

I. Numerische Quadratur

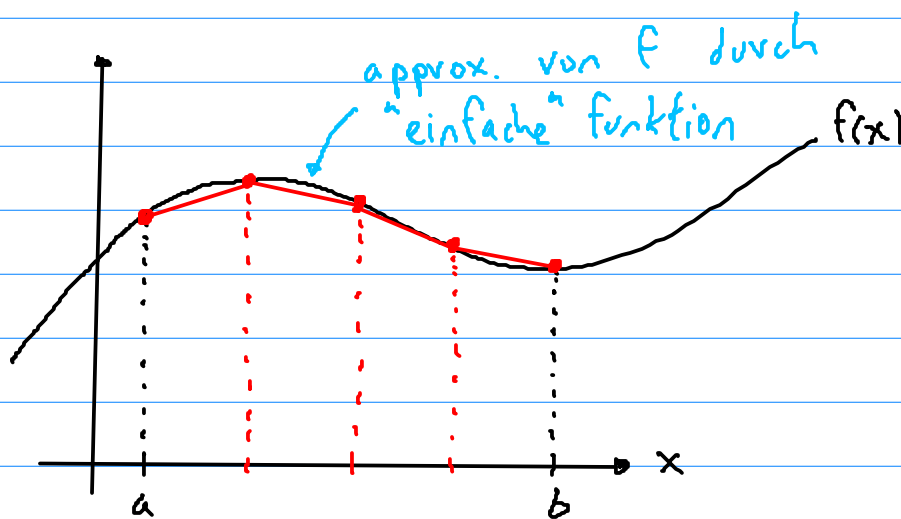
Ziele: - approximieren von bestimmten Integralen

$$Q[f] \approx \int_a^b f(x) dx$$

- Genauigkeit der Approximation abschätzen
- fundamentale Konzepte der Numerik kennenlernen
- Newton-Cotes, Gauss, adaptive Quadratur
- zwei-dimensionale Quadratur

Wozu: Oft ist $\int_a^b f(x) dx$ nicht exakt berechenbar

Idee:



$$I[f] = \int_a^b f(x) dx \approx \sum_j w_j \cdot f(x_j) = Q[f]$$

I.1 Polynomiale Interpolation

Gegeben $n+1$ paarweise verschiedene Stützstellen / Knoten x_0, x_1, \dots, x_n und zugehörige Stützwerte y_0, y_1, \dots, y_n

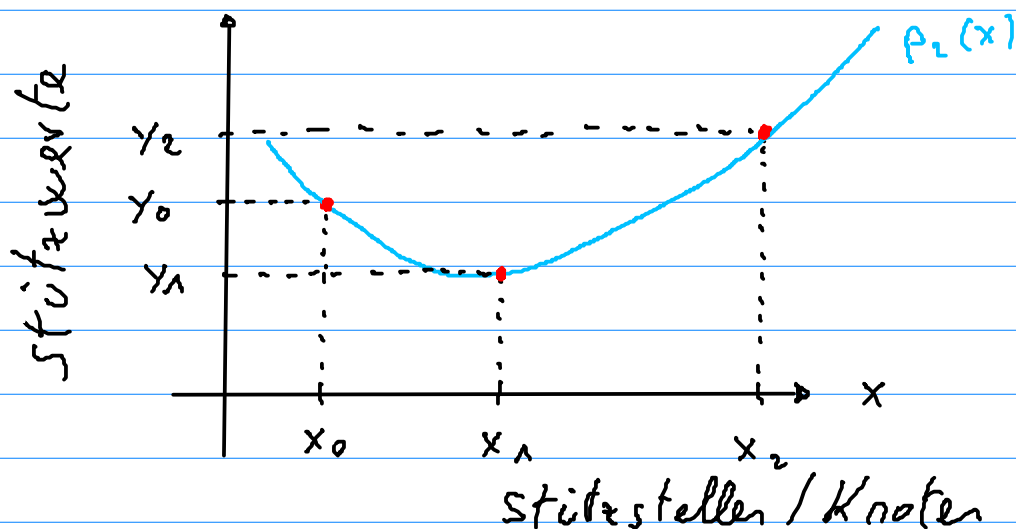
finde das Polynom n -ten Grades

$$p_n(x) = a_0 + a_1 \cdot x + \dots + a_n \cdot x^n \in \mathbb{P}_n$$

welches die Interpolationsbedingungen (IB) erfüllt

$$p_n(x_j) = y_j \quad (j=0, 1, \dots, n)$$

Die $n+1$ Koeffizienten a_0, a_1, \dots, a_n des sog. Interpolationspolynom (IP) ergeben sich aus den $n+1$ IB (n+1 lineares Gleichungssystem) (LGS)



Bsp.: (1) Finde $p_2(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2$

mit $(x_0, y_0) = (1, 2)$, $(x_1, y_1) = (3, 5)$ und

$(x_2, y_2) = (4, 4)$

Die IB lauten

$$p_2(x_0) = p_2(1) = a_0 + a_1 + a_2 = 2 = y_0$$

$$p_2(x_1) = p_2(3) = a_0 + 3a_1 + 9a_2 = 5 = y_1$$

$$p_2(x_2) = p_2(4) = a_0 + 4a_1 + 16a_2 = 4 = y_2$$

Oder als LGS

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Lösen ... $a_0 = -2$, $a_1 = \frac{23}{6}$, $a_2 = -\frac{5}{6}$

MATLAB: - $p = \text{polyfit}(x, y, n)$

- Einfache Auswertung mit polyval

Das IP kann man auch direkt mittels der Lagrange'schen Interpolationsformel (LI) bestimmen

$$p_n(x) = \sum_{j=0}^n y_j \cdot L_j^{\wedge}(x)$$

wobei

$$L_j^{\wedge}(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^n \frac{x - x_i}{x_j - x_i} \quad (j = 0, 1, \dots, n)$$

die sog. Lagrange-Polynome (LP) sind.

