Lösung Serie 9

1. Betrachte das Quadrat

$$\Omega = \{(x,y) :\; 0 \leq x \leq a,\, 0 \leq y \leq a\}$$

Die gemischte Randbedingung gelte auf der Seite $x = a$. Das Problem lautet dann

$$u_{xx} + u_{yy} + \lambda\, u = 0 \quad \text{in } \Omega$$

$$\begin{aligned} u(0,y) &= 0 & \qquad u(x,0) &= 0 \\ u_x(a,y) + \frac{1}{a} u(a,y) &= 0 & \qquad u(x,a) &= 0 \end{aligned}$$

Der Separationsansatz $u(x,y) = X(x)Y(y)$ führt auf

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + \lambda = 0$$

Da λ konstant ist und die einzelnen Summanden nur von einer Variablen abhängen, müssen alle Summanden konstant sein. Also mit $\lambda = \nu^2 + \mu^2$ folgt

$$\begin{aligned} \frac{X''}{X} &= -\nu^2 & \qquad \frac{Y''}{Y} &= -\mu^2 \\ X'' + \nu^2 X &= 0 & \qquad Y'' + \mu^2 Y &= 0 \\ X(x) &= C_1^x \sin(\nu x) + C_2^x \cos(\nu x) & \qquad Y(y) &= C_1^y \sin(\mu y) + C_2^y \cos(\mu y) \end{aligned}$$

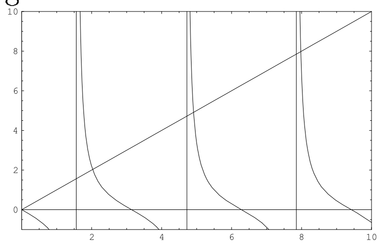
Aus den Randbedinungen folgt

$$X(0) = 0 \quad X'(a) + \frac{1}{a} X(a) = 0 \quad Y(0) = 0 \quad Y(a) = 0$$

$$\begin{aligned} X(0) = C_2^x = 0 \quad &\Rightarrow \quad X'(a) + \frac{1}{a} X(a) = C_1^x \nu \cos(\nu a) + \frac{1}{a} C_1^x \sin(\nu a) = 0 \text{ mit } C_1^x \neq 0 \\ &\Rightarrow \quad a\nu = -\tan(\nu a) \\ Y(0) = C_2^y = 0 \quad &\Rightarrow \quad Y(a) = C_1^y \sin(\mu a) = 0 \text{ mit } C_1^y \neq 0 \\ &\Rightarrow \quad \mu_j = \frac{\pi\, j}{a} \end{aligned}$$

Bitte wenden!

Die Gleichung $x = -\tan x$ hat unendlich viele Lösungen x_i, die z.B. graphisch gefunden werden können.



Die ersten Lösungen sind

$$x_1 = 2.029 \quad x_2 = 4.91 \quad x_3 = 7.98$$

und für die ν's gilt

$$\nu_i = \frac{x_i}{a}, \quad i = 1, 2, \ldots$$

Insgesamt also

$$\lambda_{ij} = \nu_i^2 + \mu_j^2 = \frac{x_i^2 + \pi^2 j^2}{a^2}$$

$$\lambda_{11} = \frac{13.986}{a^2} < \lambda_{21} = \frac{33.978}{a^2} < \lambda_{12} = \frac{43.595}{a^2} < \ldots$$

2. Der Quader ist durch

$$\Omega = \{(x, y, z) :\, 0 \le x \le 1,\, 0 \le y \le 2,\, 0 \le z \le 3\}$$

gegeben. Damit

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} + \lambda u = 0 \quad \text{in } \Omega$$

$$u_x(0, y, z) = u_y(x, 0, z) = u_z(x, y, 0) = 0$$
$$u_x(1, y, z) = u_y(x, 2, z) = u_z(x, y, 3) = 0$$

Mit dem Separationsansatz $u(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z)$ folgt

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + \frac{Z''}{Z} + \lambda = 0$$

und wieder, dass die einzelnen Summanden konstant sind. Mit $\lambda = \nu^2 + \mu^2 + \eta^2$ gilt dann

$$\frac{X''}{X} = -\nu^2 \qquad \frac{Y''}{Y} = -\mu^2 \qquad \frac{Z''}{Z} = -\eta^2$$
$$X'' + \nu^2 X = 0 \qquad Y'' + \mu^2 Y = 0 \qquad Z'' + \eta^2 Z = 0$$

