Lösung Serie 8

1. In Polarkoordinaten (r,ϕ) ist der Laplace-Operator gegeben durch

$$\Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\phi\phi}$$

In der Aufgabe ist eine Lösung der Form $u(r)$ zu erwarten (Symmetrie !). Also

$$\Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r = -1 - \left(\frac{r}{R_2}\right)^2 \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{r}\left(r\, u_r\right)_r = -1 - \frac{r^2}{R_2^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(r\, u_r\right)_r = -r - \frac{r^3}{R_2^2} \quad \Leftrightarrow \quad r\, u_r = -\frac{1}{2}r^2 - \frac{r^4}{4R_2^2} + C_1 \quad \Leftrightarrow \quad u_r = -\frac{1}{2}r - \frac{r^3}{4R_2^2} + C_1\frac{1}{r}$$

$$\Leftrightarrow \quad u = -\frac{1}{4}r^2 - \frac{r^4}{16R_2^2} + C_1 \ln r + C_2$$

$$\Leftrightarrow \quad u(r) = -\left(\frac{r}{2}\right)^2\left(1 + \left(\frac{r}{2R_2}\right)^2\right) + C_1 \ln\frac{r}{R_2} + \widetilde{C}_2$$

Die Randbedingungen lauten

$$u\left(R_1\right) = 0 \quad \text{und} \quad u\left(R_2\right) = 0$$

$$u\left(R_2\right) = -\frac{5}{16}R_2^2 + \widetilde{C}_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \widetilde{C}_2 = \frac{5}{16}R_2^2$$

$$u\left(R_1\right) = -\left(\frac{R_1}{2}\right)^2\left(1 + \left(\frac{R_1}{2R_2}\right)^2\right) + C_1 \ln\frac{R_1}{R_2} + \frac{5}{16}R_2^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad C_1 = \frac{R_1^2}{4\ln\frac{R_1}{R_2}}\left(1 + \frac{1}{4}\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 - \frac{5}{4}\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2\right)$$

Setze $R_1 = 1$, $R_2 = 2$. Dann ist $C_1 = -63/(64\ln 0.5)$, $\widetilde{C}_2 = 5/4$ und

$$u_r = -\frac{1}{2}r - \frac{r^3}{16} + C_1\frac{1}{r}.$$

Bitte wenden!

Für den maximalen Wert muss gelten $u_r = 0$.

$$\begin{aligned}\Rightarrow \quad -\frac{r^3}{16} - \frac{r^2}{2} + \frac{C_1}{r} &= 0 \\ r^4 + 8r^2 - 16C_1 &= 0 \\ &\Rightarrow r = 2\sqrt{\sqrt{1+C_1} - 1}\end{aligned}$$

Mit dem Taschenrechner bekommt man $r = 1.49$ und damit den maximalen Wert $u(1.49) = 0.199$.

2. In Kugelkoordinaten (r, θ, ϕ) lautet der Laplace-Operator

$$\Delta u = u_{rr} + \frac{2}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} + \frac{\cot\theta}{r^2}u_\theta + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}u_{\phi\phi}$$

In der Augabe gilt $u(r)$, daher

$$\Delta u = u_{rr} + \frac{2}{r}u_r = \frac{1}{r^2}\left(r^2 u_r\right)_r = -q$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(r^2 u_r\right)_r = -qr^2 \quad \Leftrightarrow \quad r^2 u_r = -\frac{q}{3}r^3 + C_1 \quad \Leftrightarrow \quad u_r = -\frac{q}{3}r + C_1\frac{1}{r^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad u(r) = -\frac{q}{6}r^2 - C_1\frac{1}{r} + C_2$$

Zunächst muss $u(0) < \infty$ und deshalb $C_1 = 0$ gelten. Die Normalenableitung in der Randbedingung wird zu u_r und es ergibt sich

$$\begin{aligned}u_r(R) + \alpha\, u(R) = -\frac{q}{3}R + \alpha\left(-\frac{q}{6}R^2 + C_2\right) &= 0 \\ \Rightarrow \quad C_2 &= \frac{q}{6}\left(\frac{2R}{\alpha} + R^2\right)\end{aligned}$$

$$u(r) = \frac{q}{6}\left(\frac{2R}{\alpha} + R^2 - r^2\right)$$

1. Für den maximalen Wert gilt

$$u_r = 0 \quad \text{also} \quad -\frac{q}{3}r = 0 \quad \Rightarrow \quad r_{\max} = 0$$

$$u(r_{\max}) = \frac{q}{6}\left(\frac{2R}{\alpha} + R^2\right)$$

Siehe nächstes Blatt!