Die LP haben folgende Eigenschaften

(LP1) $L_j^{\wedge}(x)$ sind Polynome n -ten Grades

$$(LP2) \quad L_j^{\wedge}(x_k) = \delta_{jk} = \begin{cases} 1, & j=k \\ 0, & j \neq k \end{cases}$$

(LP2) ist der Grund wieso LI die IB erfüllt:

$$p_n(x_i) = \sum_{j=0}^n y_j \cdot L_j^{\wedge}(x_i)$$

$$= 0 + \dots + 0 + y_i \cdot \underbrace{L_i^{\wedge}(x_i)}_1 + 0 + \dots$$

$$= y_i \checkmark$$

Bsp.: (2) Finde das IP durch $(x_0, y_0) = (1, 2)$,
 $(x_1, y_1) = (3, 5)$ und $(x_2, y_2) = (4, 4)$

↪ wie Bsp. (1)!

Berechne die LP:

$$\begin{aligned} L_0^2(x) &= \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \cdot \frac{x - x_2}{x_0 - x_2} = \frac{x - 3}{1 - 3} \cdot \frac{x - 4}{1 - 4} \\ &= \frac{1}{6} (x - 3)(x - 4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_1^2(x) &= \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \cdot \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} = \frac{x - 1}{3 - 1} \cdot \frac{x - 4}{3 - 4} \\ &= -\frac{1}{2} (x - 1)(x - 4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_2^2(x) &= \frac{x - y_0}{x_2 - x_0} \cdot \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{x - 1}{4 - 1} \cdot \frac{x - 3}{4 - 3} \\ &= \frac{1}{3} (x - 1)(x - 3) \end{aligned}$$

Damit

$$p_2(x) = 2 \cdot L_0^2(x) + 5 \cdot L_1^2(x) + 4 \cdot L_2^2(x)$$

$$= \dots = -2 + \frac{29}{6}x - \frac{5}{6}x^2$$

(\equiv Bsp. (1) \checkmark .)

I.2 Interpolationsfehler

Nun sollen die Stützwerte y_j Werte einer Funktion f an den paarweise verschiedenen Stützstellen x_j sein und wir fragen uns wie gut das IP die Funktion f zwischen den Stützstellen approximiert.

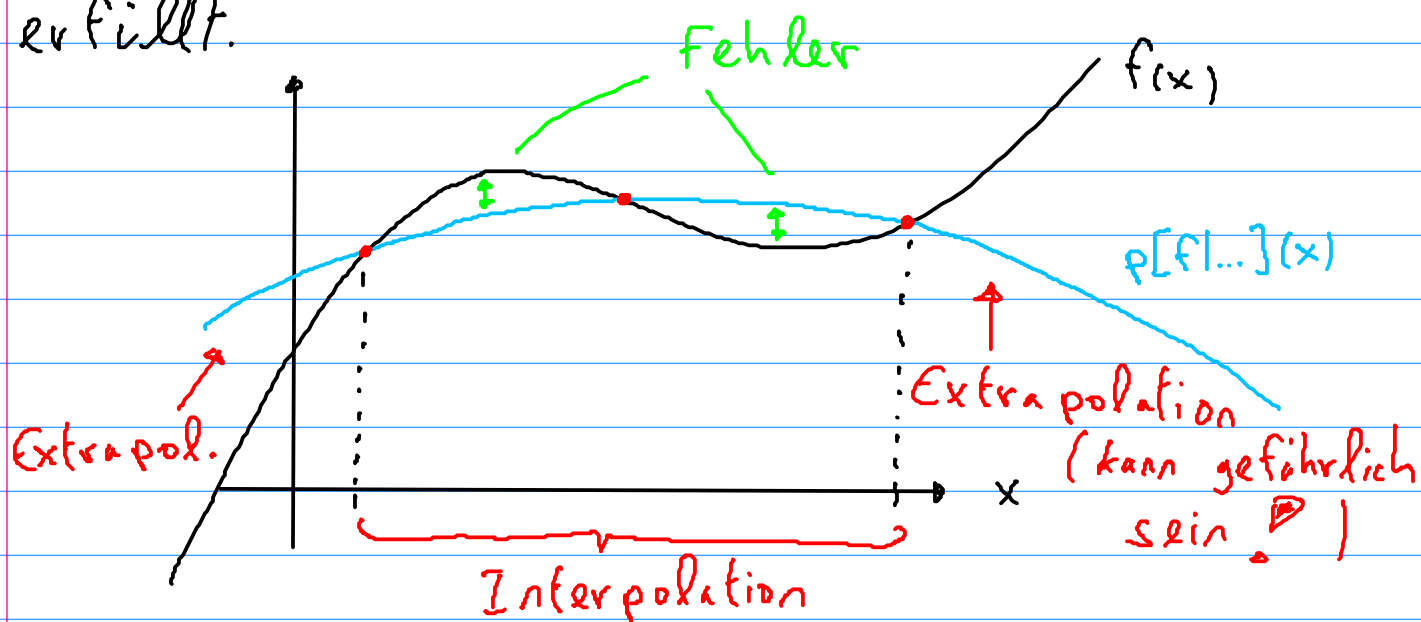
Sei also $f: I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ und wir bezeichnen mit

$$p[f|x_0, \dots, x_n](x) \in \mathbb{P}_n$$

das IP welches die IB

$$p[f|x_0, \dots, x_n](x_j) = f(x_j) \quad (j=0, 1, \dots, n)$$

erfüllt.



