Serie 8

1. **Temperaturverteilung bei inhomogener Heizung:** Gegeben sei ein Kreisring G mit Radien $0 < R_1 < R_2$. Lösen Sie das Randwertproblem

$$\begin{aligned} \Delta u + 1 + \left(\frac{r}{R_2}\right)^2 &= 0 \qquad \text{für } r \in G \\ u &= 0 \qquad \text{auf dem Rand} \end{aligned}$$

   und bestimmen Sie den maximalen Wert von u für die Radien $R_1 = 1$ und $R_2 = 2$.

2. Sei G eine Kugel mit Radius R, sowie zwei Konstanten α und $q > 0$. Berechnen Sie die Lösung von

$$\begin{aligned} \Delta u + q &= 0 \qquad \text{in } G \\ \frac{\partial u}{\partial n} + \alpha u &= 0 \qquad \text{auf dem Rand} \end{aligned}$$

   a) Welchen maximalen Wert hat u in der Kugel ?

   b) Bestimmen Sie die Gesamtenergie der Lösung $E = \int_G |\nabla u|^2 dV$.

3. **Diffusion und Reaktion in einer Kugelschale:** Lösen Sie, für eine Kugelschale G mit Innenradius 1 und Aussenradius 2, das Randwertproblem

$$\begin{aligned} \Delta u - c^2 u &= 0 \qquad \text{in } G \\ u &= 1 \qquad \text{für } r = 2 \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= 0 \qquad \text{für } r = 1 \end{aligned}$$

4. **Stationäre Temperaturverteilung in einer Kugel:** Bestimmen Sie in einer Kugel G mit Radius R die Lösung von

$$\begin{aligned} \Delta u - \alpha r^2 &= 0 \qquad \text{für } r \in G \\ u &= 1 \qquad \text{auf } \partial G \end{aligned}$$

   mit $\alpha > 0$. Für welche α ist $\min_{0 \le r \le R} u(r) = 0$?

Abgabe: Montag, 2. Juni 2003 in den Übungen