Siehe nächstes Blatt!

$$
\begin{aligned}
X(x) &= C_1^x \sin(\nu x) + C_2^x \cos(\nu x)\\
Y(y) &= C_1^y \sin(\mu y) + C_2^y \cos(\mu y)\\
Z(z) &= C_1^z \sin(\eta z) + C_2^z \cos(\eta z)
\end{aligned}
$$

Die obigen Randbedingungen ergeben für $X(x)$

$$X'(0) = X'(1) = 0$$

$$
\begin{aligned}
X'(0) = C_1^x \nu = 0 \quad &\Rightarrow \quad C_1^x = 0 \text{ und damit } X'(1) = -C_2^x \nu \sin(\nu) = 0 \text{ mit } C_2^x \neq 0\\
&\Rightarrow \quad \nu_i = i\pi,\ i = 0, 1, 2, \ldots.
\end{aligned}
$$

$i = 0$ ist wegen $X_0 = const$ möglich. Analog folgt für Y und Z

$$\mu_j = j\frac{\pi}{2},\ j = 0, 1, 2, \ldots \qquad \eta_k = k\frac{\pi}{3},\ k = 0, 1, 2, \ldots$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_{ijk} = \left(i^2 + \frac{j^2}{4} + \frac{k^2}{9}\right)\pi^2$$

Die ersten 7 Eigenwerte lauten

$$
\begin{aligned}
\lambda_{000} = 0 < \lambda_{001} = \frac{\pi^2}{9} < \lambda_{010} = \frac{\pi^2}{4} < \lambda_{011} = \frac{13\pi^2}{36} < \lambda_{002} = \frac{4\pi^2}{9}\\
< \lambda_{012} = \frac{25\pi^2}{36} < \lambda_{100} = \lambda_{020} = \lambda_{003} = \pi^2
\end{aligned}
$$

3. Der viertel Einheitskreis ist gegeben durch

$$\Omega = \left\{(x, y) :\ y \geq 0,\ x \geq 0,\ x^2 + y^2 \leq 1\right\}$$

und es gilt zu lösen (Kreiskoordinaten (r, ϕ))

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\phi\phi} + \lambda u = 0 \quad \text{in } \Omega$$

$$u(0, \phi) = u(1, \phi) = u(r, 0) = u(r, \frac{\pi}{2}) = 0$$

Mit dem Separationsansatz $u(r, \phi) = R(r)\Phi(\phi)$ folgt

$$\frac{R''}{R} + \frac{1}{r}\frac{R'}{R} + \frac{1}{r^2}\frac{\Phi''}{\Phi} + \lambda = 0$$

In dieser Gleichung taucht nur im Term $\frac{\Phi''}{\Phi}$ eine ϕ-Abhängigkeit auf. Damit muss dieser Term konstant sein:

$$\frac{\Phi''}{\Phi} = -\nu^2 \quad \Rightarrow \quad \Phi(\phi) = C_1^\phi \sin(\nu\phi) + C_2^\phi \cos(\nu\phi)$$

Bitte wenden!

Aus den Randbedingungen folgt

$$\Phi(0) = \Phi(\frac{\pi}{2}) = 0$$

$$\begin{aligned} \Phi(0) = C_2^\phi = 0 \quad &\Rightarrow \quad \Phi(\frac{\pi}{2}) = C_1^\phi \sin(\frac{\nu\pi}{2}) = 0 \text{ mit } C_1^\phi \neq 0 \\ &\Rightarrow \quad \nu_n = 2\,n,\ n = 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

Damit gilt $\frac{\Phi''}{\Phi} = -4\,n^2$ und für die obige Gleichung

$$r^2\,R'' + r\,R' + \left(\lambda\,r^2 - 4\,n^2\right)R = 0$$

Nach der Variablentransformation $s = \sqrt{\lambda}r$ mit $\frac{d}{dr} = \sqrt{\lambda}\frac{d}{ds}$ und $\tilde{n} = 2\,n$ ergibt sich

$$s^2\frac{d^2\widetilde{R}}{ds^2} + s\frac{d\widetilde{R}}{ds} + \left(s^2 - \tilde{n}^2\right)\widetilde{R} = 0 \quad \text{(Bessel'sche DGL)}$$

mit der Lösung

$$\begin{aligned} \widetilde{R}(s) &= C_1^r\,J_{\tilde{n}}(s) + C_2^r\,Y_{\tilde{n}}(s) \\ R(r) &= C_1^r\,J_{2n}\left(\sqrt{\lambda}r\right) + C_2^r\,Y_{2n}\left(\sqrt{\lambda}r\right) \end{aligned}$$