Für f $(n+1)$ -mal stetig differenzierbar lässt sich zeigen, dass es für jedes $x \in I$ ein $\xi = \xi(x) \in I$ gibt mit

hängt von x ab!

$(n+1)$ -te Ableitung

$$e(x) = f(x) - p[f|x_0, \dots, x_n](x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{j=0}^n (x-x_j)$$

hängt von f ab den Stützstellen ab

$e(x)$ ist eine Fehlerfunktion über das ganze Intervall I . Oft ist man (nur) am grössten Fehler über I interessiert:

$$\|e\|_\infty = \max_{x \in I} |e(x)| \quad (\text{Maximumsnorm})$$

$$= \max_{x \in I} \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!} \prod_{j=0}^n (x-x_j) \right|$$

$$\leq \max_{x \in I} \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!} \right| \cdot \max_{x \in I} \left| \prod_{j=0}^n (x-x_j) \right|$$

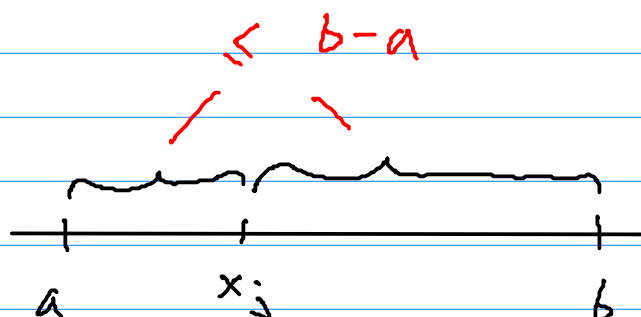
Abschätzung

$$= \frac{\|f^{(n+1)}\|_\infty}{(n+1)!} \left\| \prod_{j=0}^n (x-x_j) \right\|_\infty$$

$\leq b-a$

$$\leq \frac{\|f^{(n+1)}\|_\infty}{(n+1)!} (b-a)^{n+1}$$

Die letzte Abschätzung kann man am besten graphisch verstehen:



Die Aussage "für f $(n+1)$ -mal stetig differenzierbar" werden wir noch oft sehen.

Man kann auch sagen: - $f \in C_{n+1}[I]$

weniger
präzise ...

- f genügend glatt (smooth)
- f genügend oft stetig differenzierbar

I.3 Numerische Integration = Quadratur

9

Ziel: Approximation von

$$I[f] = \int_a^b f(x) dx$$

berechnen

Idee: Verwende Polynomiale Interpolation um $f(x)$ zu approximieren und integriere

$$p[f/x_0, \dots, x_n]$$

(... Polynome sind einfach zu integrieren...)

Def.: Eine endliche Rechenvorschrift der Form

$$Q[f] = \sum_{j=0}^n w_j \cdot f(x_j)$$

zur Approx. von $I[f]$ nennt man

Quadraturregel (QR) oder Quadraturformel.

Die $x_j \in I = [a, b]$ nennt man (Quadratur) Knoten oder Integrationsstützstellen und die w_j (Quadratur) Gewichte.

Quadraturregeln können nun ganz einfach hergeleitet werden.

Seien $x_0, x_1, \dots, x_n \in I$ uns gegebene Knoten.

Dann ist das IP einer Funktion f

$$p[f|x_0, \dots, x_n] = \sum_{j=0}^n f(x_j) \cdot L_j^n(x)$$

Da das IP die Funktion approx., so gilt

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &\approx \int_a^b p[f|x_0, \dots, x_n] dx \\ &= \int_a^b \sum_{j=0}^n f(x_j) \cdot L_j^n(x) dx \\ &= \sum_{j=0}^n \int_a^b f(x_j) L_j^n(x) dx \\ &= \sum_{j=0}^n f(x_j) \underbrace{\int_a^b L_j^n(x) dx}_{\text{Konstant!}} \\ &= \sum_{j=0}^n f(x_j) \cdot w_j = Q_n[f] \end{aligned}$$

Die Quadratur Gewichte können also ganz einfach berechnet werden:

$$w_j = \int_a^b L_j^n(x) dx$$

Beachte: Die w_j sind unabhängig von f !

D.h. für gegebene Knoten x_j kann man sie ein für alle Mal berechnen und tabellieren.

