Tangentenvektoren sind

$$v_1(1) = \dot{r}_1(1) = \left.\begin{pmatrix} 1 \\ 3t \end{pmatrix}\right|_{t=1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad v_2(1) = \dot{r}_2(1) = \left.\begin{pmatrix} 2t \\ 1 \end{pmatrix}\right|_{t=1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Es folgt (mit $\theta = 1$)

$$\cos\gamma = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{\begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}}\sqrt{\begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}}}$$

$$= \frac{\begin{pmatrix} 1 & 3\sin^2 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{\begin{pmatrix} 1 & 3\sin^2 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}}\sqrt{\begin{pmatrix} 2 & \sin^2 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}}} = \frac{2 + 3\sin^2 1}{\sqrt{1 + 9\sin^2 1}\sqrt{4 + \sin^2 1}}$$

$$\approx 0.7000\ldots$$

$$\gamma \approx 0.7954\ldots \widehat{=} 45.57^\circ$$

Bitte wenden!

3. Um die kürzesten Abstände an der Seitenoberflächen zu messen, wickelt man den Körper ab.Die vordere Seite des Quaders ergibt die Punkte $A = (0, 0)$, $B = (6, 0)$, $C = (0, 3)$, $D = (6, 3)$. Mit hilfe des Theorems von Pytagoras findet man, dass die Projection der Spitze $E = (3, 8)$ ist.
Mit diesem Teil der Abwicklung kann man schon den kürzesten Abstand zwischen Spitze und unterem Eckpunkt berechnen:

$$l_1 = \left\| \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{73}$$

Um den Abstand zum Schwerpunkt zu berechnen, muss man auch eine andere Pyramideseite projizieren.
Man findet die Gerade g durch C senkrecht zu $\overline{ED}$ und dann erhält man F durch die Erkenntnis, dass $\overline{CF} = 2\,\overline{CG}$. Die Gerade durch $\overline{ED}$ hat Richtung $(-3, 5)$. Die Gerade g ist gegeben durch:

$$g\,(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\,t \\ 3 + 3\,t \end{pmatrix}$$

Die Gerade f durch $\overline{ED}$ ist:

$$f\,(s) = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 - 3\,s \\ 3 + 5\,s \end{pmatrix}$$

Der Punkt G ist der Schnittpunkt von f und g:

$$\begin{cases} 6 - 3\,s = 5\,t \\ 3 + 5\,s = 3 + 3\,t \Rightarrow s = \frac{3}{5}t \end{cases}$$

$$6 - \frac{9}{5}t = 5\,t \Rightarrow t = \frac{15}{17}$$

$$G = g\left(\frac{15}{17}\right) = \begin{pmatrix} \frac{75}{17} \\ \frac{96}{17} \end{pmatrix}$$

Um Punkt F zu kriegen, muss man g in Punkt $t = 2 \cdot \frac{15}{17} = \frac{30}{17}$ berechnen:

$$F = g\left(\frac{30}{17}\right) = \begin{pmatrix} \frac{150}{17} \\ \frac{141}{17} \end{pmatrix}$$

Um den Schwerpunkt des Dreiecks EFB zu finden, muss man den Schnittpunkt der Seitenhalbierende des Dreiecks finden.
H ist die Mitte von Segment $\overline{ED}$:

$$H = f\left(\frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} \frac{9}{2} \\ \frac{11}{2} \end{pmatrix}$$

Siehe nächstes Blatt!

und I ist die Mitte von $\overline{FE}$:

$$I = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} \frac{150}{17} \\ \frac{141}{17} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \frac{201}{34} \\ \frac{277}{34} \end{pmatrix}$$

Der Schwerpunkt S ist der Schnittpunkt zwischen $\overline{ID}$ und $\overline{HF}$:

$$\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} + p\left(\begin{pmatrix} \frac{201}{34} \\ \frac{277}{34} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \frac{9}{2} \\ \frac{11}{2} \end{pmatrix} + q\left(\begin{pmatrix} \frac{150}{17} \\ \frac{141}{17} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{9}{2} \\ \frac{11}{2} \end{pmatrix}\right)$$
$$\begin{pmatrix} \frac{204-3\,p}{34} \\ \frac{102+175\,p}{34} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{153+147\,q}{34} \\ \frac{187+95\,q}{34} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 204 - 3\,p = 153 + 147\,q \Rightarrow p = \frac{51-147\,q}{3} \\ 102 + 175\,p = 187 + 95\,q \Rightarrow p = \frac{85+95\,q}{175} \end{cases}$$

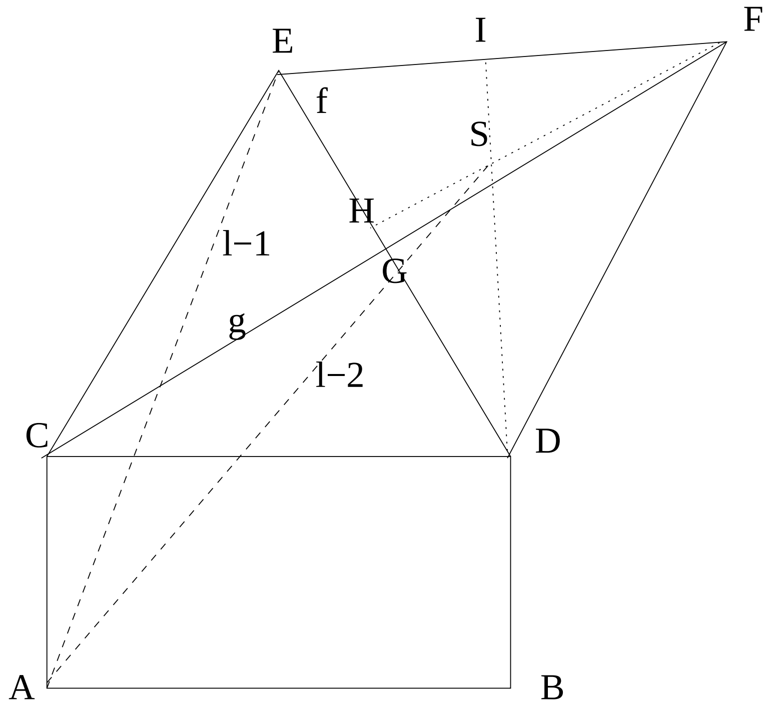
$$\Rightarrow \frac{51 - 147\,q}{3} = \frac{85 + 95\,q}{175}$$
$$\Rightarrow q = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow S = \begin{pmatrix} \frac{153+147\,\frac{1}{3}}{34} \\ \frac{187+95\,\frac{1}{3}}{34} \end{pmatrix} = \frac{1}{17}\begin{pmatrix} 101 \\ \frac{328}{3} \end{pmatrix}$$

Man erhält diese Lošung auch durch anwendung der Formel:$S = \frac{1}{3}\left(\overline{AF} + \overline{AE} + \overline{AD}\right)$ wo A den Ursprung der Koordinatensystem ist.
Für den Abstand zwischen unterem Eckpunkt und Schwerpunkt der Pyramidenseite erhält man:

$$l_2 = \frac{1}{17}\left\|\begin{pmatrix} 101 \\ \frac{328}{3} \end{pmatrix}\right\| = \frac{\sqrt{199393}}{51}$$

Bitte wenden!



E
I
F
f
S
H
l−1
G
g
l−2
C
D
A
B