

Als ein Maß der Genauigkeit einer QR definieren wir:

Def.: Eine QR hat Genauigkeitsgrad (GG) $q \in \mathbb{N}$, falls sie alle Polynome bis und mit zum Grad q exakt integriert und q die größtmögliche Zahl mit dieser Eigenschaft ist.
Manchmal auch Exaktheitsgrad.

Def.: Die Ordnung s einer QR ist definiert durch $s = q + 1$.

Dank der Linearität von $I[f]$ und $Q[f]$ kann man den GG einfach bestimmen durch

$$Q[x^k] = I[x^k] \quad k = 0, 1, \dots, q$$

$$Q[x^{q+1}] \neq I[x^{q+1}]$$

$$\begin{aligned} \Gamma \quad p \in \mathbb{P}_q : \quad I[p] &= \int_a^b a_0 + a_1 \cdot x + \dots + a_q \cdot x^q \, dx \\ &= a_0 \int_a^b 1 \, dx + a_1 \int_a^b x \, dx + \dots + a_q \int_a^b x^q \, dx \\ &= a_0 \cdot I[1] + a_1 \cdot I[x] + \dots + a_q \cdot I[x^q] \end{aligned}$$

$$Q[p] = \dots \sim \text{gleich wie für } I[p] \quad \checkmark$$