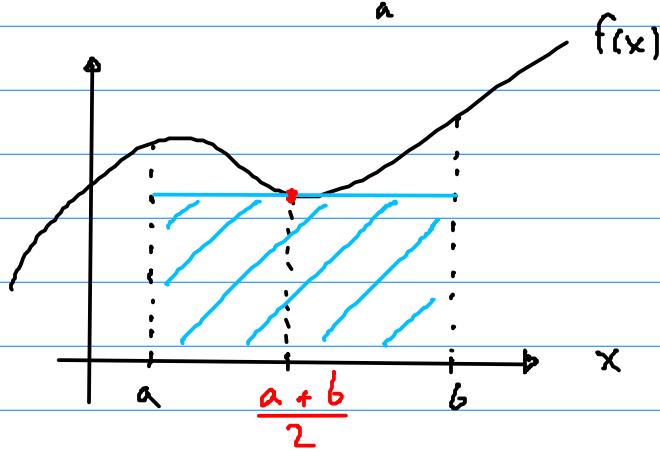
Wichtige Beispiele ...

Bsp.: (3) Mittelpunktsregel (MR) ($n=0$)

$$\text{Knoten: } x_0 = \frac{a+b}{2}$$

$$\text{LP: } L_0^0(x) = 1$$

$$\text{Gewichte: } w_0 = \int_a^b L_0^0(x) dx = b-a$$



Damit

$$Q_0[f] = (b-a) \cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

(4) Trapezregel (TR) ($n=1$)

Knoten: $x_0 = a$, $x_1 = b$

LP : $L_0^1(x) = \frac{x-b}{a-b}$

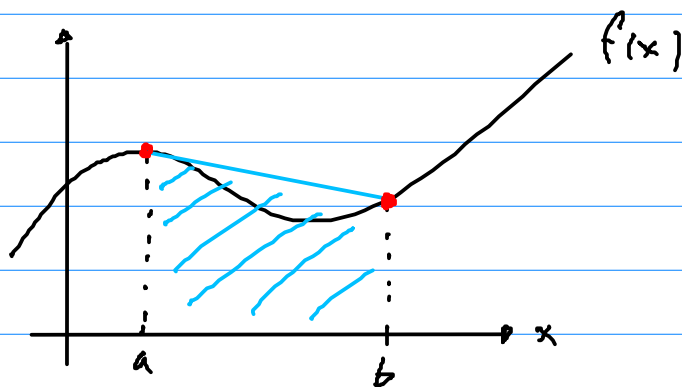
$$L_1^1(x) = \frac{x-a}{b-a}$$

Gewichte: $w_0 = \int_a^b L_0^1(x) dx = \int_a^b \frac{x-b}{a-b} dx$

$$= \frac{b-a}{2}$$

$$\int_a^b \frac{(x-b)^2}{2(a-b)} dx = \frac{(x-b)^3}{6(a-b)} \Big|_a^b = \frac{0 - (a-b)^3}{6(a-b)} = -\frac{(a-b)^2}{6}$$

$$w_1 = \dots = \frac{b-a}{2}$$



Damit

$$Q_1[f] = \frac{b-a}{2} (f(a) + f(b))$$

(s) Simpson-Regel (SR) ($n=2$)

Knoten: $x_0 = a$, $x_1 = \frac{a+b}{2}$, $x_2 = b$

$$LP : L_0^2(x) = \frac{x - \frac{a+b}{2}}{a - \frac{a+b}{2}} \cdot \frac{x - b}{a - b}$$

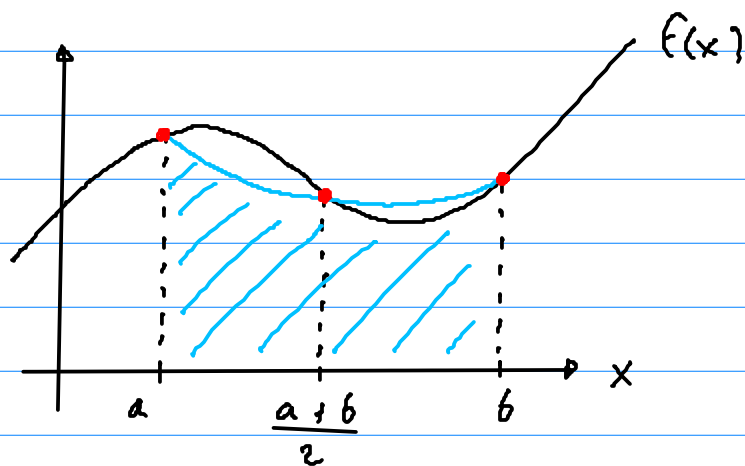
$$L_1^2(x) = \dots$$

$$L_2^2(x) = \dots$$

Gewichte: $w_0 = \int_a^b L_0^2(x) dx = \dots = \frac{b-a}{6}$

$$w_1 = \dots = \frac{4(b-a)}{6}$$

$$w_2 = \dots = \frac{b-a}{6}$$



Damit

$$Q_2[f] = \frac{b-a}{6} \left(f(a) + 4 \cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right)$$

Die MR , TR und SR sind sog.
Newton-Cotes (NC) QR_n.

Bei diesen QR verteilt man die Knoten x_j
 äquidistant über das Intervall $I = [a, b]$

$$n=0: x_0 = \frac{a+b}{2}$$

$$n>0: x_j = a + \frac{b-a}{n} j \quad \text{für } j=0, 1, \dots, n$$

Bem.: (i) TR und SR gehören zu den
 "populärsten" QR

(ii) NC QR mit $n > 6$ werden numerisch
 unbrauchbar (da negative Gewichte w_j
 auftreten)

I.4 Quadraturfehler

Nun interessieren wir uns für die Güte
 von QR_n.