(J_n, Y_n Besselfunktionen erster und zweiter Art) Da $|Y_n(0)| \to \infty$ muss $C_2^r = 0$ sein. Aus der obigen Randbedingung folgt

$$R(1) = C_1^r\,J_{2n}\left(\sqrt{\lambda}\right) = 0 \text{ mit } C_1^r \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{n,k} = j_{2n,k}^2 \quad k = 1, 2, \ldots$$

wobei $j_{n,k}$ die k-te Nullstelle von J_n ist. Die ersten paar Nullstellen von J_2, J_4 lauten

$$\begin{aligned} j_{2,1} &= 5.136 \quad j_{2,2} = 8.417 \quad j_{2,3} = 11.620 \\ j_{4,1} &= 6.380 \quad j_{4,2} = 9.761 \quad j_{4,3} = 13.015 \end{aligned}$$

und die ersten beiden Eigenwerte damit

$$\lambda_{1,1} = 26.379 < \lambda_{2,1} = 40.704$$

4. In Kugelkoordinaten gilt

$$\begin{aligned} u_{rr} + \frac{2}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} + \frac{\cot\theta}{r^2}u_\theta + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}u_{\phi\phi} + \lambda\,u = 0 \quad \text{in } \Omega \\ u(R_1, \theta, \phi) = u(R_2, \theta, \phi) = 0 \end{aligned}$$

Siehe nächstes Blatt!

woraus mit dem Separationsansatz $u(r,\theta,\phi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi)$ folgt

$$\frac{R''}{R} + \frac{2}{r}\frac{R'}{R} + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\Theta''}{\Theta} + \cot\theta\frac{\Theta'}{\Theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\Phi''}{\Phi}\right) + \lambda = 0$$

Es folgt, dass die Klammer konstant sein muss. Sie wird null gesetzt und wir betrachten nur den radialen Teil der Gleichung

$$R'' + \frac{2}{r}R' = -\lambda\, R \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{r^2}\left(r^2 R'\right)' = -\lambda\, R$$

Mit der Transformation

$$R(r) = \frac{v(r)}{r} \qquad R'(r) = \frac{v'}{r} - \frac{v}{r^2}$$

ergibt sich

$$v'' = -\lambda\, v \quad \Rightarrow \quad v(r) = C_1 \sin\left(\sqrt{\lambda} r\right) + C_2 \cos\left(\sqrt{\lambda} r\right)$$

$$R(r) = C_1 \frac{\sin\left(\sqrt{\lambda} r\right)}{r} + C_2 \frac{\cos\left(\sqrt{\lambda} r\right)}{r}$$

Weiter folgt aus der Randbedingung

$$\begin{aligned}
&R(R_1) = 0\\
\Rightarrow\ &R(R_1) = C_1 \frac{\sin\left(\sqrt{\lambda} R_1\right)}{R_1} + C_2 \frac{\cos\left(\sqrt{\lambda} R_1\right)}{R_1}\\
&\Rightarrow C_2 = -C_1 \tan\left(\sqrt{\lambda} R_1\right)\\
&R(R_2) = 0\\
\Rightarrow\ &R(R_2) = C_1 \frac{\sin\left(\sqrt{\lambda} R_2\right)}{R_2} + C_2 \frac{\cos\left(\sqrt{\lambda} R_2\right)}{R_2}\\
&\Rightarrow C_2 = -C_1 \tan\left(\sqrt{\lambda} R_2\right)\\
&\text{mit } C_1 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \tan\left(\sqrt{\lambda} R_2\right) = \tan\left(\sqrt{\lambda} R_1\right)\\
\Rightarrow\ &\sqrt{\lambda_j} R_2 = \sqrt{\lambda_j} R_1 + \pi\, j \qquad \Rightarrow \lambda_j = \frac{\pi^2\, j^2}{R_2 - R_1}, \quad j = 0, 1, 2, \ldots
\end{aligned}$$

Der erste (radiale) Eigenwert ist damit $\frac{\pi^2}{R_2 - R_1}$.