

Serie 8

- 1. Temperaturverteilung bei inhomogener Heizung:** Gegeben sei ein Ring G mit Radien $0 < R_1 < R_2$. Lösen Sie das Randwertproblem

$$\Delta u + 1 + \left(\frac{r}{R_2}\right)^2 = 0 \quad \text{für } r \in G$$
$$u = 0 \quad \text{auf dem Rand}$$

und bestimmen Sie den maximalen Wert von u für die Radien $R_1 = 1$ und $R_2 = 2$.

- 2.** Sei G eine Kugel mit Radius R , sowie zwei Konstanten α und $q > 0$. Berechnen Sie die Lösung von

$$\Delta u + q = 0 \quad \text{in } G$$
$$\frac{\partial u}{\partial n} + \alpha u = 0 \quad \text{auf dem Rand}$$

a) Welchen maximalen Wert hat u in der Kugel ?

b) Bestimmen Sie die Gesamtenergie der Lösung $E = \int_G |\nabla u|^2 dV$.

- 3. Diffusion und Reaktion in einer Kugelschale:** Lösen Sie, für eine Kugelschale G mit Innenradius 1 und Aussenradius 2, das Randwertproblem

$$\Delta u - c^2 u = 0 \quad \text{in } G$$
$$u = 1 \quad \text{für } r = 2$$
$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{für } r = 1$$

- 4. Stationäre Temperaturverteilung in einer Kugel:** Bestimmen Sie in einer Kugel G mit Radius R die Lösung von

$$\Delta u - \alpha r^2 = 0 \quad \text{für } r \in G$$
$$u = 1 \quad \text{auf } \partial G$$

mit $\alpha > 0$. Für welche α ist $\min_{0 \leq r \leq R} u(r) = 0$?

Abgabe: Montag, 2. Juni 2003 in den Übungen