Def.: Wir nennen $E[F] = |Q[F] - I[F]|$
 den Quadraturfehler (QF).

Im Prinzip könnten wir den QF mit Hilfe
 des Interpolationsfehler untersuchen... Dies ist
 jedoch (relativ) "mühsam".

Als ein Maß der Genauigkeit einer QR definieren wir:

Def.: Eine QR hat Genauigkeitsgrad (GG) $g \in \mathbb{N}$, falls sie alle Polynome bis und mit zum Grad g exakt integriert und g die größtmögliche Zahl mit dieser Eigenschaft ist.
Manchmal auch Exaktheitsgrad.

Def.: Die Ordnung s einer QR ist definiert durch $s = g + 1$.

Dank der Linearität von $I[f]$ und $Q[f]$ kann man den GG einfach bestimmen durch

$$Q[x^k] = I[x^k] \quad k = 0, 1, \dots, g$$

$$Q[x^{g+1}] \neq I[x^{g+1}]$$

$$\begin{aligned} \lceil p \in \mathcal{P}_g : I[p] &= \int_a^b a_0 + a_1 \cdot x + \dots + a_g \cdot x^g dx \\ &= a_0 \int_a^b 1 dx + a_1 \int_a^b x dx + \dots + a_g \int_a^b x^g dx \\ &= a_0 \cdot I[1] + a_1 \cdot I[x] + \dots + a_g \cdot I[x^g] \end{aligned}$$

$$Q[p] = \dots \sim \text{gleich wie für } I[p] \quad \checkmark$$

Eine weitere willkommene Vereinfachung bei der Bestimmung des GG ist, dass man es nur für das Referenz-Intervall (RI) $I = [-1, 1]$ überprüfen muss. Wieso?

Weil sich jedes Intervall $[a, b]$ durch die Variablen substitution

$$x = \frac{b-a}{2} t + \frac{a+b}{2}, \quad t \in [-1, 1]$$

in das RI transformieren lässt:

$$\begin{aligned} I[f] &= \int_a^b f(x) dx \\ &= \int_{-1}^1 f\left(\frac{b-a}{2} t + \frac{a+b}{2}\right) \underbrace{\frac{b-a}{2} dt}_{dx} \\ &= \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 f\left(\frac{b-a}{2} t + \frac{a+b}{2}\right) dt \end{aligned}$$

Es ist klar, dass NCs QR_n mindestens den GG des zugrundeliegenden IPs haben. Falls der Grad n des IPs aber gerade ist, so gewinnt man einen GG gratis dazu aus Symmetriegründen:

Bsp.: (6) MR ($n=0$, also gerade)

$$Q_0[f] = (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

$$Q_0[1] = 2 \cdot 1 = I[1]$$

$$Q_0[x] = 2 \cdot 0 = I[x]$$

$$Q_0[x^2] = 2 \cdot 0^2 \neq \frac{2}{3} = I[x^2]$$

$$\leadsto \text{GG } q = 1 = n + 1$$

(7) TR ($n=1$, also ungerade)

$$Q_1[f] = \frac{b-a}{2} (f(a) + f(b))$$

$$Q_1[1] = \frac{2}{2} \cdot (1 + 1) = 2 = I[1]$$

$$Q_1[x] = \frac{2}{2} \cdot (1 + 1) = 0 = I[x]$$

$$Q_1[x^2] = \frac{2}{2} \cdot (1 + 1) = 2 \neq I[x^2]$$

$$\leadsto \text{GG } q = 1 = n$$

(8) SR ($n=2$, also gerade)

$$Q_2[f] = \frac{b-a}{6} \left(f(a) + 4 \cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right)$$

$$Q_2[1] = \dots$$

⋮

Übung

$$Q_2[x^k] = \dots$$

$$\leadsto \text{GG } q = 3 = n + 1$$

Für den QF lässt sich zeigen

$$E[f] \leq \frac{\|f^{(q+1)}\|_{\infty}}{(q+1)!} (b-a)^{q+2} \quad \left(\begin{array}{l} \text{GG} \\ \text{(QFA)} \end{array} \right)$$

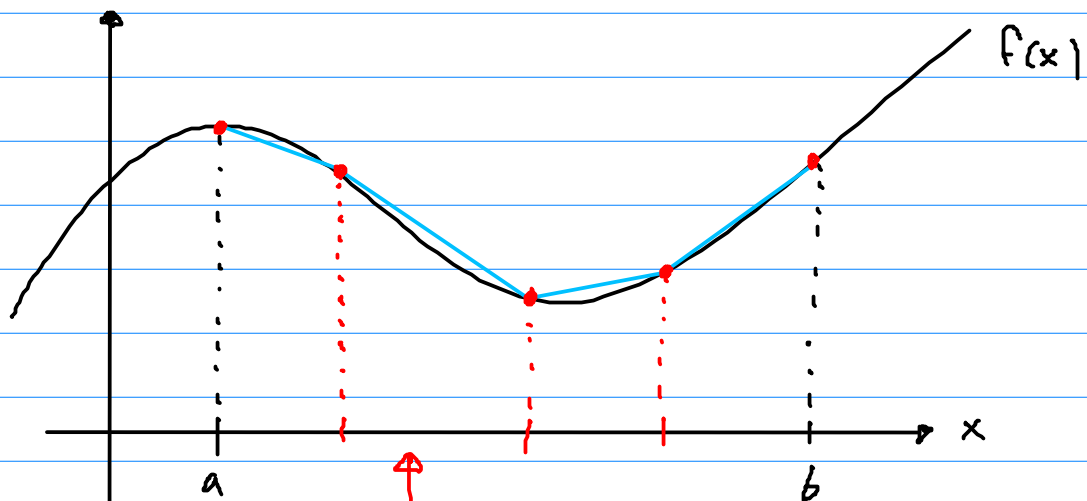
^s ^{s+1 - Ordnung}

Bsp.: (9) \leadsto Slides

Zusammengefasst: Je grösser der GG, desto genauer ist ein QR, vorausgesetzt, das IP ist eine gute Approx. der Funktion f