2. Für den Gradient gilt in Kugelkoordinaten

$$\nabla u = \left(u_r, \frac{1}{r} u_\theta, \frac{1}{r\, \sin\theta} u_\phi \right)$$

In unserem Fall folgt also

$$\|\nabla u\|^2 = u_r^2$$

und mit $dV = r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\phi$

$$\int_G \|\nabla u\|^2\, dV = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{R} u_r^2\, r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\phi = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{R} \frac{q^2}{9}\, r^4 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\phi$$

$$= \frac{4\pi q^2}{9} \int_0^{R} r^4 dr = \frac{4\pi q^2 R^5}{45}$$

3. Wieder folgt mit dem Laplace-Operator in Kugelkoordinaten und $u(r)$

$$\frac{1}{r^2} \left(r^2 u_r \right)_r = u$$

Es wird jetzt die Variablentransformation

$$u(r) = \frac{v(r)}{r}$$

durchgeführt. Es bleibt

$$v_{rr} = v \qquad \Rightarrow \qquad v(r) = C_1 \sinh(r) + C_2 \cosh(r)$$

$$u(r) = C_1 \frac{\sinh(r)}{r} + C_2 \frac{\cosh(r)}{r}$$

Die Randbedingungen lauten

$$\frac{\partial}{\partial n} u(1) = 0 \qquad \text{und} \qquad u(2) = 1$$

Aus $\frac{\partial}{\partial n} u(1) = 0$ folgt:

$$0 = \partial_r u\big|_{r=1}$$

$$0 = \left. \frac{v_r r - v}{r^2} \right|_{r=1}$$

$$0 = \left. \frac{\left(C_1 \cosh(r) + C_2 \sinh(r)\right) r - \left(C_1 \sinh(r) + C_2 \cosh(r)\right)}{r^2} \right|_{r=1}$$

$$0 = C_1 \left(\cosh(r) - \sinh(r)\right) - C_2 \left(\cosh(r) - \sinh(r)\right)$$

$$\Rightarrow C_1 = C_2$$

Bitte wenden!

und aus $u(2) = 1$ folgt:

$$\begin{aligned} 2 &= C_1 (\cosh(2) + \sinh(2)) = e^2 \\ C_1 &= \frac{2}{e^2} \\ &\Rightarrow u(r) = \frac{2}{e^2 r} (\cosh(r) + \sinh(r)) \end{aligned}$$

4. Wie oben

$$\frac{1}{r^2} \left(r^2 u_r\right)_r = \alpha\, r^2$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(r^2 u_r\right)_r = \alpha\, r^4 \quad \Leftrightarrow \quad r^2 u_r = \frac{\alpha}{5} r^5 + C_1 \quad \Leftrightarrow \quad u_r = \frac{\alpha}{5} r^3 + C_1 \frac{1}{r^2}$$

$$u(r) = \frac{\alpha}{20} r^4 - C_1 \frac{1}{r} + C_2$$

Es gilt $C_1 = 0$, da $u(0) < \infty$ erfüllt sein sollte. C_2 folgt aus der Randbedingung

$$u(R) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\alpha}{20} R^4 + C_2 = 1 \quad \text{also} \quad C_2 = 1 - \frac{\alpha}{20} R^4$$

und damit

$$u(r) = \frac{\alpha}{20} \left(r^4 - R^4\right) + 1$$

u ist minimal bei $r = 0$, aus $\min_{0 \leq r \leq R} u(r) = 0$ folgt

$$u(0) = -\frac{\alpha}{20} R^4 + 1 = 0 \qquad \Rightarrow \alpha = \frac{20}{R^4}$$