I.5 Summierte Quadraturregeln

Um bessere Approximationen von $I[f]$ zu erhalten benutzt man i.A. eine gegebene QR nicht über das gesamte Intervall $[a, b]$. Sondern man zerlegt $[a, b]$ in eine Reihe kleinere Teil-Intervalle und wendet die QR auf diese an und summiert die so erhaltenen Näherungen für die Teil-Integrale. Die so erhaltenen Formeln nennt man summierte QR (SQR) oder zusammengesetzte QR.



↑ TR auf jedem Teil-Intervall
und summierte TR (STR)

Das Intervall $I = [a, b]$ wird in N Teil-Intervalle $I_j = [x_{j-1}, x_j]$ ($j=1, \dots, N$) zerlegt mit

$$x_j = a + j \cdot h, \quad j=0, 1, \dots, N$$

und

$$h = \frac{b-a}{N}.$$

Nun wendet man eine gegebene QR auf die Teil-Intervalle an und summiert

Bsp.: (10) Summierte MR (SMR)

$$\begin{aligned} Q_0^N[F] &= \sum_{j=1}^N Q_0[F \text{ auf } I_j] \\ &= \sum_{j=1}^N h \cdot f\left(\frac{x_{j-1} + x_j}{2}\right) \end{aligned}$$

(11) Summierte TR (SMR)

$$\begin{aligned} Q_1^N[F] &= \sum_{j=1}^N Q_1[F \text{ auf } I_j] \\ &= \sum_{j=1}^N \frac{h}{2} (f(x_{j-1}) + f(x_j)) \\ &= \frac{h}{2} f(x_0) + h \sum_{j=1}^{N-1} f(x_j) + \frac{h}{2} f(x_N) \\ &= \frac{h}{2} \left(f(a) + 2 \sum_{j=1}^{N-1} f(x_j) + f(b) \right) \end{aligned}$$

(12) Summierte SR (SSR)

$$\begin{aligned}
 Q_2^N[f] &= \sum_{j=1}^N Q_2[f \text{ auf } I_j] \\
 &= \sum_{j=1}^N \frac{h}{6} \left(f(x_{j-1}) + 4 \cdot f\left(\frac{x_{j-1} + x_j}{2}\right) + f(x_j) \right) \\
 &= \frac{h}{6} \left[f(a) + 2 \cdot \sum_{j=1}^{N-1} f(x_j) \right. \\
 &\quad \left. + 4 \cdot \sum_{j=1}^N f\left(\frac{x_{j-1} + x_j}{2}\right) + f(b) \right]
 \end{aligned}$$

Wie verhält sich der QF von SQR_n?

Der QF einer SQR ist (offensichtlich) die Summe der gemachten Fehler auf jedem Teil-Intervall:

$$E^N[f] = |I[f] - Q_n^N[f]|$$

$$= \left| \sum_{j=1}^N I[f \text{ auf } I_j] - Q_n[f \text{ auf } I_j] \right|$$

$$\leq \sum_{j=1}^N \underbrace{|I[f \text{ auf } I_j] - Q_n[f \text{ auf } I_j]|}_{E[f \text{ auf } I_j]}$$

Δ-Ungleichung
(Dreieck)
 $|a+b| \leq |a|+|b|$

GG von Q_n!

$$\stackrel{(QF1)}{\leq} \sum_{j=1}^N \frac{\max_{x \in I_j} |f^{(q+1)}(x)|}{(q+1)!} \underbrace{|x_j - x_{j-1}|}_{h}^{q+2}$$

∞-Norm über I=[a,b]!

$$\leq \frac{\|f^{(q+1)}\|_{\infty}}{(q+1)!} h^{q+1} \underbrace{\sum_{j=1}^N h}_{N \cdot h = b-a}$$

Zusammengefasst

$$E^N[f] \leq \frac{\|f^{(q+1)}\|_{\infty}}{(q+1)!} \cdot (b-a) \cdot h^{q+1} = \frac{\|f^{(s)}\|_{\infty}}{s!} \cdot (b-a) \cdot h^s$$

GG
Ordnung

Solche Abschätzungen sind typisch und dazu verwendet man das Landau-Symbol. Man schreibt:

$$e = \mathcal{O}(h^p)$$

Falls

$$|e| \leq C \cdot h^p$$

für positive Konstanten C und p gilt

für alle $h > 0$ klein genug.

Für den SQR Fehler gilt also

$$E^N[f] = \mathcal{O}(h^{q+1}) = \mathcal{O}(h^s).$$

Bsp.: (13) → Slides

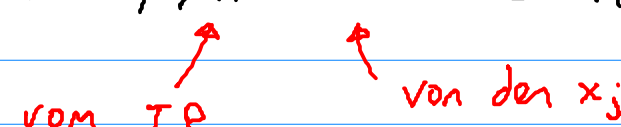
Bem.: (i) Die Ordnung s kann man sehr einfach in einem log-log plot ablesen

(ii) Um die volle Ordnung zu erhalten muss die zu integrierende Funktion genügend glatt sein

I.6 Gauss-Quadratur

Bei den NC QR_n wählt man $n+1$ äquidistant verteilte Knoten, legt das IP vom Grad n durch und erhält damit eine QR mit G_G mindestens n ($n/n+1$ falls n ungerade/gerade).

Idee: wähle die $n+1$ Knoten so, dass der grösstmögliche G_G erreicht wird (Hoffnung: G_G mit $q \geq n + n + 1 = 2n + 1$)



vom IP von den x_j 's
n-ten Grades

Frage: Was ist der grösstmögliche GGr den man mit $n+1$ Knoten erreichen könnte?

Betrachte folgendes Polynom vom Grad $2n+2$ auf dem RI:

$$p(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i)^2 \in \mathbb{P}_{2n+2}$$

↑ Knoten

Klar: $I[p] = \int_{-1}^1 p(x) dx > 0$

Aber mit Quadratur

$$Q[p] = \sum_{j=0}^n \omega_j \cdot \underbrace{p(x_j)}_0 = 0$$

↗ ≠ ↘

Also der grösstmögliche GGr den man erreichen könnte ist $g = 2n+1$!

Diesen GGr kann man auch erreichen und man stösst dabei auf einen wichtigen Begriff der linearen Algebra:

Orthogonalität

Betrachten wir hierzu den Interpolationsfehler

$$e(x) = f(x) - p[f | x_0, \dots, x_n] = K(x) \cdot \prod_{i=0}^n (x - x_i)$$

Sei nun $f(x) = x^m$ ein Monom mit $m \geq 0$ ganzzahlig. Dann ist

$$e(x) = x^m - p[x^m | x_0, \dots, x_n] = K(x) \cdot \prod_{i=0}^n (x - x_i)$$

↑
↑
↑

Polynom
Polynom
Polynom

Grad m
Grad n
Grad n+1

↘
↘

Polynom

Grad $\max\{m-n-1, 0\}$

mit

$$K(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } m \leq n \\ r(x) \in \mathbb{P}_{m-n-1} & \text{für } m > n \end{cases}$$

Integrieren wir nun $e(x)$ über das RI:

$$\int_{-1}^1 e(x) dx = \int_{-1}^1 x^m dx - \int_{-1}^1 p[x^m | x_0, \dots, x_n] dx$$

$$= I[x^m] - Q[x^m]$$

$$= \int_{-1}^1 K(x) \cdot \prod_{i=0}^n (x - x_i) dx$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{für } m \leq n \\ \int_{-1}^1 r(x) \cdot \prod_{i=0}^n (x - x_i) dx & \text{für } m > n \end{cases}$$

Dies bestätigt uns noch einmal, dass eine QR mit $n+1$ Knoten G_n von n hat.

Aber viel mehr noch: Wenn wir $n+1$ Knoten mit

$$\int_{-1}^1 r(x) \cdot \prod_{i=0}^n (x - x_i) dx \stackrel{!}{=} 0$$

$\underbrace{\int_{-1}^1}_{\in \mathbb{P}_n} \cdot \underbrace{\prod_{i=0}^n (x - x_i)}_{\in \mathbb{P}_{n+1}}$

für $n < m < 2n+2$ bestimmen können, so erhalten wir ein QR mit grösstmöglichen G_n !

Aus der linearen Algebra ist bekannt,

dass

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x) g(x) dx$$

ein Skalarprodukt in $C[-1, 1]$ definiert.

Wenn $\langle f, g \rangle = 0$, so sind f und g orthogonal zueinander.

Also

$$\langle v(x), \prod_{i=0}^n (x-x_i) \rangle = 0$$

Polynome!

sagt uns wir suchen Orthogonalpolynome!

Dies führt uns zu den Legendre-Polynomen welche durch folgende Rekursionsformel gegeben sind

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x$$

$$P_{j+1}(x) = \frac{2j+1}{j+1} x \cdot P_j(x) - \frac{j}{j+1} P_{j-1}(x), \quad j \geq 1$$

$(j=0,1,\dots,n)$

29

Die $P_j(x)$ bilden eine orthogonale Basis von \mathbb{P}_n :

$$\langle P_i(x), P_j(x) \rangle = \int_{-1}^1 P_i(x) \cdot P_j(x) dx = 0, \quad i \neq j$$

Um den maximalen GCN zu erhalten wählen wir die $n+1$ Knoten so, dass

$$\prod_{i=0}^n (x-x_i) \sim P_{n+1}(x)$$

ein skalares vielfaches vom $(n+1)$ -ten Legendre-Polynom ist

\leadsto Wähle die Knoten x_i als die Nullstellen von $P_{n+1}(x)$!

06.03.17

Gauss (Legendre) Quadratur

Die $(n+1)$ -Punkte Gauss (Legendre) Quadratur (GLQ) auf dem RI $[-1, 1]$ ist gegeben durch:

$$G_n[f] = \sum_{j=0}^n w_j \cdot f(x_j)$$

wobei die Gauss-Punkte x_j die Nullstellen des $(n+1)$ -ten Legendre-Polynoms $P_{n+1}(x)$ und die Gewichte

$$w_j = \frac{2(1-x_j^2)}{((n+1)P_n(x_j))^2}, \quad j=0, 1, \dots, n$$

sind.

Sie hat den grösstmöglichen GG $q=2n+1$ und damit Ordnung $s=2n+2$.

Bsp.: (13) 2-Punkte GLQ ($n=1$)

(1) Berechne $P_{n+1}(x) = P_2(x)$ mit
Rekursionsformel

$$P_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

(2) Berechne Nullstellen von $P_2(x)$

$$\frac{1}{2}(3x^2 - 1) \stackrel{!}{=} 0$$

$$x_{0,1} = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

(3) Berechne Gewichte

$$\begin{aligned} \omega_0 &= \frac{2(1 - x_0^2)}{(2 \cdot P_1(x_0))^2} = \frac{2(1 - 1/3)}{(2 \cdot (-1/\sqrt{3}))^2} \\ &= \frac{\cancel{2} \cdot \overbrace{(1 - 1/3)}^{2/3}}{\cancel{2} \cdot \frac{1}{3}} = 1 \end{aligned}$$

$$\omega_1 = 1$$

$$\text{Also } G_1[f] = f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

Bem.: (i) Die Gewichte bei GLQ sind stets positiv

(ii) Für n "nicht zu groß" sind die GLQ tabelliert

Für grosse n werden die GLQ numerische bestimmt

(iii) Es gilt stets: hohe Ordnung bedeutet nicht zwingend hohe Genauigkeit!

Die gilt nur wenn f glatt genug ist.

(iv) Allgemeiner betrachte man

$$I[f] = \int_a^b w(x) \cdot f(x) dx$$

wobei $w(x)$ eine nichtnegative Gewichtsfunktion ist:

- $w(x) = 1$ \rightsquigarrow Gauss-Legendre

- $w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ \rightsquigarrow Gauss-Tschebyscheff

- $w(x) = e^{-x^2}$ \rightsquigarrow Gauss-Hermite

...

(v) Manchmal beginnt der Summationsindex bei 1

$$G[f] = \sum_{j=1}^n \omega_j \cdot f(x_j)$$

Dann ist $G_n \quad q = 2n - 1$ und die Ordnung $s = 2n$

I.7 Adaptive Quadratur

Ziel: Berechne

$$I[f] = \int_a^b f(x) dx$$

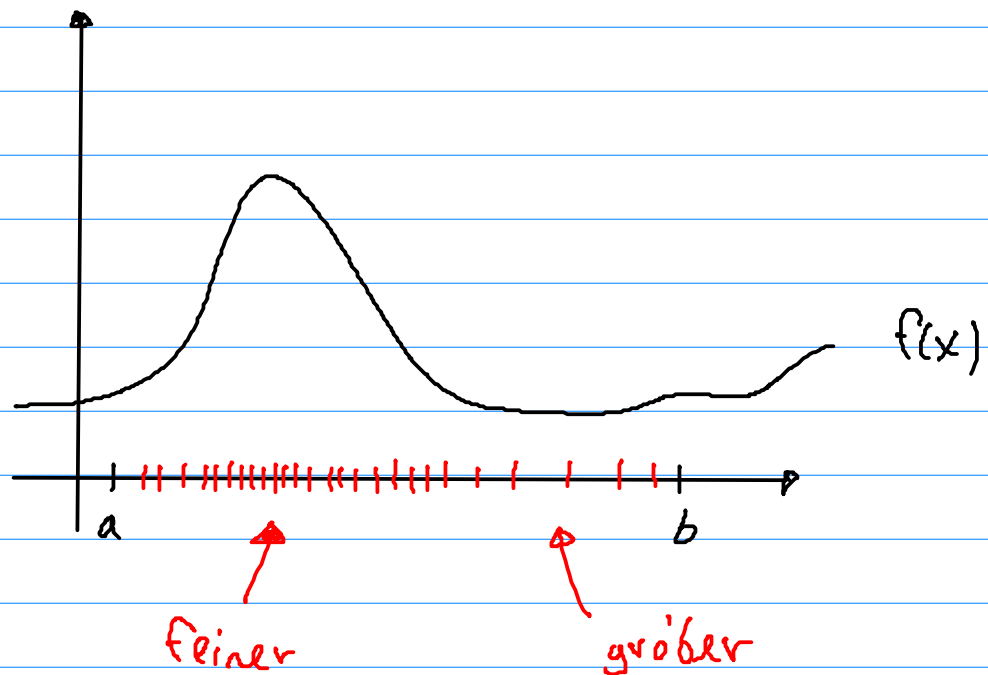
bis auf eine vorgegebene Toleranz

$$|Q[f] - I[f]| < \epsilon_0$$

so effizient wie möglich

d.h. mit so wenig Funktionsauswertungen wie möglich

Idee: Anstatt das Intervall $I = [a, b]$ in gleich grosse Teil-Intervalle aufzuteilen, verwende feinere oder gröbere Teil-Intervalle je nachdem wie stark die Funktion $f(x)$ variiert, oder äquivalent, wo der QF gross ist:



Dazu benötigen wir eine Schätzung des Fehlers.

